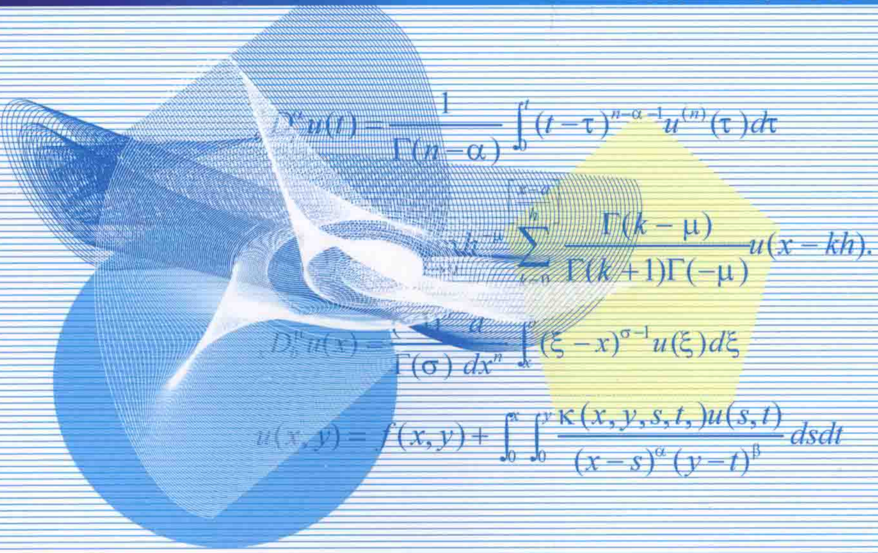
FENSHU JIE WEIFEN JIFEN FANGCHENG DE SHUZHI JIEFA
JIQI WUCHA FENXI

分数阶微分积分方程的数值解法及其误差分析

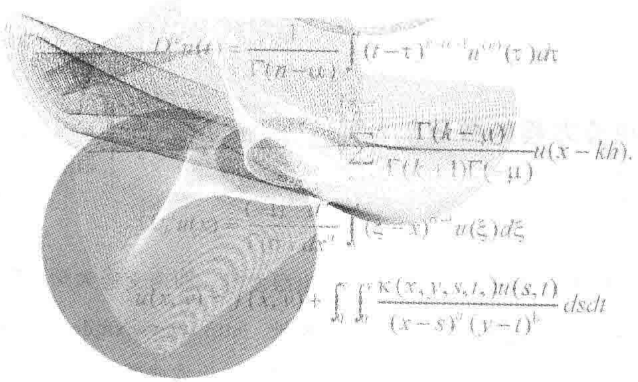
王自强　曹俊英　著



SWJTUP 西南交通大学出版社

分数阶微分积分方程的数值解法及其误差分析

王自强　曹俊英　著



西南交通大学出版社
·成　都·

内容简介

本书研究分数阶微分积分方程的数值算法，其基本内容涵盖：分数阶常微分方程的block-by-block算法；分数阶方程的block-by-block算法的最优阶收敛性分析；二维分数阶Volterra积分方程的修正block-by-block方法；非线性二维Volterra积分方程的一个高阶数值格式；非线性Volterra积分方程组的一个高阶数值格式；分数阶扩散方程的一个新的高阶数值格式；时间分数阶扩散方程的一个有限差分谱高阶逼近；时间分数阶扩散方程的一个更高阶有限差分谱高阶逼近. 读者只需具备微积分、线性代数、计算方法和程序设计方面的初步知识即可学习本书. 本书可供统计学、信息与计算科学、数学与应用数学专业的本科生，统计学、应用数学、计算数学和运筹学与控制论的研究生，理工科相关专业的研究生，对分数阶微分积分方程数值解感兴趣的教师及科技工作者阅读.

图书在版编目（CIP）数据

分数阶微分积分方程的数值解法及其误差分析 / 王自强，曹俊英著. —成都：西南交通大学出版社，2015.6

ISBN 978-7-5643-3960-9

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①王… ②曹… Ⅲ. ①积分微分方程–数值解 Ⅳ. ①O175.6

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第127638号

分数阶微分积分方程的数值解法及其误差分析

王自强 曹俊英 著

责任编辑 张宝华
装帧设计 原谋书装

印张 12.25 字数 220千
成品尺寸 170 mm × 230 mm
版本 2015年6月第1版
印次 2015年6月第1次
印刷 成都蓉军广告印务有限责任公司

出版发行 西南交通大学出版社
网址 http://www.xnjdcbs.com
地址 四川省成都市金牛区交大路146号
邮政编码 610031
发行部电话 028-87600564 028-87600533

书号：ISBN 978-7-5643-3960-9
定价：48.00元

统计学博士点建设文库
编委会成员名单

前 言

分数阶微积分理论是数学分析的一个分支，是专门研究任意阶积分和微分的数学性质及其应用的领域，是传统的整数阶微积分的推广. 分数阶微积分的概念有很长的历史，最早提出这一思想的是数学家 Leibniz. 1695 年，他在给 L'Hopital 的信中首次提出了 $\frac{1}{2}$ 阶导数，在他之后，1730 年，Euler 观察到 x^{α} 的非整数 p 阶导数 $\frac{\mathrm{d}^{p} x^{\alpha}}{\mathrm{d}x^{p}}$ 是有意义的；1812 年，Laplace 提出了对可用积分 $\int T(t)t^{-x}\mathrm{d}t$ 表示的函数进行非整数阶微分的思想；1822 年，Fourier 建议用公式

$$\frac{\mathrm{d}^{p} f(x)}{\mathrm{d}x^{p}}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda^{p}\mathrm{d}\lambda\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\cos(\lambda x-t\lambda+p\pi/2)\mathrm{d}t$$

来定义非整数阶导数，Abel（1823—1826 年）、Liouville（1832—1873 年）、Riemann（1847 年）等先后在该领域也做出了杰出的贡献. 在近几十年里，研究者们发现，分数阶微积分算子与整数阶微积分算子不同，具有非局部性，从而非常适用于描述现实生活中具有记忆和遗传特性的材料.

分数阶导数主要有以下优势：

（1）分数阶导数具有全局相关，能较好地体现系统函数发展的历史依赖过程；而整数阶导数具有局部性，不适合描述历史依赖过程.

（2）分数阶导数模型克服了经典整数阶微分模型理论与实验结果吻合不好的缺点，使用较少几个参数就可获得很好的效果.

（3）在描述复杂物理力学问题时，与非线性模型比较，分数阶模型的物理意义更清晰，表述更简洁.

在近三个世纪里，对分数阶微积分理论的研究主要在数学的纯理论领域里进行，似乎它只对数学家们有用. 然而在近几十年来，分数阶微分积分方程越来越多地被用来描述光学和热学系统、统计模型、流变学及材料和力学系统、信号处理和系统识别、控制和机器人及其他应用领域中的问题. 分数阶微积分理论也越来越多地受到国内外学者的广泛关注，特别是从实际问题中抽象出来的分数阶微分方程成为很多数学工作者的研究热点. 随着分数阶微分积分方程在越来越多的科学领域里出现，无论对分数阶微分积分方程的

理论分析还是数值计算的研究都显得尤为迫切. 然而由于分数阶微分是拟微分算子，它的保记忆性（非局部性）对现实问题进行了优美刻画的同时，也给我们的分析和计算造成很大困难.

在数值算法方面主要存在的问题有：

（1）长时间历程问题一直没有找到一个满意的解决途径. 在数值模拟中，随着时间历程的增加，计算量成指数增长，同时一些学者提出的短期记忆方法只对很少一些情况有效，并不具有普适性. 因而长时间历程问题的解决任重而道远.

（2）没有开发出时间-空间混合的分数阶导数方程的算法和软件. 一种数学工具要在工程中有广泛的应用，就必须有成熟的算法与软件，如有限元的计算模拟软件就有很多，所以有限元才能在工程界有如此广泛的应用.

（3）分数阶导数的定义还不完善. 现在分数阶导数的定义有多种，至今还没有一个完善到大多数学者都能够接受的定义.

现阶段，分数阶微分积分方程的数值算法主要包括：① 有限差分法：显示格式，隐式格式，Crank-Nicholson 格式，预估校正算法，线性算法等；② 级数逼近法：变分迭代法，Adomian 分解法，同伦摄动法，通伦分析法，微分转换法等；③ 有限元法；④ 无网格方法；⑤ 一些新的算法：矩阵转化法，外推法等.

鉴于此，发展新的数值算法，特别是在保证计算可靠性和精度的前提下，提高计算效率，解决分数阶微分积分方程计算量和存储量过大的难点问题，发展相应的计算应用软件成为迫切需要关注的课题. 本书将介绍一些分数阶微分积分方程的数值方法，可以供对分数阶微分积分方程数值解感兴趣的读者阅读.

在本书完成之际，我们要感谢我们的老师、同学、亲友、领导和同事，他们一直以来的支持和帮忙让我们克服了种种困难，并不断进步. 特别是要感谢中国科学院数学与系统科学研究院的崔俊芝院士，厦门大学数学科学学院的许传炬教授，郑州大学数学与统计学院的宋士仓教授，贵州大学理学院张大凯教授，感谢你们将我们带入更高的科研之门，使我们在科研道路上找准方向.

感谢贵州民族大学校领导和理学院领导对我们的大力支持和关心以及同事们的热情鼓励和帮助. 同时感谢贵州省科技厅自然科学基金(〔2013〕2144,〔2014〕2098)、国家自然科学基金数学天元基金项目（11426074）和贵州省教育厅2014年教改项目“高等数学课程教学改革与应用型少数民族人才培养的研究”的资助.

谨以此书献给我们的恩师和父母，以及所有给予我们关心和帮助的人.

作　者

2015 年 1 月

目 录

1 绪 论

1.1 国内外研究现状和相关科学问题

分数阶微积分是研究任意阶积分和微分的数学性质及其应用的领域，是传统的整数阶微积分的推广，它的出现已有很长的历史，但得到广泛应用则是近几年的事情. 分数阶微分方程的应用领域包含自动控制理论、记忆材料、黏弹性力学、地震分析、电力分形网络、分数阶正弦振荡器、电化学过程、反常扩散、信号处理、分形和多孔介质中溶质的对流与弥散、信息理论、分数电容理论、电极电解质接口描述、分形理论、分子生物学等. 分数阶微分方程的特点是含有非整数阶导数，具有所谓的非局部性，能有效描述某些物质的记忆和遗传性质，但也给数值方法的设计带来困难. 随着分数阶微分方程涉及的应用学科越来越多,分数阶微分方程的研究引起了人们广泛的关注，逐渐成为一个新的活跃的研究领域. 目前，在分数阶常微分方程和时间分数阶方程的数值计算方法方面尚缺少高精度、高效率的数值格式，现在的数值格式的精度都不是太高. 因此，迫切需要寻求新的高精度、高效率计算方法来研究记忆材料、黏弹性力学和分子生物学等领域中热点问题的分数阶微分模型，以解决数值模拟中的若干关键性技术问题，为实际工程计算提供技术支持和理论依据.

分数阶微分方程模型在材料、力学上的应用和生物上的实验结果使得分数阶微分方程研究受到广泛关注. 近年来，分数阶微分方程的理论研究有了一些结果，如 Diethelm 等人考虑了分数阶常微分方程组（FODEs）初值问题解的适定性[1]，Diethelm 给出了 FODEs 理论方面的最新发展[2]. 无论如何，确定分数阶微分方程的解析解是十分困难的. 同时整数阶微分方程的数值解方法不能简单地平移到分数阶微分方程上，因此近些年学者对 FODEs 数值解的研究兴趣日益高涨. 在分数阶常微分方程研究方面，1986 年，Lubich[3]对分数阶常微分方程组提出了分数阶的线性多步解法；1997 年，Diethelm 和 Walz 基于外推法对分数阶常微分方程组提出了一个数值格式[5]；Diethelm 等人在 2002 年和 2004 年对 FODEs 分别利用分数阶的预估校正格式和分数阶 Adams 方法给出了两个数值格式[5, 6]；2007 年，Lin 和 Liu[7] 对 FODEs 的分

数阶线性多步法的稳定性和收敛性给出了严格的数学证明；2013 年，Li 和 Zeng[8]对分数阶常微分方程组提出了一个新的数值格式和严格的数学理论分析，获得：当$0<\alpha<1$时，阶数为 α，当$\alpha\geqslant1$时，阶数为 1；2014 年，Pedas 和 Tamme[9] 基于样条配置点法对非线性分数阶常微分方程组提出了一个数值格式；2006 年，Kumar 和 Agrawal[10] 基于经典的 block-by-block 方法对 FODEs 的一组初值问题给出了一个数值方法求解；2012 年，Huang 等人[11] 证明了经典的 block-by-block 方法的收敛阶至少是 3 阶，但是此格式需要在每一块上耦合求解，这大大增加了计算量.

分数阶偏微分方程是由传统的偏微分方程演化而来的. 从时间分数阶导数的定义来看，函数在 t_k 时刻的分数阶导数依赖于函数在前面所有 $t<t_\kappa$ 时刻的函数值，从而使分数阶偏微分方程在研究一些具有记忆过程、遗传性质以及异质材料时比整数阶方程模型更具有优势，如描述材料的电性质、电磁波、输送管中的边界层效应、动力系统中的控制理论、黏弹性材料、电极电解质极化现象、分形动力学、混沌、神经细胞中离子的反常扩散过程等. 反常扩散方程是一类重要的分数阶方程. 反常扩散过程通常不遵守布朗运动中的高斯统计规律以及 Fick 第二定律. 特别地，扩散运动中位移平方的期望对时间是非线性依赖的，这种现象存在于许多系统中，如带电粒子在非晶形半导体中的传输、无序介质中的核磁共振、多孔渗水系统、聚合体中的振动系统、分形几何上的输运等. 有一类反常扩散为超扩散（Levy Flight），这种现象存在于固体表面的集体滑动扩散、理查森湍流扩散、胶态系统和不同种类岩石中的传输、量子光学、单分子光谱学等. 分数阶扩散方程可由随机游走模型导出，它描述了反常扩散粒子状态的概率密度分布的演变. 根据粒子等待时间和跳跃步长的不同划分成三种不同类型的随机游走模型，相应地导出了三类分数阶扩散方程. 当每步等待时间的均值无限、跳跃步长的方均值有限时，随机游走模型描述了反常次扩散现象，相应地导出了时间分数阶扩散方程；当等待时间的均值有限、跳跃步长的方均值无限时，随机游走模型描述了超扩散现象，相应地导出了空间分数阶扩散方程；当等待时间的均值和跳跃步长的方均值都无限时，随机游走模型描述了次扩散与超扩散竞争的现象，相应地导出了时间-空间分数阶扩散方程[12]. 分数阶偏微分方程数值近似的研究起步相对也比较晚，理论分析方面目前也比较有限. 从 20 世纪末开始，Gorenflo 等人[13, 14]陆续考虑了时间导数为整数阶或 Caputo 分数阶，空间导数为 Riesz-Feller 位势算子的时间、空间、时间-空间分数阶扩散方程，借助于一定条件下 Riemann- Liouville 分数阶导数与 Grunwald-Letnikov 分数阶导数的等价性，用移位的

Grunwald-Letnikov 分数阶导数级数表达式中有限项级数和来近似 Riemann-Liouville 分数阶导数，得到方程的有限差分离散近似格式，进而把相应的离散格式解释成时间、空间、时间-空间上的离散随机游走模型. 此外，在文献[15]中，Gorenflo 和 Mainardi 还进一步证明了离散格式在分布意义下的收敛性；2005 年，Langlands 和 Henry[16]考虑了分数阶扩散方程，对时间分数阶导数用 L1 方法来逼近；2011 年，Lin，Li 和 Xu[17]对分数阶 Cable 方程时间上用差分法、空间用谱方法进行了研究；2005 年，Liu 和 Shen 用差分法求解并分析了时间分数阶扩散方程[18]；2006 年，Sun 和 Wu[19] 对时间分数阶导数，用变量替换方法把一个高阶方程转化为低阶方程组来逼近并构造了一个差分格式；2007 年，Lin 和 Xu[20] 对时间分数阶扩散方程提出在时间方向采用有限差分法，并严格证明了时间方向上的收敛阶是 $2-\alpha$ 阶；2009 年，Su，Wang 和 Yang[21]对分数阶对流扩散方程提出了一个数值格式，该格式的时间收敛阶为 2 阶；2011 年，Li，Zhao 和 Chen[22]对具有次扩散和超扩散的分数阶微分方程给出了一个数值格式：当 $0<\alpha<1$，是 1 阶精度的，当 $1<\alpha<2$，是 2 阶精度的；2013 年 Tripathi 等人[23]利用广义帽子函数的矩阵算子给出了求解分数阶微分方程的一个新的数值格式；2013 年，Mohebbi 和 Abbaszadeh[24]对分数阶对流扩散方程给出了一个紧致的差分格式，该格式的时间精度为：当 $0<\alpha<1$ 时，为 $O(\tau^{2-\alpha}+h^2)$；2013 年，Ren，Sun 和 Zhao[25]对具有 Neumann 边界条件的分数阶次扩散方程给出了一个紧致差分格式，该格式在时间上的阶数为 $2-\alpha$；2014 年，Lukashchuk[26] 对 Riemann-Liouville 型导数的常微分方程组给出了一个逼近数值格式；2014 年，Yang 等人[27]对分数阶扩散-波动方程给出了一个分数步数值方法，当 $1<\alpha<1.71832$ 时，该数值格式在时间上的精度为 α 阶；2014 年，Gao，Sun 和 Zhang[28] 对 Caputo 导数的分数阶微分方程给出了一个新的数值格式.

国内外专家虽然对分数阶常微分方程组，分数阶积分方程和时间分数阶偏微分方程的数值算法研究取得了很大的进展，但是高效率、高精度的数值格式的研究很少，许多问题尚未解决，例如怎样设计分数阶导数的高精度的离散格式，该格式的收敛性、稳定性和收敛阶如何；怎样建立分数阶微分方程等价的 Volterra 积分方程；如何对具有记忆效应的分数阶导数建立高效率的数值格式等. 作者希望通过本专著的研究探究分数阶常微分方程组，分数积分方程和时间分数阶偏微分方程的一类高精度、高效率数值格式.

1.2 基础知识

1.2.1 Gamma 函数和 Beta 函数

Gamma 函数是阶乘概念的推广，定义为：

$$\Gamma(z) := \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1} \mathrm{d}t, \ (\Re(z) > 0).$$

它有如下两个性质：

（1）$\Gamma(n) = (n-1)!, \forall n \in \mathbf{Z}^+$;

（2）$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \forall z \in \mathbf{C}$.

Beta 函数是二项式系数的推广，定义为：

$$B(z,\omega) := \int_0^1 \tau^{z-1}(1-\tau)^{\omega-1} \mathrm{d}\tau, \ (\Re(z) > 0, \Re(\omega) > 0).$$

Beta 函数可用 Gamma 函数表示为：

$$B(z,\omega) = \frac{\Gamma(z)\Gamma(\omega)}{\Gamma(z+\omega)}.$$

1.2.2 Riemann-Liouville 分数阶积分与导数

1.2.2.1 左 Riemann-Liouville 分数阶算子

（1）首先，我们看左 Riemann-Liouville 分数阶算子.

由微积分的知识我们知道，对一个函数求 $n(n \in \mathbf{N})$ 重积分可简化为：

$$_a\mathrm{D}_x^{-n} u(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_a^x (x-\xi)^{n-1} u(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{1.1}$$

将式（1.1）推广到非整数情形，并使用 Gamma 函数可给出如下左 Riemann-Liouville 分数阶积分的定义.

定义 1.1（左 Riemann-Liouville 分数阶积分[29]） 令 u 定义在区间 (a,b) 上，$\sigma > 0$，则次数为 σ 的左 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为：

$$_a\mathrm{D}_x^{-\sigma} u(x) = \frac{1}{\Gamma(\sigma)} \int_a^x (x-\xi)^{\sigma-1} u(\xi) \mathrm{d}\xi. \tag{1.2}$$

将经典的整数阶导数与分数阶积分算子作复合运算便可给出如下左分数

阶导数的定义.

定义 1.2（左 Riemann-Liouville 分数阶导数） 令 u 定义在区间 (a,b) 上，$\mu>0$，n 是大于 μ 的最小整数，及 $\sigma=n-\mu$，则次数为 μ 的左 Riemann-Liouville 分数阶导数定义为：

$$ {}_aD_x^{\mu}u(x):=D^n{}_aD_x^{-\sigma}u(x)=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\frac{d^n}{dx^n}\left(\int_a^x(x-\xi)^{\sigma-1}u(\xi)d\xi\right). \tag{1.3}$$

（2）关于 $(x-a)^{\nu},\nu>-1$ 的左 Riemann-Liouville 分数阶积分和导数.

应用定义（1.2），有：

$$ {}_aD_x^{-\mu}(x-a)^{\nu}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_a^x(x-\xi)^{\mu-1}(\xi-a)^{\nu}d\xi.$$

作变量替换 $\tau=\dfrac{\xi-a}{x-a}$，可得：

$$\begin{aligned} {}_aD_x^{-\mu}(x-a)^{\nu}&=\frac{(x-a)^{\nu+\mu}}{\Gamma(\mu)}\int_0^1(1-\tau)^{\mu-1}\tau^{\nu}d\tau\\ &=\frac{(x-a)^{\nu+\mu}}{\Gamma(\mu)}B(\mu,\nu+1)\\ &=\frac{\Gamma(\nu+1)(x-a)^{\nu+\mu}}{\Gamma(\nu+\mu+1)}. \end{aligned}$$

而 $(x-a)^{\nu}$ 的左分数阶导数为：

$$\begin{aligned} {}_aD_x^{\mu}(x-a)^{\nu}&=\frac{d^n}{dx^n}\,{}_aD_x^{\mu-n}(x-a)^{\nu}\\ &=\frac{d^n}{dx^n}\frac{\Gamma(\nu+1)(x-a)^{\nu+n-\mu}}{\Gamma(\nu+n-\mu+1)}\\ &=\frac{\Gamma(\nu+1)(x-a)^{\nu-\mu}}{\Gamma(\nu-\mu+1)}. \end{aligned}$$

（3）复合运算及逆算子.

命题 1.1 左 Riemann-Liouville 分数阶积分算子是可以互换的，即

$$ {}_aD_x^{-\mu}{}_aD_x^{-\nu}u(x)={}_aD_x^{-\mu-\nu}u(x),\forall\mu,\nu>0. \tag{1.4}$$

证明 根据定义并交换积分次序，有：

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_x^{-\mu}\,{}_a\mathrm{D}_x^{-\nu}u(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}\int_a^x (x-\tau)^{\mu-1}\int_a^\tau (\tau-s)^{\nu-1}u(s)\mathrm{d}s\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}\int_a^x u(s)\int_s^x (x-\tau)^{\mu-1}(\tau-s)^{\nu-1}\mathrm{d}\tau\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

对内部积分可作变量替换 $\xi=\dfrac{\tau-s}{x-s}$，因此，

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_x^{-\mu}\,{}_a\mathrm{D}_x^{-\nu}u(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}\int_a^x (x-s)^{\mu+\nu-1}u(s)\int_0^1 (1-\xi)^{\mu-1}\xi^{\nu-1}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}s \\
&= \frac{B(\mu,\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}\int_a^x (x-s)^{\mu+\nu-1}u(s)\,\mathrm{d}s \\
&= {}_a\mathrm{D}_x^{-\mu-\nu}u(x).
\end{aligned}
$$

命题 1.1 是左分数阶积分算子的半群性质，即左分数阶积分算子的集合 $\{{}_a\mathrm{D}_x^{-\sigma}\}$ 关于 σ 形成强连续半群. 如下关于左分数阶微分算子的两个性质类似于微积分基本定理的第一和第二部分.

命题 1.2 次数为 μ 的左 Riemann-Liouville 分数阶导数算子是次数为 μ 的左 Riemann-Liouville 分数阶积分算子的逆算子，即

$$
{}_a\mathrm{D}_x^{\mu}\,{}_a\mathrm{D}_x^{-\mu}u(x)=u(x),\forall\mu>0. \tag{1.5}
$$

证明 利用左 Riemann-Liouville 分数阶导数算子的定义、命题 1.1 及微积分的基本定理，有：

$$
\begin{aligned}
{}_a\mathrm{D}_x^{\mu}\,{}_a\mathrm{D}_x^{-\mu}u(x) &= \mathrm{D}^n\,{}_a\mathrm{D}_x^{\mu-n}\,{}_a\mathrm{D}_x^{-\mu}u(x) \\
&= \mathrm{D}^n\,{}_a\mathrm{D}_x^{-n}u(x) \\
&= u(x).
\end{aligned}
$$

命题 1.3 次数为 $\mu>0$，如下的左 Riemann-Liouville 分数阶积分和左 Riemann-Liouville 分数阶导数运算的复合公式成立：

$$
{}_a\mathrm{D}_x^{-\mu}\,{}_a\mathrm{D}_x^{\mu}u(x)=u(x)-\sum_{j=1}^{n}[{}_a\mathrm{D}_x^{\mu-j}u(x)]_{x=a}\frac{(x-a)^{\mu-j}}{\Gamma(\mu-j+1)},(n-1\leqslant\mu<n). \tag{1.6}
$$

证明 可将（1.6）的左边写为：

$$
{}_a\mathrm{D}_x^{-\mu}\mathrm{D}^n\,{}_a\mathrm{D}_x^{\mu-n}u(x).
$$

交换算子 D^n 和 ${}_a\mathrm{D}_x^{\mu-n}$ 的位置，重复应用 Leibniz 公式，可得：

$$\mathrm{D}^n{}_a\mathrm{D}_x^{-\mu}\omega(x)={}_a\mathrm{D}_x^{-\mu}\mathrm{D}^n\omega(x)-\sum_{j=1}^{n}\omega^{(n-j)}(a)\frac{(x-a)^{\mu-j}}{\Gamma(\mu-j+1)},(n-1\leqslant\mu<n). \tag{1.7}$$

这样，将 $\omega(x)={}_a\mathrm{D}_x^{\mu-n}u(x)$ 代入（1.7）可得（1.6）. 命题 1.3 证明完毕.

1.2.2.2 右 Riemann-Liouville 分数阶算子

（1）下面介绍右 Riemann-Liouville 分数阶算子.

将函数 $u(x)$ 在区间 (x,b) 上求 $n(\in\mathbf{N})$ 重积分可得

$$_x\mathrm{D}_b^{-n}u(x)=\frac{1}{(n-1)!}\int_x^b(\xi-x)^{n-1}u(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{1.8}$$

将（1.8）推广到非整数情形可得如下右 Riemann-Liouville 分数阶积分的定义.

定义 1.3（右 Riemann-Liouville 分数阶积分） 令 u 定义在区间 (a,b) 上，$\sigma>0$， 则次数为 σ 的右 Riemann-Liouville 分数阶积分定义为：

$$_x\mathrm{D}_b^{-\sigma}u(x)=\frac{1}{\Gamma(\sigma)}\int_x^b(\xi-x)^{\sigma-1}u(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{1.9}$$

将经典导数与右 Riemann-Liouville 分数阶积分作复合运算，便可给出如下右 Riemann-Liouville 分数阶导数的定义.

定义 1.4（右 Riemann-Liouville 分数阶导数） 令 u 定义在区间 (a,b) 上，$\mu>0$， n 是大于 μ 的最小整数，且 $\sigma=n-\mu$，则次数为 μ 的右 Riemann-Liouville 分数阶导数定义为：

$$_x\mathrm{D}_b^{\mu}u(x):=(-\mathrm{D})^n{}_x\mathrm{D}_b^{-\sigma}u(x)=\frac{(-1)^n}{\Gamma(\sigma)}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\int_x^b(\xi-x)^{\sigma-1}u(\xi)\mathrm{d}\xi. \tag{1.10}$$

（2）关于 $(b-x)^{\nu},\nu>-1$的右 Riemann-Liouville 分数阶积分和右分数阶导数.

由定义（1.9），有：

$$_x\mathrm{D}_b^{-\mu}(b-x)^{\nu}=\frac{1}{\Gamma(\mu)}\int_x^b(\xi-x)^{\mu-1}(b-\xi)^{\nu}\mathrm{d}\xi. \tag{1.11}$$

作变量替换 $\tau=\dfrac{\xi-x}{b-x}$，可得：

$$
\begin{aligned}
{}_x D_b^{-\mu}(b-x)^{\nu} &= \frac{(b-x)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu)}\int_0^1 \tau^{\mu-1}(1-\tau)^{\nu}\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{(b-x)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\mu)} B(\mu,\nu+1) \\
&= \frac{\Gamma(\nu+1)(b-x)^{\mu+\nu}}{\Gamma(\nu+\mu+1)}.
\end{aligned}
$$

而 $(b-x)^{\nu}$ 的右分数阶导数为：

$$
\begin{aligned}
{}_x D_b^{\mu}(b-x)^{\nu} &= (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\, {}_x D_b^{\mu-n}(b-x)^{\nu} \\
&= (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} \frac{\Gamma(\nu+1)(b-x)^{\nu+n-\mu}}{\Gamma(\nu+n-\mu+1)} \\
&= \frac{\Gamma(\nu+1)(b-x)^{\nu-\mu}}{\Gamma(\nu-\mu+1)}.
\end{aligned}
$$

（3）复合运算及逆算子.

命题 1.4 右 Riemann-Liouville 分数阶积分算子是可以互换的，即

$$
{}_x D_b^{-\mu}\, {}_x D_b^{-\nu} u(x) = {}_x D_b^{-\mu-\nu} u(x), \forall \mu,\nu > 0. \tag{1.12}
$$

证明 应用（1.9），并交换积分次序，可得：

$$
\begin{aligned}
{}_x D_b^{-\mu}\, {}_x D_b^{-\nu} u(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_x^b (\tau-x)^{\mu-1} \int_\tau^b (s-\tau)^{\nu-1} u(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\tau \\
&= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_x^b u(s) \int_x^s (\tau-x)^{\mu-1}(s-\tau)^{\nu-1}\,\mathrm{d}\tau\,\mathrm{d}s.
\end{aligned}
$$

对内部积分可作变量替换：$\xi = \dfrac{\tau-x}{s-x}$，因此，

$$
\begin{aligned}
{}_x D_b^{-\mu}\, {}_x D_b^{-\nu} u(x) &= \frac{1}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_x^b (s-x)^{\mu+\nu-1} u(s) \int_0^1 \xi^{\mu-1}(1-\xi)^{\nu-1}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{B(\mu,\nu)}{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)} \int_x^b (s-x)^{\mu+\nu-1} u(s)\,\mathrm{d}s \\
&= {}_x D_b^{-\mu-\nu} u(x).
\end{aligned}
$$

命题 1.4 证明完毕.

命题 1.4 是右分数阶积分算子的半群性质，即右分数阶积分算子的集合

关于阶（正数）形成强连续半群. 如下关于右分数阶微分算子的两个性质类似于微积分基本定理的第一和第二部分.

命题 1.5 次数为 μ 的右 Riemann-Liouville 分数阶导数算子是次数为 μ 的右 Riemann-Liouville 分数阶积分算子的逆算子，即

$$ {}_x\mathrm{D}_b^{\mu}\,{}_x\mathrm{D}_b^{-\mu}u(x) = u(x), \forall \mu > 0. \tag{1.13}$$

证明 由右 Riemann-Liouville 分数阶导数的定义，可得：

$$\begin{aligned} {}_x\mathrm{D}_b^{\mu}\,{}_x\mathrm{D}_b^{-\mu}u(x) &= (-D)^n\,{}_x\mathrm{D}_b^{\mu-n}\,{}_x\mathrm{D}_b^{-\mu}u(x) \\ &= (-D)^n\,{}_x\mathrm{D}_b^{-n}u(x) \\ &= u(x). \end{aligned}$$

命题 1.5 证毕.

命题 1.6 令 $\mu > 0$，则有如下右 Riemann-Liouville 分数阶导数算子与右 Riemann-Liouville 分数阶积分算子的复合公式：

$$ {}_x\mathrm{D}_b^{-\mu}\,{}_x\mathrm{D}_b^{\mu}u(x) = u(x) - \sum_{j=1}^{n}[{}_x\mathrm{D}_b^{\mu-j}u(x)]_{x=b}\frac{(b-x)^{\mu-j}}{\Gamma(\mu-j+1)}, (n-1 \leqslant \mu < n). \tag{1.14}$$

证明 可将（1.14）的左边写为

$$ {}_x\mathrm{D}_b^{-\mu}(-D)^n\,{}_x\mathrm{D}_b^{\mu-n}u(x).$$

交换算子 $(-D)^n$ 和 ${}_x\mathrm{D}_b^{\mu-n}$ 的位置，并重复应用 Leibniz 公式，可得：

$$ (-\mathrm{D})^n\,{}_x\mathrm{D}_b^{-\mu}\omega(x) = {}_x\mathrm{D}_b^{-\mu}(-D)^n\omega(x) + \sum_{j=1}^{n}(-1)^{n-j}\omega^{(n-j)}(b)\frac{(b-x)^{\mu-j}}{\Gamma(\mu-j+1)}. \tag{1.15}$$

这样，将 $\omega(x) = {}_x\mathrm{D}_b^{\mu-n}u(x)$ 代入（1.15）可得（1.14）. 命题 1.6 证明完毕.

1.2.2.3 左、右 Riemann-Liouville 分数阶积分算子

（1）左、右 Riemann-Liouville 分数阶积分算子互为自伴算子.

命题 1.7 左、右 Riemann-Liouville 分数阶积分算子在 $L^2(a,b)$ 的内积意义下互为自伴算子，即

$$ ({}_a\mathrm{D}_x^{-\mu}\omega, v)_{L^2(a,b)} = (\omega, {}_x\mathrm{D}_b^{-\mu}v)_{L^2(a,b)}, \forall \mu > 0. \tag{1.16}$$

证明 展开（1.16）的左边，并交换积分顺序，可得