彭林 / 主编

奇才教育
TALENTS EDUCATION

JUNIOR MIDDLE SCHOOL MATHEMATICS

图解 名校初中数学压轴题

JUNIOR MIDDLE SCHOOL MATHEMATICS

代数

- 直观图解法——把解题思路形象化、直观化，一看就会解！
- 精选压轴题——精挑细选全国各地初中名校经典压轴题！
- 13大项52个小专项，代数压轴难题一网打尽！
- 解题利器在手，数学满分无忧！

上海社会科学院出版社

彭林 / 主编

奇才教育
TALENTS EDUCATION

图解 名校初中数学压轴题

JUNIOR MIDDLE SCHOOL MATHEMATICS

代数

编者◎刘　杰　童纪元　贾海燕　顾春霞
李世魁　张春花　黄　洋　郭春利

上海社会科学院出版社

图书在版编目(CIP)数据

图解名校初中数学压轴题. 代数 / 彭林编著. —— 上海：上海社会科学院出版社，2015

ISBN 978-7-5520-0774-9

Ⅰ. ①图…　Ⅱ. ①彭…　Ⅲ. ①代数课—初中—题解　Ⅳ. ①G634.605

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 014880 号

图解名校初中数学压轴题(代数)

主　　编：彭　林
责任编辑：李　慧
封面设计：郁心蓝
出版发行：上海社会科学院出版社
上海淮海中路 622 弄 7 号　电话 63875741　邮编 200020
http://www.sassp.org.cn　E-mail:sassp@sass.org.cn
照　　排：上海碧悦制版有限公司
印　　刷：上海新文印刷厂
开　　本：787×1092 毫米　1/16 开
印　　张：17
字　　数：420 千字
版　　次：2015 年 3 月第 1 版　2015 年 3 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-5520-0774-9/G · 391　定价：36.00 元

思维导图使解数学压轴题不再难

20 世纪 60 年代被誉为“世界大脑先生”的东尼·博赞率先根据大脑自然思维倾向发明了思维导图，极大地改善了人们的思维习惯与学习效果.

人类的大脑分为左脑和右脑.左脑被称为“学术脑”“抽象脑”；右脑被称为“艺术脑”“创造脑”.思维导图的精髓是促进人类大脑的左脑和右脑的合理应用，促进大脑的潜能开发，将大脑的思维过程进行可视化的展示，提高自己的思维水平，改变自己的思维方式和思考模式，让自己用一个开放的头脑接受新鲜的事物，让自己的学习、生活更轻松.

目前，在国外教育领域，哈佛大学、剑桥大学的学生都在使用思维导图这项思维工具学习；在新加坡，思维导图已经基本成了中小学生的必修课，用思维导图提升智力、能力，提高思维水平已被越来越多的人认可.

《图解名校初中数学压轴题》是北京市“思维导图在初中数学教学中应用”课题组的研究成果之一.研究表明，在平时的数学学习中，学生更多的是利用“学术脑”进行枯燥、抽象的学习，而实际上，如果能够左脑和右脑共用，充分发挥曲线、图像与枯燥的数据、公式和性质之间的关联，那么学生的数学学习将会“更上一层楼”！

思维导图是一种灵活多变的思维表现形式，它不仅包含丰富的信息量，而且可以长久记忆，因此，在分析和解决数学压轴题时，思维导图能让学生的思路非常清晰.当学生拿到一道题后，一般有两种思路：一是从结论入手，看结论想需知，逐步向已知靠拢；二是要“发展”已知，从已知想可知，逐步推向未知.当两者相遇时，便得到解题的思路.本书以思维导图的形式，将初中阶段出现的各种类型的数学压轴题的解题思路直观形象地展现在学生面前，帮助学生厘清解题思路，将抽象问题具体化，通过渐进有序的训练，逐步形成解决问题的能力及良好的思维品质.

为了达到上述要求，本书精心挑选了典型例题，配以思维导图做详细分析解答；“触类旁通”则要求习题与典型例题之间的匹配一致，重在解题方法的消化与吸收.

《图解名校初中数学压轴题》曾在北京市西城区、东城区、海淀区部分学校进行试验，取得了良好的效果，希望这次出版能帮助更多的学生顺利解决数学压轴题，稳步地、愉快地、更加自信地走进数学世界.

数学之美是人们在数学思维活动中的一种体验和感受.希望使用本书的同学们通过“学数学、做数学、用数学”的活动来体验、探索数学之美吧！

彭林

目录

第7章 整式乘法与因式分解

第8章 分式

第9章 二次根式

第10章 一次函数

第11章 一元二次方程

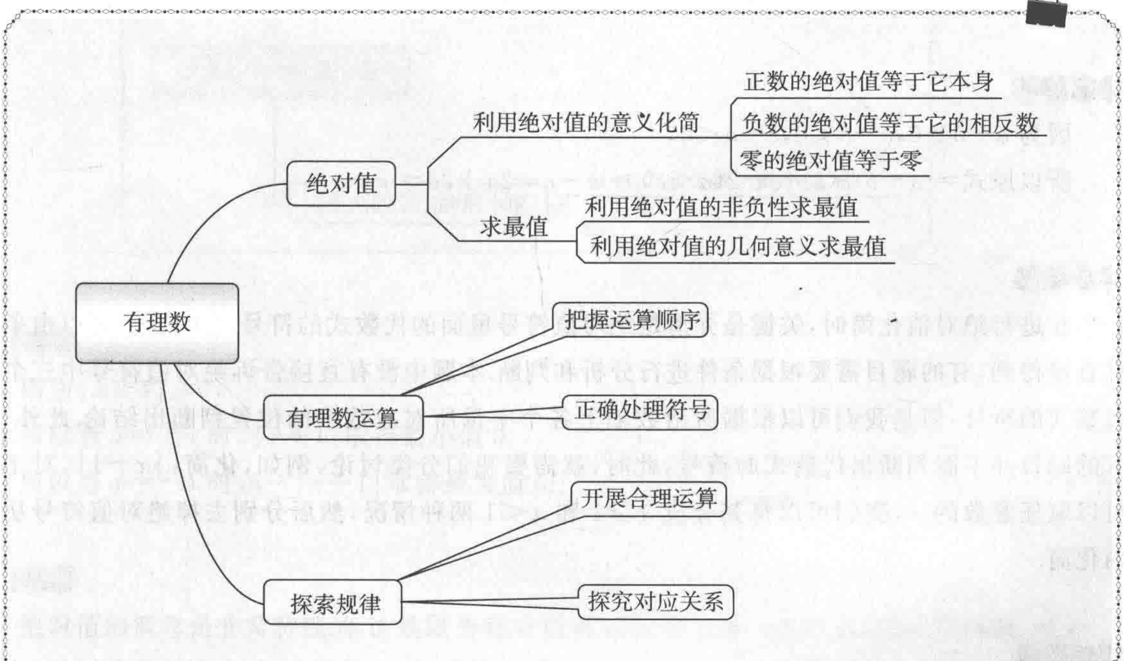
第12章 二次函数

第13章 反比例函数

参考答案

第1章
有理数

图解解题方法



图解典型难题

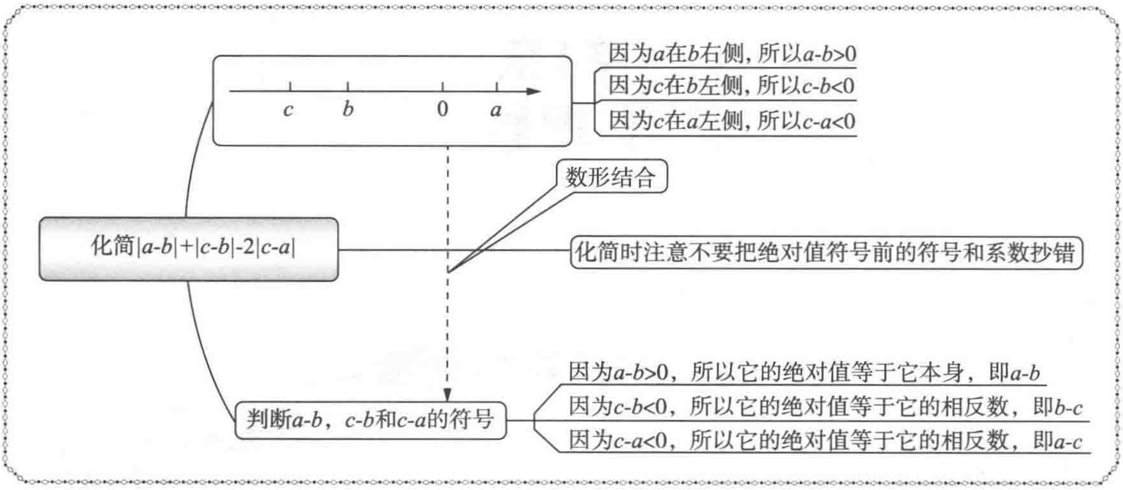
1.1 利用绝对值的意义化简

例 已知有理数 a、b、c 在数轴上的位置如图 1-1-1 所示.

化简：$|a-b|+|c-b|-2|c-a|$.

图 1-1-1

图解思路



规范解答

因为 $a-b>0, c-b<0, c-a<0$，

所以原式 $= a-b+b-c-2(a-c)=a-c-2a+2c=c-a$.

解后反思

在进行绝对值化简时，关键是弄清楚绝对值符号里面的代数式的符号.有的题目可以由条件直接得到，有的题目需要根据条件进行分析和判断.本题中没有直接告诉绝对值符号中三个代数式的符号，但是我们可以根据所给数轴上各个字母所对应数字的位置判断出结论.此外，有的题目并不能判断出代数式的符号，此时，就需要我们分类讨论，例如，化简：$|x-1|$，对于可以取任意数的 x，我们可以将其分成 $x\geqslant 1$ 和 $x<1$ 两种情况，然后分别去掉绝对值符号从而化简.

触类旁通

1. 已知有理数 a、b 在数轴上的位置如图 1-1-2 所示，化简：$|-a|+|b+1|-|a|-|b|$.

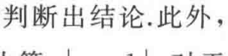


图 1-1-2

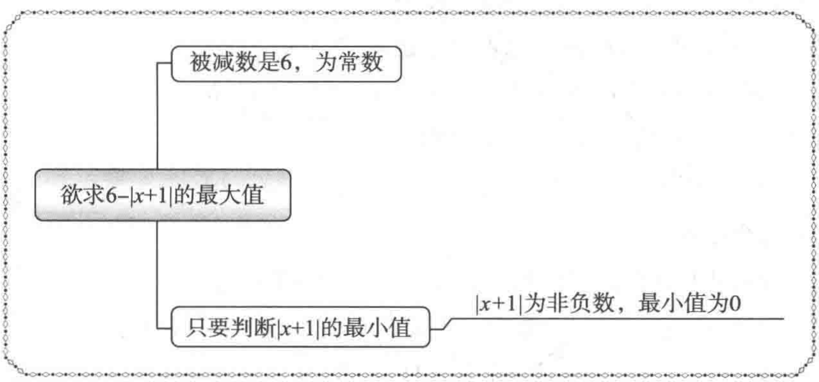
2. 有理数 a、b、c 均不为 0，且 $a+b+c=0$，设 $x=\left|\dfrac{|a|}{b+c}+\dfrac{|b|}{a+c}+\dfrac{|c|}{a+b}\right|$，试求代数式 $x^{19}+99x+2010$ 的值.

3. 化简：$|x+5|+|2x-3|$.

1.2 利用绝对值的非负性求最值

例 当 $x=$______时，$6-|x+1|$ 取得最大值，最大值为______.

图解思路



规范解答

因为 $|x+1|\geqslant 0$,

所以当 $x=-1$ 时，$|x+1|$ 取得最小值 0.

所以当 $x=-1$ 时，$6-|x+1|$ 取得最大值 6.

解后反思

绝对值的概念是非常特殊的.这是因为绝对值表示数轴上的一段距离，因此任何数、任何式子的绝对值都是非负的.也就是说，如果没有其他条件限制，$|a|$ 的最小值为 0，当且仅当 $a=0$.事实上，利用绝对值的非负性还可以处理其他的问题，比如：若 $|x+3|+(y-1)^2=0$，求 $y-x$ 的值.

触类旁通

1. 当 $x=$______时，$|2x-1|$ 取得最小值，最小值为______.
2. 当 $x=$______时，$-|2x-1|-3$ 取得最大值，最大值为______.

1.3 利用绝对值的几何意义求最值

例 (1)阅读下面材料：点 A、B 在数轴上分别表示有理数 a、b，A、B 两点之间的距离表示为 $|AB|$.

当 A、B 两点中有一点在原点时，不妨设点 A 在原点，

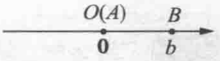


图 1-3-1

如图 1-3-1，$|AB|=|OB|=|b|=|a-b|$.

当 A、B 两点都不在原点时，

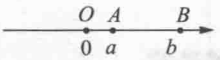


图 1-3-2

①如图 1-3-2，点 A、B 都在原点的右边，

$|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=b-a=|a-b|$；

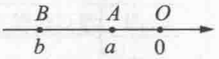


图 1-3-3

②如图 1-3-3，点 A、B 都在原点的左边，

$|AB|=|OB|-|OA|=|b|-|a|=-b-(-a)=|a-b|$；

③如图 1-3-4，点 A、B 在原点的两边，

$|AB|=|OB|+|OA|=|a|+|b|=a+(-b)=|a-b|$.

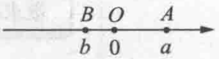


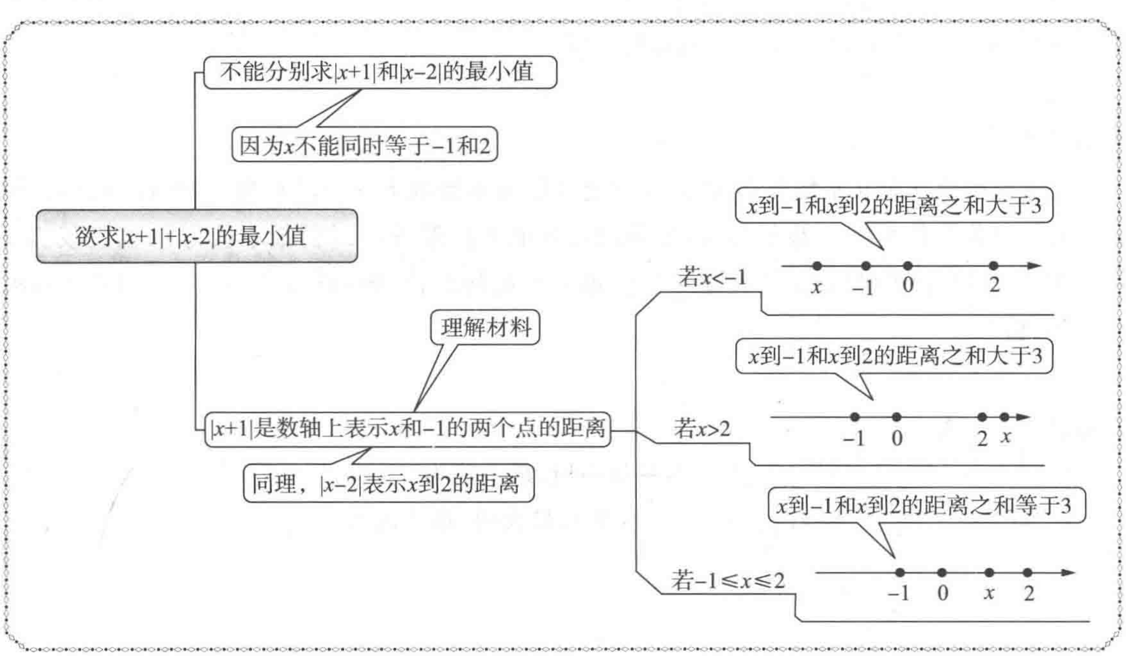
图 1-3-4

(2)回答下列问题：

①数轴上表示 2 和 5 两点之间的距离是________，数轴上表示 -2 和 -5 两点之间的距离是________，数轴上表示 1 和 -3 两点之间的距离是________.

②当代数式 $|x+1|+|x-2|$ 取最小值时，相应的 x 的范围是________，此时代数式 $|x+1|+|x-2|$ 的值是________.

图解思路



规范解答

(2)①3,3,4

②当$-1\leqslant x\leqslant 2$时,$|x+1|+|x-2|$有最小值,为3.

解后反思

明白这个道理,就可以处理数轴上两个点之间距离的很多问题了.比如,像本题第(2)①问,求数轴上两个点之间的距离.还可以利用一个数和距离,求出另一个数.更为重要也是稍显困难的是,对数轴上表示x的点,要有分类意识.本题中已经存在表示-1和2的两个点了,因此,要把表示x的点不重不漏地分成三类.推而广之,如果已经存在三个点,那么就需要把情况分成四种了.

触类旁通

1. 定义:数轴上表示数a和数b的两点A和B之间的距离是$|a-b|$.完成下列问题:

(1)数轴上表示x和-4的两点A和B之间的距离是________,如果$|AB|=2$,那么x为________.

(2)利用数轴以及上述定义,可得式子$|x-1|+|x-2|+|x-3|$的最小值是________.

(3)利用数轴以及上述定义,可得式子$|x-1|+|x-2|+|x-3|+|x+1|$的最小值是________.

(4)拓展:当$x=$________时,式子$|x-1|+|x-2|+|x-3|+\cdots+|x-2014|+|x-2015|$的值最小,最小值是________.

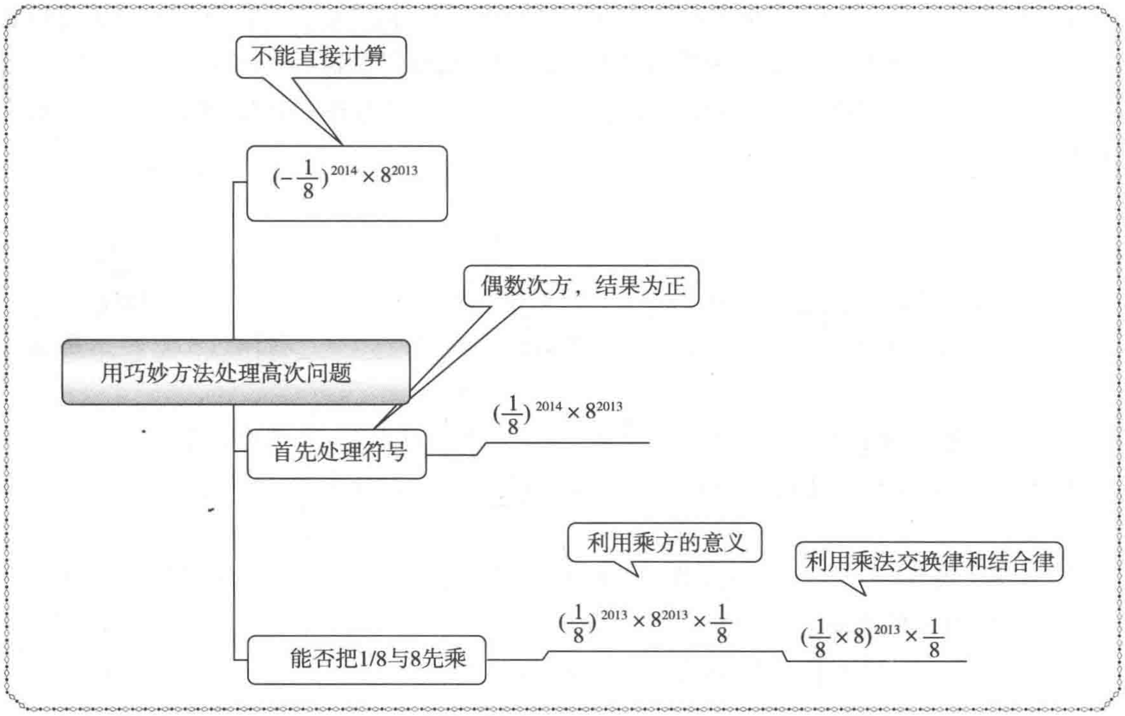
2. 若$x\leqslant 1$,求$|x-1|-|x+3|$的最大值和最小值.

3. 已知$0\leqslant a\leqslant 4$,求$|a-2|+|3-a|$的最大值.

1.4 有理数运算

例 计算：$(-\frac{1}{8})^{2014}\times 8^{2013}$.

图解思路



规范解答

$$(-\frac{1}{8})^{2014}\times 8^{2013}=(\frac{1}{8})^{2014}\times 8^{2013}=(\frac{1}{8})^{2013}\times 8^{2013}\times\frac{1}{8}=(\frac{1}{8}\times 8)^{2013}\times\frac{1}{8}=1\times\frac{1}{8}=\frac{1}{8}.$$

解后反思

对于有理数的运算，不管是加减法、乘除法还是乘方，首先要关注符号、确定符号.这是初一有理数运算与小学运算的主要区别.其次，对于高次运算，大多数需要简便方法.所以，运算之前先观察，确定好运算顺序和方法，充分考虑交换律、结合律、分配律等运算律的可行性.这样，对看似困难的问题也会迎刃而解.

触类旁通

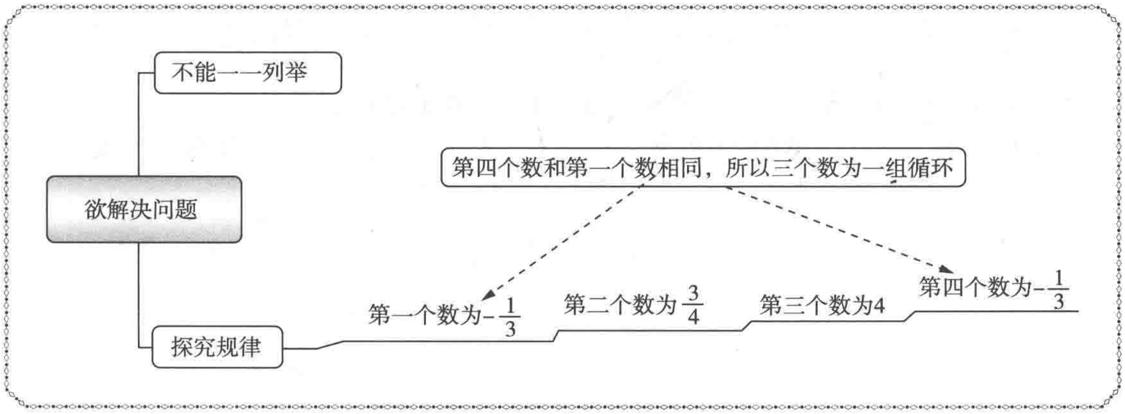
1. 计算：$4^{100}\times(-0.25)^{101}$.

2. 计算：$-2\times(-2)^{9}\times(\frac{1}{2})^{10}$.

1.5 探索规律

例 定义：a 是不为 1 的有理数，我们把 $\frac{1}{1-a}$ 称为 a 的差倒数，如：2 的差倒数是 $\frac{1}{1-2}=-1$，-1 的差倒数是 $\frac{1}{1-(-1)}=\frac{1}{2}$. 已知 $a_1=-\frac{1}{3}$，a_2 是 a_1 的差倒数，a_3 是 a_2 的差倒数，a_4 是 a_3 的差倒数，依此类推，则 $a_{2014}=$________.

图解思路



规范解答

由 $a_1=-\frac{1}{3}$ 利用差倒数计算可得：$a_2=\frac{3}{4}$，$a_3=4$，$a_4=-\frac{1}{3}$.

所以，三个数为一个循环. 而 $2014\div3$，商 671 余 1，

所以，第 2014 个数和第 1 个数相同，为 $-\frac{1}{3}$.

解后反思

对于类似上述探索规律的问题，首先要根据要求耐心进行计算. 只要计算正确，一定会发现循环的情况. 接下来，只要我们做一个除法，看一看商几余几，判断出是第几个循环当中的第几个数即可.

触类旁通

1. 下面两个多位数 1248624…、6248624…，都是按照如下方法得到的：将第 1 位数字乘以 2，若积为一位数，将其写在第 2 位上，若积为两位数，则将其个位数字写在第 2 位；对第 2 位数字再进行如上操作得到第 3 位数字，后面的每一位数字都是由前一位数字进行如上操作得到的．当第 1 位数字是 3 时，仍按如上操作得到一个多位数，则这个多位数前 100 位的所有数字之和是（　　）．

A. 495　　B. 497　　C. 501　　D. 503

2. 下面是按一定规律排列的一列数：

第 1 个数：$\frac{1}{2}-\left(1+\frac{-1}{2}\right)$；

第 2 个数：$\frac{1}{3}-\left(1+\frac{-1}{2}\right)\left(1+\frac{(-1)^2}{3}\right)\left(1+\frac{(-1)^3}{4}\right)$；

第 3 个数：$\frac{1}{4}-\left(1+\frac{-1}{2}\right)\left(1+\frac{(-1)^2}{3}\right)\left(1+\frac{(-1)^3}{4}\right)\left(1+\frac{(-1)^4}{5}\right)\left(1+\frac{(-1)^5}{6}\right)$；

……

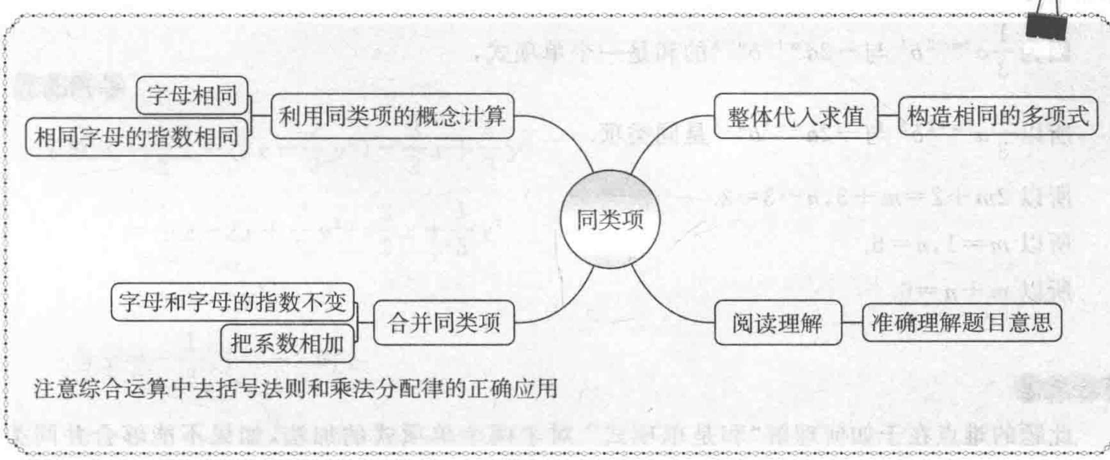
第 n 个数：$\frac{1}{n+1}-\left(1+\frac{-1}{2}\right)\left(1+\frac{(-1)^2}{3}\right)\left(1+\frac{(-1)^3}{4}\right)\cdots\left(1+\frac{(-1)^{2n-1}}{2n}\right)$．

那么，在第 10 个数、第 11 个数、第 12 个数、第 13 个数中，最大的数是（　　）．

A.第 10 个数　　B.第 11 个数　　C.第 12 个数　　D.第 13 个数

第2章 整式加减

图解解题方法

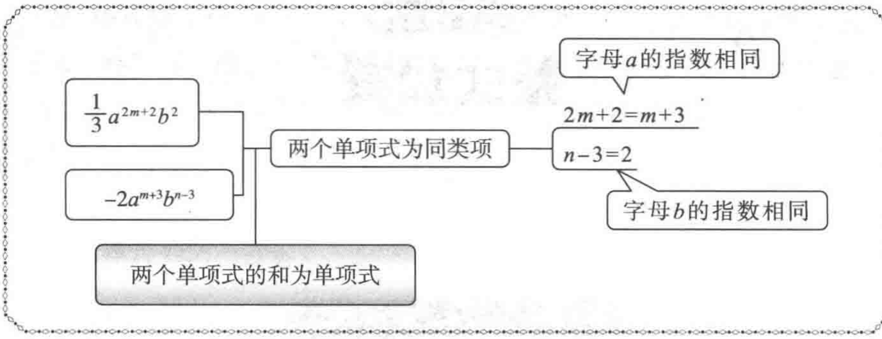


图解典型难题

2.1 利用同类项的概念计算

例 若单项式$\frac{1}{3}a^{2m+2}b^{2}$与$-2a^{m+3}b^{n-3}$的和是一个单项式，则$m+n=$________.

图解思路



规范解答

因为$\frac{1}{3}a^{2m+2}b^2$ 与$-2a^{m+3}b^{n-3}$的和是一个单项式，

所以$\frac{1}{3}a^{2m+2}b^2$ 与$-2a^{m+3}b^{n-3}$是同类项.

所以 $2m+2=m+3$，$n-3=2$.

所以 $m=1$，$n=5$.

所以 $m+n=6$.

解后反思

此题的难点在于如何理解“和是单项式”.对于两个单项式的加法，如果不能够合并同类项，必定成为一个多项式.理解好这个难点之后，余下的内容只需要利用同类项的意义分别计算即可.需要注意的是，两个多项式是同类项的条件之一是所含字母相同，条件之二是相同字母的指数也要相同，是否为同类项与单项式的系数无关.

触类旁通

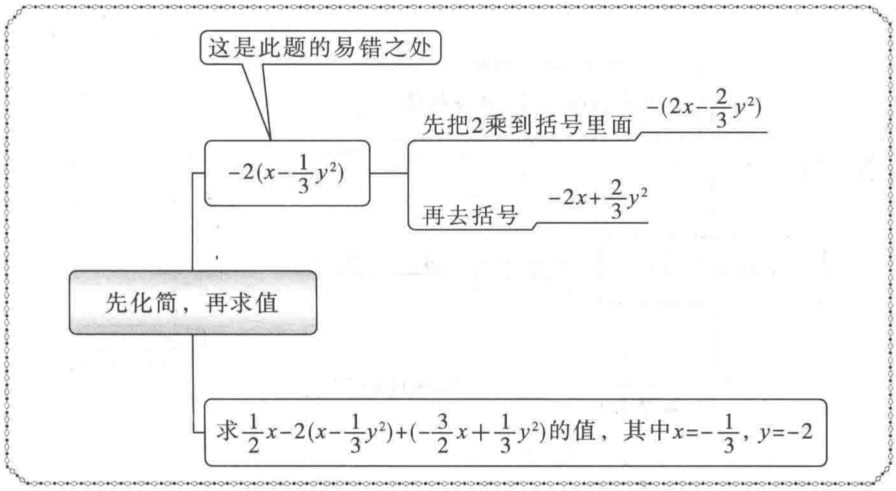
1. 若单项式$\frac{1}{3}a^2b^{2|n|-4}$与$-5a^{|m|}b^2$ 是同类项，则 $m=$________，$n=$________.

2. 若单项式$-\frac{1}{2}a^{2n-1}b^4$ 与 $2a^{2m}b^{8m}$是同类项，则$(1+n)^{100}(1-m)^{102}=$________.

2.2 合并同类项

例 1 求$\frac{1}{2}x-2(x-\frac{1}{3}y^2)+(-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2)$的值，其中 $x=-\frac{1}{3}$，$y=-2$.

图解思路



规范解答

$$\begin{aligned}原式&=\frac{1}{2}x-(2x-\frac{2}{3}y^2)-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2\\&=\frac{1}{2}x-2x+\frac{2}{3}y^2-\frac{3}{2}x+\frac{1}{3}y^2\\&=-3x+y^2.\end{aligned}$$

当 $x=-\frac{1}{3}$，$y=-2$ 时，

原式 $=-3\times(-\frac{1}{3})+(-2)^2=1+4=5.$

解后反思

对于这样的化简求值问题，关键是化简.此题中的易错点是 $-2(x-\frac{1}{3}y^2)$，对于这样的计算，容易出现的问题：一是没有把系数 2 乘到多项式的每一项；二是括号前面是“－”，所以在去括号时要改变括号里的每项符号.此外，还需要注意的是，合并同类项的法则是：只把系数相加，字母和字母的指数不变.

例 2 如果 A、B 是两个多项式，其中 $B=4x^2-5x-6$，在求 $A+B$ 时，某位同学错误地将 $A+B$ 看成了 $A-B$，结果求出的答案是 $-7x^2+10x+12$.那么 $A+B$ 等于什么？当 $x=\frac{1}{2}$时，求 $A+B$ 的值.