“十二五”职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定
高职高专公共基础课规划教材

高等数学（上）

GAODENG SHUXUE

第2版

陶金瑞 ◎ 主编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十二五”职业教育国家规划教材
经全国职业教育教材审定委员会审定
高职高专公共基础课规划教材

高等数学

（上）

第2版

主　编　陶金瑞
副主编　胡跃强　许　栩
参　编　韩启汉　安雪梅　闫伟杰
　　　　邢晓儒　郭花蕾
主　审　郭军义　霍凤芹

机械工业出版社

本书是“十二五”职业教育国家规划教材，经全国职业教育教材审定委员会审定。本书分为上、下两册，上册内容包括函数的极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程和数学建模入门。

本书内容的编排及难易程度是依据高职高专的培养目标、高职学生的特点以及专业的不同需要，同时兼顾到专接本的需要。因此，本书既适用于高职高专院校的教学，又可作为参加“专接本”考试学生的用书。

为方便教学，本书配备电子课件等教学资源。凡选用本书作为教材的教师均可登录机械工业出版社教育服务网 www.cmpedu.com 免费下载。如有问题请致信 cmpgaozhi@sina.com，或致电 010-88379375 联系营销人员。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学. 上/陶金瑞主编. —2 版. —北京：机械工业出版社，2015.5

“十二五”职业教育国家规划教材　高职高专公共基础课规划教材

ISBN 978-7-111-49398-3

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①陶…　Ⅲ.①高等数学—高等职业教育—教材　Ⅳ.①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 033658 号

机械工业出版社(北京市百万庄大街 22 号　邮政编码 100037)

策划编辑：刘子峰　责任编辑：刘子峰

责任校对：佟瑞鑫　封面设计：张　静

责任印制：乔　宇

北京铭成印刷有限公司印刷

2015 年 6 月第 2 版第 1 次印刷

169mm×239mm · 14 印张 · 272 千字

0001—4000 册

标准书号：ISBN 978-7-111-49398-3

定价：25.00 元

凡购本书，如有缺页、倒页、脱页，由本社发行部调换

电话服务	网络服务
服务咨询热线：010-88379833	机 工 官 网：www.cmpbook.com
读者购书热线：010-88379649	机 工 官 博：weibo.com/cmp1952
	教育服务网：www.cmpedu.com
封面无防伪标均为盗版	金　书　网：www.golden-book.com

前　言

随着我国高职教育教学改革的不断深化，高职教育的培养目标日益明确。《教育部关于推进高等职业教育改革创新引领职业教育科学发展的若干意见》(教职成[2011]12号)明确指出：“高等职业教育必须准确把握定位和发展方向，自觉承担起服务经济发展方式转变和现代产业体系建设的时代责任，主动适应区域经济社会发展需要，培养数量充足、结构合理的高端技能型专门人才”。

“高等数学”课程在高职教育中起着举足轻重的作用。社会的发展和生源的变化，为课程改革提出了新的任务。我们编写组通过认真学习高职理论、准确把握高职教育的培养目标、深入了解高职学生的现状，进一步讨论、审视“高等数学”课程在高职教育中的定位和课程标准，以适应高职培养目标、提高教学质量为目的，对原书进行了修订。在保留原来课程体系的基础上，在教学内容及其组织、安排上，注重使学生理解重要的数学思想、掌握重要的数学方法及其在实际和相关专业中的用途、用法，目的在于培养学生知识的运用能力、勇于探索的精神和可持续发展的能力。修订后的教材具有以下特点：

1. 突出课程知识的实用性

以“课程知识有什么用，如何用”为主线选取、组织教学内容。

2. 遵循学生的思维节奏

以实例引入概念，直观、形象地阐述教学内容，真正做到因材施教。

3. 注重学生素质的提高

使学生在学习中吸取数学的精髓、领会数学精神，培养学生科学的思维方式、严谨的处世态度和勇于探索的精神，以达到终身受益的目的。

本书分为上、下两册。上册(第一章至第七章)内容包括函数的极

限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程和数学建模入门；下册(第八章至第十三章)内容包括多元函数微积分、无穷级数、拉普拉斯变换、线性代数、概率与数理统计、MATLAB 软件使用方法简介。一元函数微积分(第一章至第五章)为开设本课程的所有专业必学内容，其他内容可以根据专业不同选学。如机械类专业可选学多元函数微积分、概率与数理统计等；电气、信息类专业可选学常微分方程、无穷级数和线性代数等；经管类专业可选学多元函数微分学、线性代数、概率与数理统计等。有条件的院校可开设数学实验，以拓宽学生的视野，提高学生的学习效率和职业能力。另外，本书配有学习指导教材《高等数学导学》，方便学生自学及课外补充练习。

本书上册由陶金瑞任主编，胡跃强、许栩任副主编，参加编写的还有韩启汉、安雪梅、闫伟杰、邢晓儒、郭花蕾。南开大学数学院院长郭军义教授和河北机电职业技术学院基础部霍凤芹副教授审阅了全稿，并提出了改进意见；河北机电职业技术学院的相关领导对教材的修订工作给予了大力支持，在此一并表示衷心感谢！

由于编者水平有限，书中难免存在不当之处，恳请广大读者批评指正。

编　者

目　录

前言

第一章　函数的极限与连续 ………… 1

第一节　初等函数 ………… 1

第二节　函数的极限 ………… 8

第三节　极限运算　两个重要极限 ………… 15

第四节　无穷小与无穷大 ………… 22

第五节　函数的连续性 ………… 27

复习题一 ………… 34

第二章　导数与微分 ………… 38

第一节　导数的概念 ………… 38

第二节　求导法则和基本求导公式 ………… 47

第三节　函数的微分 ………… 55

第四节　隐函数的导数和由参数方程所确定函数的导数 ………… 62

第五节　高阶导数 ………… 66

复习题二 ………… 69

第三章　导数的应用 ………… 72

第一节　拉格朗日中值定理　洛必达法则 ………… 72

第二节　函数的单调性与极值 ………… 77

第三节　函数的最大值与最小值 ………… 83

第四节　曲线的凹凸性与拐点 ………… 87

第五节　函数的图像 ………… 91

*第六节　曲线的曲率 ………… 94

复习题三 ………… 99

第四章　不定积分 ………… 101

第一节　不定积分的概念　直接积分法 ………… 101

第二节　换元积分法 ………… 107

第三节　分部积分法 ………… 116

复习题四 ………… 119

第五章　定积分及其应用 ………… 121

第一节　定积分的概念 ………… 121

第二节　微积分基本公式 …… 129
第三节　定积分的换元法 …… 134
第四节　定积分的分部积分法 …… 138
第五节　无限区间上的广义积分 …… 141
第六节　定积分应用举例 …… 143
复习题五 …… 152
第六章　常微分方程 …… 155
第一节　基本概念 …… 155
第二节　可分离变量的微分方程 …… 157
第三节　一阶线性微分方程 …… 160
第四节　二阶常系数线性齐次微分方程 …… 164
第五节　二阶常系数线性非齐次微分方程 …… 168
复习题六 …… 172
第七章　数学建模入门 …… 174
第一节　数学模型的概念 …… 174
第二节　初等模型 …… 178
第三节　简单优化模型 …… 181
第四节　微分方程模型 …… 186
附录 …… 193
附录 A　初等数学常用公式 …… 193
附录 B　习题参考答案 …… 198
参考文献 …… 218

第一章　函数的极限与连续

学习目标：

1. 理解函数极限与连续的基本思想.
2. 掌握求函数极限的几种主要方法.

第一节　初 等 函 数

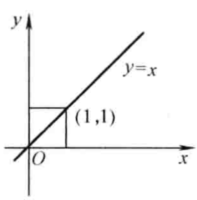
一、基本初等函数

在初等数学中，我们曾学过函数的几个重要性质，如奇偶性、单调性、有界性、周期性. 极限是对我们所学过的函数作进一步探讨，是对函数中变量变化趋势的研究，是函数性质的延伸，因此，我们先来复习一下函数的概念及性质.

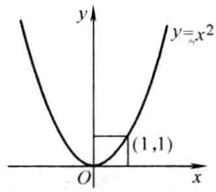
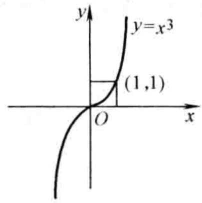
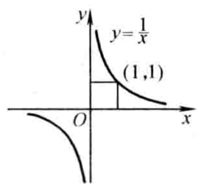
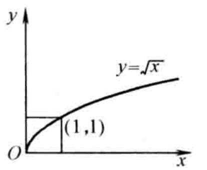
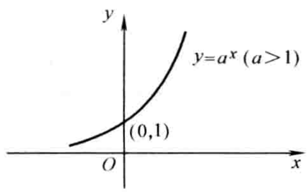
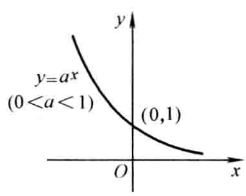
设 D 是一个非空实数集，如果对属于 D 中的每一个数 x，按照某个对应关系 f，都有唯一确定的实数 y 和它对应，则 y 就称为定义在数集 D 上的 x 的**函数**，记为 $y=f(x)$，x 称为**自变量**，数集 D 称为函数的**定义域**. 当 x 取遍 D 中的一切元素时，与它对应的函数值 y 的集合 M 称为函数的**值域**.

我们已学过的幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数这五类函数统称为基本初等函数. 为了便于应用，将它们的定义域、值域、图像和主要性质列于表 1-1.

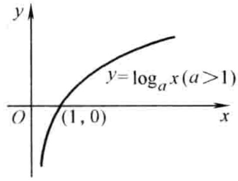
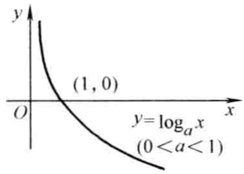
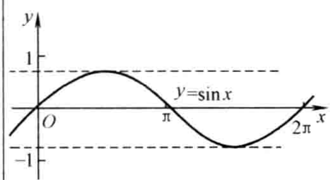
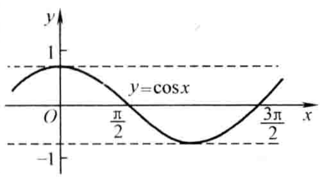
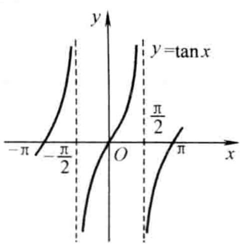
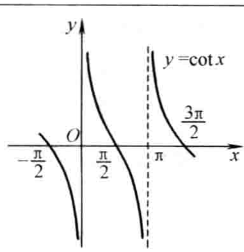
表　1-1

函数名称	函　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
幂函数	$y=x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加

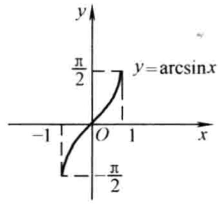
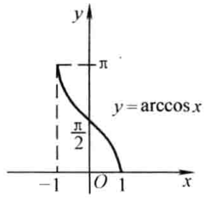
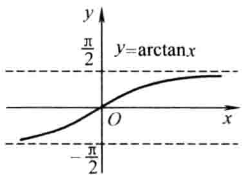
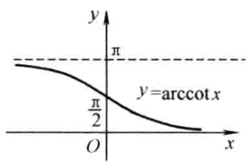
（续）

函数名称	函　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
幂函数	$y=x^2$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		偶函数 在$(-\infty,0)$内单调减少 在$(0,+\infty)$内单调增加
	$y=x^3$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数 单调增加
	$y=x^{-1}$	$x\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$		奇函数 在$(-\infty,0)$、$(0,+\infty)$ 内分别单调减少
	$y=x^{\frac{1}{2}}$	$x\in[0,+\infty)$ $y\in[0,+\infty)$		单调增加
指数函数	$y=a^x$ $(a>1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调增加
	$y=a^x$ $(0<a<1)$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,+\infty)$		单调减少

（续）

函数名称	函　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
对数函数	$y=\log_a x$ $(a>1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调增加
	$y=\log_a x$ $(0<a<1)$	$x\in(0,+\infty)$ $y\in(-\infty,+\infty)$		单调减少
三角函数	$y=\sin x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		奇函数，周期为2π，有界， 在$\left(2k\pi-\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加， 在$\left(2k\pi+\frac{\pi}{2},2k\pi+\frac{3\pi}{2}\right)$ 内单调减少
	$y=\cos x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in[-1,1]$		偶函数，周期为2π，有界， 在$(2k\pi,2k\pi+\pi)$ 内单调减少， 在$(2k\pi+\pi,2k\pi+2\pi)$ 内单调增加
	$y=\tan x$	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为π， 在$\left(k\pi-\frac{\pi}{2},k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$ 内单调增加
	$y=\cot x$	$x\neq k\pi\ (k\in\mathbf{Z})$ $y\in(-\infty,+\infty)$		奇函数，周期为π， 在$(k\pi,k\pi+\pi)$ 内单调减少

（续）

函数名称	函　数	定义域与值域	图　　像	特　　性
反三角函数	反正弦函数 $y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$ $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$		奇函数，单调增加，有界
	反余弦函数 $y=\arccos x$	$x\in[-1,1]$ $y\in[0,\pi]$		单调减少，有界
	反正切函数 $y=\arctan x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$		奇函数，单调增加，有界
	反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$	$x\in(-\infty,+\infty)$ $y\in(0,\pi)$		单调减少，有界

二、复合函数

在实际问题中，我们常常遇到由几个简单函数构成一个较复杂函数的问题.例如，设某企业的收入 R 是产量 q 的函数

$$R=f(q)=3q+7 \tag{1}$$

但企业的产量 q 又是投入成本 l 的函数

$$q=g(l)=l^3+15l-3 \tag{2}$$

将式(2)代入式(1)，得

$$R=f[g(l)]=3(l^3+15l-3)+7,$$

上式为收入 R 与投入成本 l 之间的关系，即收入 R 为投入成本 l 的函数. 下面我们就讨论这类函数.

定义 1 设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 函数值的全部或者部分在 $f(u)$ 的定义域内，此时称 y（通过 u）与 x 的函数关系 $y=f[\varphi(x)]$，是由 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$ 复合而成的函数，简称为**复合函数**，称 u 为**中间变量**.

例 1 试将下列各函数 y 表示成 x 的函数：

(1) $y=u^2$，$u=x^3-5x+2$；　　(2) $y=\mathrm{e}^u$，$u=2x+5$.

解 (1) $y=u^2=(x^3-5x+2)^2$，即 $y=(x^3-5x+2)^2$；

(2) $y=\mathrm{e}^u=\mathrm{e}^{2x+5}$，即 $y=\mathrm{e}^{2x+5}$.

例 2 指出下列函数的复合过程，并求其定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$；　　(2) $y=\ln(2x-5)$；

(3) $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$；　　(4) $y=\left(\dfrac{2x-3}{x^2-2x-3}\right)^2$.

解 (1) $y=\sqrt{x^2-5x+6}$ 是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2-5x+6$ 这两个函数复合而成的. 要使函数 $y=\sqrt{x^2-5x+6}$ 有意义，需使 $x^2-5x+6\geqslant 0$. 解此不等式，得 $x\geqslant 3$ 或 $x\leqslant 2$，所以函数 $y=\sqrt{x^2-5x+6}$ 的定义域为 $(-\infty,2]\cup[3,+\infty)$；

(2) $y=\ln(2x-5)$ 是由 $y=\ln u$，$u=2x-5$ 这两个函数复合而成的. 要使函数 $y=\ln(2x-5)$ 有意义，需使 $2x-5>0$. 解此不等式，得 $x>\dfrac{5}{2}$，所以函数 $y=\ln(2x-5)$ 的定义域为 $\left(\dfrac{5}{2},+\infty\right)$；

(3) $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$ 是由 $y=u^2$，$u=\arcsin v$，$v=\dfrac{1}{x}$ 这三个函数复合而成的. 要使函数 $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$ 有意义，需使 $\left|\dfrac{1}{x}\right|\leqslant 1$. 解此不等式，得 $x\leqslant -1$ 或者 $x\geqslant 1$，所以函数 $y=\left(\arcsin\dfrac{1}{x}\right)^2$ 的定义域为 $(-\infty,-1]\cup[1,+\infty)$；

(4) $y=\left(\dfrac{2x-3}{x^2-2x-3}\right)^2$ 是由 $y=u^2$，$u=\dfrac{2x-3}{x^2-2x-3}$ 这两个函数复合而成的. 要使函数 $y=\left(\dfrac{2x-3}{x^2-2x-3}\right)^2$ 有意义，需使 $x^2-2x-3\neq 0$，解得 $x\neq -1$，$x\neq 3$，因此函数 $y=\left(\dfrac{2x-3}{x^2-2x-3}\right)^2$ 的定义域为 $(-\infty,-1)\cup(-1,3)\cup(3,+\infty)$.

应当指出：

1) 并不是任何两个函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$ 都可以复合成一个函数，例如：

$y=\sqrt{u}$，$u=-x^2-1$ 就不能复合成一个复合函数，因为函数$u=-x^2-1$ 的值域与函数 $y=\sqrt{u}$的定义域没有交集，即函数 $u=-x^2-1$ 的所有值都不在函数 $y=\sqrt{u}$的定义域内.

2）由上述例题可以总结出分解复合函数的规律：前面几层都是基本初等函数，最后一层是基本初等函数或者是基本初等函数与常数的和、差、积、商的形式.

3）研究一个复合函数的复合过程时，要看每个层次的包含关系，各函数间是包含关系还是平行关系. 例如：$y=(2x+\sin^2 x)^3$，我们发现函数 $y=u^3$ 包含 $u=2x+\sin^2 x$；而函数 $2x$ 与$\sin^2 x$ 则没有包含关系，而是平行关系. 因此，从函数整体来看，此复合函数的复合过程只有两步，即 $y=u^3$，$u=2x+\sin^2 x$. 虽然 $\sin^2 x$ 仍是一个复合函数，此时也不再分解.

三、初等函数

定义 2 由基本初等函数和常数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的函数，称为**初等函数**. 初等函数能用一个式子表示.

例如，$y=\dfrac{(2\sin 2x+\tan^2 x)^3}{3x-\ln x}$，$y=\sqrt{x}+e^{2x}\cos 4x$，$y=2^x+\arctan 5x$ 等都是初等函数. 对于分段函数，则需认真考察. 一般地，分段函数若不能用一个式子表示，则该分段函数就不是初等函数.

例如，分段函数 $y=\begin{cases} x & x\geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$ 可表示为 $y=\sqrt{x^2}=|x|$，它是由 $y=\sqrt{u}$，$u=x^2$ 复合而成的，因此它是一个初等函数.

又如，分段函数 $y=\begin{cases} x+1 & x\geqslant 0 \\ -x^2 & x<0 \end{cases}$ 不能用一个式子表示出来，因此它不是初等函数.

初等函数是常见的函数，它是微积分研究的主要对象.

四、建立函数关系举例

运用数学工具解决实际问题时，往往需要先把变量之间的函数关系表示出来，才方便进行计算和分析.

例 3 某罐头厂要生产容积为 V(单位:cm^3)的圆柱形罐头盒，将它的表面积表示成底面半径的函数，并确定它的定义域.

解 设圆柱的底面半径为 r，高为 h，表面积为 S.

因为 $V=\pi r^2 h$，于是 $h=\dfrac{V}{\pi r^2}$，根据圆柱表面积公式为 $S=2\pi r^2+2\pi rh$，所以

有 $S=2\pi r^2+\dfrac{2V}{r}$，$r\in(0,+\infty)$.

例 4 如图 1-1 所示，电源的电压为 E，内阻为 r，负载电阻为 R，试建立输出功率 P 与负载电阻 R 的函数关系式.

解 设电路中的电流为 I，由电学可知 $P=I^2R$，根据闭合电路的欧姆定律有$I=\dfrac{E}{R+r}$，代入上式得 P 与 R 的函数关系为

$$P=\left(\frac{E}{R+r}\right)^2R \quad (R>0).$$

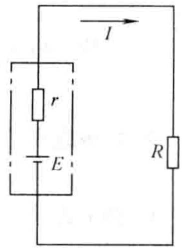


图 1-1

例 5 某运输公司规定一吨货物的运价为：在 a 公里内，每公里 k 元；超过 a 公里，每增加一公里为$\dfrac{4}{5}k$ 元. 试表示运价 y 和里程 s 之间的函数关系式.

解 当里程在 a 公里内($0\leqslant s\leqslant a$)时，运价 $y=ks$；当里程超过 a 公里($s>a$)，即超过的里程为($s-a$)公里时，此时运价为

$$y=ka+\frac{4}{5}k(s-a),$$

于是
$$y=\begin{cases} ks & 0\leqslant s\leqslant a \\ ka+\dfrac{4}{5}k(s-a) & s>a \end{cases}.$$

这里，y 与 s 的函数关系是用分段函数表示的，函数的定义域为$[0,+\infty)$.

建立实际问题的函数关系，首先应理解题意，分析问题中的常量、变量，选定自变量，根据问题所给的几何特性、物理规律或其他知识建立变量间的等量关系，整理化简得出函数式，然后根据题意，写出函数的定义域.

习题 1-1

1. 判断题：

(1) $y=\sin 2x$ 是基本初等函数； ( )

(2) $y=\sqrt[3]{x^2}$是基本初等函数； ( )

(3) $y=\arcsin u$，$u=1+2^x$ 的复合函数是 $y=\arcsin(1+2^x)$. ( )

2. 求下列函数的定义域：

(1) $y=\sqrt{x^2-3x+2}+\dfrac{1}{2x-1}$；　　(2) $y=\log_2(5x-1)+\sqrt{\dfrac{1}{x-3}}$；

(3) $y=\arccos 2x+3^{4x}$；　　(4) $y=\sqrt{\dfrac{3-x}{2+x}}$；

(5) $y=\begin{cases} -x^2 & x<0 \\ 0 & x=0. \\ 3x+5 & x>0 \end{cases}$

3. 判断函数的奇偶性：

（1）$y=2x^4-\cos 3x$；　　（2）$y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$；

（3）$y=5x^3+6x$；　　（4）$y=\sqrt{2x+5}$.

4. 已知$f(x)=\dfrac{x-1}{x+1}$，求$f(-x)$，$f\left(\dfrac{1}{x}\right)$，$f(a+1)$，$f(f(x))$.

5. 作函数$f(x)=\begin{cases}x^2-1 & x<0\\ 2 & x=0\\ x+1 & x>0\end{cases}$的图像，并求$f(-3)$，$f(0)$，$f(a^2+1)$，$f(f(-2))$.

6. 将y表示为x的函数：

（1）$y=\sin u$，$u=x^2+5$；　　（2）$y=\sqrt{u}$，$u=x+e^x$；

（3）$y=\log_2 u$，$u=v^3$，$v=\tan x+5$；　　（4）$y=\arccos u$，$u=\dfrac{1-2x}{1+3x}$.

7. 分析下列函数的复合过程：

（1）$y=(1+x^3)^5$；　　（2）$y=\tan\left(2x+\dfrac{\pi}{6}\right)$；

（3）$y=\dfrac{1}{(1+2x)^3}$；　　（4）$y=2^{2\sin x}$；

（5）$y=\dfrac{1}{\sqrt[3]{\ln(3x-2)}}$.

8. 拟建一个容积为V的长方体水池，如果底为正方形，且其单位面积的造价是四周单位面积造价的3倍，试将造价F表示成池底面边长x的函数，并确定其定义域.

9. 一物体做直线运动，已知阻力f的大小与运动速度v成正比，且方向相反，当物体以1m/s的速度运动时，阻力为1.96×10^{-2}N，建立阻力与速度之间的函数关系式.

10. 已知单三角脉冲电压，其波形如图1-2所示，建立电压u(单位:V)和时间t(单位:μs)之间的关系式.

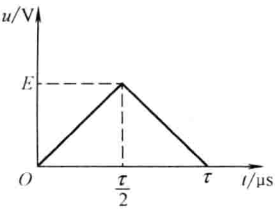


图　1-2

11. 某批发商店按照下列价格表成盒地批发销售某种盒装饮料：

当购货量小于或等于20盒时，每盒2.40元；当购货量小于或等于50盒时，其超过20盒的饮料每盒2.20元；当购货量小于或等于100盒时，其超过50盒的饮料每盒2.00元；当购货量大于100盒时，其超过100盒的饮料每盒1.80元. 设y是总价，x是销售量，试建立总价与销售量间的函数关系式，并作出它的图像.

第二节　函数的极限

在这一节，我们将从数列或函数的变化趋势来研究极限的概念，通过观察和总结，归纳出极限的描述性定义.

一、数列 $x_n=f(n)$ 的极限

考察下面几个数列，当 n 无限增大时，x_n 数值的变化趋势：

(1) $1,-\frac{1}{2},\frac{1}{3},-\frac{1}{4},\cdots,(-1)^{n-1}\frac{1}{n},\cdots$；

(2) $\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\cdots,\frac{n}{n+1},\cdots$；

(3) $1,-1,1,-1,\cdots,(-1)^{n-1},\cdots$；

(4) $1,2,4,8,16,\cdots,2^{n-1},\cdots$；

(5) $3,3,3,3,\cdots,3,\cdots$.

为清楚起见，我们把这五个数列的前4项分别在数轴上表示出来(如图1-3a、b、c、d、e所示).

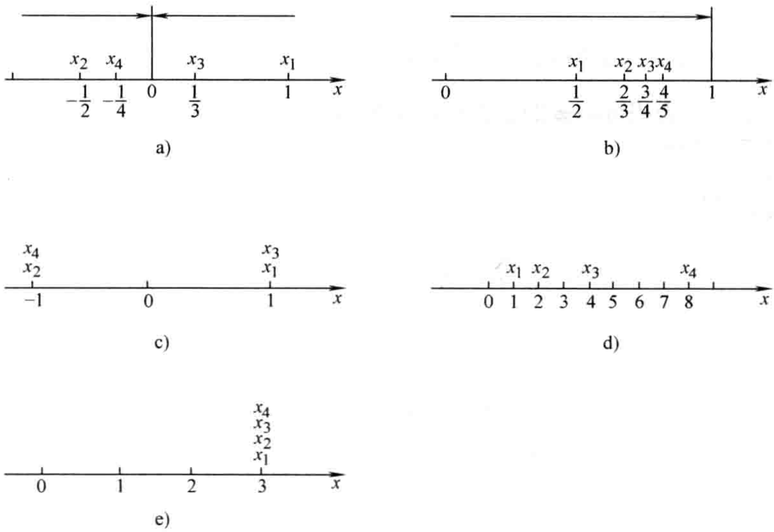


图 1-3

以上五个数列反映出的数列变化趋势大体分为两类：当 n 无限增大时，一类是 x_n 的数值无限接近于某一个常数，如图1-3a、b、e所示，当 n 无限增大时，数列 $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 无限地靠近点 $x=0$，数列 $x_n=\frac{n}{n+1}$ 无限靠近点 $x=1$，数列 $x_n=3$ 每一项都对应于点 $x=3$；另一类则不能与某个常数无限接近，如图1-3c、d所示，数列(3)当 n 无限增大时，其数值在 $x=1$ 与 $x=-1$ 来回跳动，数列(4)的数值则无限增大，它们都不能与某个常数无限接近. 对于前一类情形，我们给出如下定义.

定义1 如果当 n 无限增大(记为 $n\to\infty$)时，数列 x_n 无限接近(或恒等于)

一个确定的常数 A，则称 A 为数列 x_n 的**极限**，记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad 或 \quad x_n \to A \quad (当\ n\to\infty\ 时).$$

由定义 1 及图 1-3a、b、e 可知，$n\to\infty$ 时，数列 $x_n=(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$的极限为 0，$x_n=\frac{n}{n+1}$的极限为 1，$x_n=3$ 的极限为 3. 它们可分别记为

$$\lim_{n\to\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1,\ \lim_{n\to\infty}3=3.$$

如果 $n\to\infty$ 时，x_n 不能无限接近一个确定的常数 A，则称 x_n 的极限不存在. 例如，$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^{n-1}$不存在.

例 1 考察数列的变化趋势，写出它们的极限：

(1) $x_n=\frac{1}{2+n^2}$； (2) $x_n=1+\frac{1}{2^n}$； (3) $x_n=q^n(|q|<1)$；

(4) $x_n=C$ (C 为常数)； (5) $x_n=3^n-1$.

解 (1) 因为当 $n\to\infty$ 时，$2+n^2$ 无限增大，所以 $x_n=\frac{1}{2+n^2}$无限接近于 0，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2+n^2}=0$；

(2) 因为当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{2^n}$无限接近于 0，所以 $x_n=1+\frac{1}{2^n}$无限接近于 1，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2^n}\right)=1$；

(3) 因为当 $|q|<1$ 时，q^n 无限接近于 0，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$ ($|q|<1$)；

(4) 因为 $x_n=C$ 中所有的项都是常数 C，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}C=C$；

(5) 因为当 $n\to\infty$ 时，$x_n=3^n-1$ 无限增大，所以 $x_n=3^n-1$ 的极限不存在.

通过对数列当 $n\to\infty$ 时变化趋势的观察，我们可以给出如下结论：

$$\boxed{\begin{array}{ll}\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^a}=0 & (a>0)\\ \lim\limits_{n\to\infty}C=C & (C\ 为常数)\\ \lim\limits_{n\to\infty}q^n=0 & (|q|<1)\end{array}}$$

二、函数 $y=f(x)$ 的极限

上面讨论了数列的极限. 数列 $x_n=f(n)$，$n\in\mathbf{Z}^+$是函数 $y=f(x)$的特例. 由于 $y=f(x)$的定义域各式各样，因此其自变量 x 的变化也较复杂. 下面仅就自变