万学教育
UNIVERSAL EDUCATION GROUP

海文考研

2016
人大考研

2016

考研数学
强化必做660题

万学海文考试研究中心／编

何先枝　铁　军／主编

- 独家汇总主观题作答技巧，简捷高效全面实用
- 紧贴考纲摒弃“偏难怪”，凝集名师丰富经验
- 题目道道精选，细致合理且具有高度典型性
- 题解详尽规范，精准点拨解题关键及方法技巧

中国人民大学出版社

2016 考研数学

强化必做660题

万学海文考试研究中心　编

何先枝　铁　军　主编

中国人民大学出版社
· 北京 ·

图书在版编目(CIP)数据

考研数学强化必做660题/何先枝，铁军主编．—北京：中国人民大学出版社，2015.9

ISBN 978-7-300-21859-5

Ⅰ.①考… Ⅱ.①何… ②铁… Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－习题集 Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第198404号

考研数学强化必做660题

何先枝　铁军　主编

Kaoyan Shuxue Qianghua Bizuo 660 Ti

出版发行	中国人民大学出版社		
社　址	北京中关村大街31号	**邮政编码**	100080
电　话	010－62511242（总编室）		010－62511770（质管部）
	010－82501766（邮购部）		010－62514148（门市部）
	010－62515195（发行公司）		010－62515275（盗版举报）
网　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.1kao.com.cn(中国1考网)		
经　销	新华书店		
印　刷	北京七色印务有限公司		
规　格	185mm×260mm 16开本	**版　次**	2015年9月第1版
印　张	20.5	**印　次**	2015年9月第1次印刷
字　数	541 000	**定　价**	39.00元

万学海文图书编委会

前 言 Preface

全国硕士研究生入学统一考试的各类数学试题的题型一般设置为选择题、填空题和解答题，其中选择题和填空题属于客观题（评分不受评分者主观因素的影响），而解答题属于主观题，常包括计算题、证明题和应用题。近年来，在总分150分的数学试卷中，主观题占94分，可见，在考研数学中顺利攻克主观题，尽可能取得高分，对考研数学的成功，乃至考研的成功都至关重要。

数学学科的特点决定了考研数学考试必须考查考生应该掌握的数学知识与数学方法，考查考生运用知识与方法的能力以及分析问题与解决问题的能力。因此，既要在知识认知层次上对考生进行测试，也要在运用、分析、综合和评价层次上测试考生的实际能力，而这两者可以通过分别设置客观题和主观题来实现考查目的。

主观题要求考生写出解题过程，能够较为全面地反映考生学科智力水平，展示其分析数学问题、综合运用数学知识进行逻辑思维的过程，适合对发散、综合、评价、复杂运算、语言文字表达等高层次能力的考查。但主观题也有其自身的不足，如对考生作答水平要求高，对评分者水平要求高，评分误差相对较大，无法实现机器阅卷，阅卷效率低，等等。加之，在解答题中，某步出错，后继部分随之有误，最多只能得一半分数。因此，在运算过程中使用的概念、公式和法则要准确无误，语言文字表达要准确无误，最终才能保证运算结果的准确无误。

解答题往往存在一题多解，计算量相差悬殊的现象，同一道试题的不同解题思路和相应的计算量的大小均能反映考生的能力的不同层次。不同的解法体现不同的思维水平，熟练掌握各种解法可以增强解决问题的灵活性，增加临场解题的胜算。

考研数学对计算能力的考查是多角度、多层次的，尤其是先推理后计算，以推理简化计算等，既体现对推理能力考查的重视，也体现各种能力成分的有机结合，要求考生解题时力戒呆板和机械。

主观题内涵丰富，命题自由度大，可调节性强，考查功能弹性大，但其基本架构是：给出一定的题设（即已知条件），然后提出一定的要求（即要达到的目标）让考生解答。这里，“题设”和“要求”的模式五花八门，多种多样，考生解答时应把已知条件作为出发点，运用有关的数学知识和方法，进行推理、演绎或计算，最后达到所要求的目标。同时，要将整个解答过程的主要步骤和经过，富有条理、合乎逻辑和完整地陈述清楚。

从历年阅卷情况来看，很多考生由于不清楚主观题的命题和解题机理，导致解答出现谬误，失分严重。有鉴于此，我们特编著本书，旨在帮助广大考生在考研数学复习后期有针对性地进行主观题的强化练习，彻底掌握主观题作答的要点与技巧，迅速提高主观题作答的水平，确保主观题解答获得高分。全书遵循考研数学考试大纲规定的内容与要求，选题精准，全面实用，覆盖面广，贴近考试。版面设计编排方便实用，依次按高等数学（微积分）、线性代数和概率论与数理统计呈现主观题解题方法与

技巧概述、精编习题和习题答案与解析，并针对数学1、2、3各自的考试内容与要求，给出适当的标记。

特别提示 本书适合数学1、数学2、数学3及数农考生使用，对于数学1～3分别适用的题目，书中以上标“①”“②”“③”表示，数农考生可参考数学3的适用范围。书中收入了适量真题，对真题，在题号后以“年份卷种”的形式表示，如高等数学第26题选自2009年数学2与数学3真题，表示为“26.(2009②③)”。本书中涉及的数学符号力求与教育部考试中心发布的最新考试大纲及使用最广泛的高校教材保持一致，便于读者识别。

我们坚信：只要考生认真演练，必能极大提高分析与解决数学主观题的能力，确保主观题的顺利解答，为在数学考试中取得优异成绩奠定牢固基础。

由于编者水平有限，加之时间仓促，书中可能存在一些不足甚至错误，欢迎考生和同行批评指正。最后，祝广大考生通过勤学苦练，考研数学取得优异成绩！

编　者

2015.7.18

目 录 Contents

主观题解题方法与技巧概述

精编习题

习题答案与解析

主观题解题方法与技巧概述

(一)高等数学

在考研数学中,主观题常以解答题形式出现,一般分为计算题、应用题和证明题. 近年来,数学1、2、3的各类试卷中,设置9道大题为主观题,分值多达94分. 因而,解答好主观题,尽可能取得高分,是考研数学成功的关键.

那么,如何解答好主观题呢?下面就高等数学(微积分)谈谈主观题作答的一些值得注意的问题.

第一,要了解主观题的命题与解题的机理.

命题与解题是攻与守两个方面,两者思维常是互逆的. 命题时常将一些条件通过用某些载体来进行包装,设置一些陷阱和钉子,通过综合多个知识点与多种方法来调节题目的难度;解题时则要打开包装,看清本质,绕过陷阱,拔掉钉子,善于综合运用知识点与方法解决问题.

第二,要熟悉主观题解答程序.

主观题解答一般程序是:观察题目的条件和结论,从中充分获取信息,在所建立的知识体系中检索反应,筛选解题方法,组织与表达解题过程.

第三,要掌握和运用通法通则.

考研数学不是竞赛数学,其大多数题目都是考查考试大纲界定的基础知识,因而,大多还是采用常规方法解答,即很多思维属于所谓的定式思维. 特别是面对要解决的题目,要能通过观察与分析,准确定位其解题所用的知识点与方法.

第四,要有条理合逻辑表述解答过程.

主观题的解答过程一定要有条有理,详略得当,书写整洁,便于阅卷老师看出得分点,合理使用诸如“显然”、“易得”、“同理”等词,合理规避失分风险.

第五,要掌握一些解题技巧,尽量多记忆一些重要结论,考试时直接运用可以加快解题进程,赢得宝贵时间.

下面,通过例题来感受与体会考研数学中主观题的一些常用的解题思路和解题技巧.

1. 认真观察条件与结论,从中充分获取信息

考研数学中,解题所用的条件常用各种形式的载体(例如,极限、抽象函数方程等)来包装,不同的表达形式隐含信息的深浅程度、丰富程度也不尽相同. 因此,如何打开包装,充分获取信息,在所建立的知识体系中检索反应相关的知识点,筛选解题方法,进而成功解题显得尤为重要.

【例1】 已知 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续,且 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$,试问 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处是否取得极值. 如果取得极值,则判定是极大值还是极小值.

【分析】 从已知条件中获取有关极值的必要条件和充分条件等信息.

【解】 由 $f(x)$ 在点 $x=a$ 处连续可知:$\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$;

由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$ 可得

(1) $f'(x)$ 在点 $x=a$ 的某去心邻域内存在；

(2) $\lim\limits_{x\to a}f'(x)=0$；

(3) 极限保号性：$\dfrac{f'(x)}{x-a}<0(x\in \mathring{U}(a,\delta))$，即 $f'(x)\begin{cases}>0, & x\in(a-\delta,a),\\ <0, & x\in(a,a+\delta).\end{cases}$

于是，由一阶导数极值判别法可知：$f(a)$ 为 $f(x)$ 的极大值.

实际上，继续深挖还可以得到：$f'(a)=0,f''(a)=-1$.

从而，由二阶导数极值判别法也可得到：$f(a)$ 为 $f(x)$ 的极大值.

评 注

考研数学中常有以极限为条件的考题，这时就要注意运用极限的相关法则、性质来获取它所传达的信息.

例如，由 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=A,\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ 可得 $\lim\limits_{x\to a}f(x)=0$；

由 $f(x)$ 连续，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$ 可得 $f(0)=0,f'(0)=1$，等等.

【例 2】 设 $f(x)$ 是周期为 2 的周期函数，在点 $x=1$ 处连续，且满足 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln[f(x)+3]}{\cos\frac{\pi}{2}x}=2$，求曲线 $y=f(x)$ 在点 $x=-1$ 处的切线方程.

【分析】 关键是从条件中获取切点和斜率的信息.

【解】 由 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\ln[f(x)+3]}{\cos\frac{\pi}{2}x}=2$ 可得

(1) $\lim\limits_{x\to 1}\ln[f(x)+3]=0$，进而由连续性可得 $\lim\limits_{x\to 1}\ln[f(x)+3]=\ln[f(1)+3]=0,f(1)=-2$；由周期性可得 $f(-1)=f[(-1)+2]=f(1)=-2$，故切点为 $(-1,-2)$.

(2) 由等价无穷小、极限四则运算法则、洛必达法则和导数定义可得

$$\lim_{x\to 1}\frac{\ln[f(x)+3]}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)+2}{\cos\frac{\pi}{2}x}=\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{\cos\frac{\pi}{2}x}$$

$$=f'(1)\cdot\lim_{x\to 1}\frac{1}{-\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi}{2}x}=-\frac{2}{\pi}f'(1)=2,$$

即 $f'(1)=-\pi$. 从而，$f'(-1)=f'(1)=-\pi$，故斜率为 $-\pi$.

因此，所求切线方程为 $y+2=-\pi(x+1)$.

【例 3】 设 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义，且对任意的 x、y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，求 $\int_{-a}^{a}f(x)(1+\cos x)\mathrm{d}x$.

【分析】 从积分区间是对称区间 $[-a,a]$，自然想到需考察被积函数的奇偶性；而"对任意的 x、y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$"可给出 $f(x)$ 为奇函数.

【解】 因为对任意的 x、y 恒有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$，所以，取 $x=y=0$ 可得 $f(0)=0$. 取 $y=-x$ 可得 $f(-x)=-f(x)$. 从而，$f(x)$ 为奇函数，故 $\int_{-a}^{a}f(x)(1+\cos x)\mathrm{d}x=0$.

2. 利用各种简化手段尽量简化解答过程

在考研数学中，适时运用诸如对称性、几何意义、截面法计算三重积分、积分线面方程代入线面积分被积式等简化手段，多记忆一些重要公式与结论，都可以快捷计算或简化解答过程.

【例 4】 已知 $f(x)=\sqrt{1-x^2}\cdot\left[1+\int_{-1}^{1}f(x)\mathrm{d}x\right]+\sin x$，求 $f(x)$.

【分析】 认识到定积分是数，通过再积分获得关于该数的方程.

【解】 设$\int_{-1}^{1} f(x)\mathrm{d}x = A$，则 $f(x) = (A+1)\sqrt{1-x^2} + \sin x$.

再在$[-1,1]$上积分可得 $A = (A+1)\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x + \int_{-1}^{1} \sin x\mathrm{d}x$.

由定积分几何意义可得$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$，由奇函数积分性质可得$\int_{-1}^{1} \sin x\mathrm{d}x = 0$.

因此，$A = (1+A)\frac{\pi}{2}$，解得 $A = \frac{\pi}{2-\pi}$. 于是，$f(x) = \frac{2}{2-\pi}\sqrt{1-x^2} + \sin x$.

评 注

1. 类似问题也可能以重积分、线面积分等形式出现.

2. 命题时通过某些改变就能考查不同的知识点，调整难度.

例如，改成求$\int_{-1}^{1} xf(x)\mathrm{d}x$，就综合考查换元积分法与分部积分法.

【例 5】 设 $L: x^2 + y^2 = 1$，求$\oint_L (x^2 + y + 1)\mathrm{d}s$.

【分析】 1. 积分曲线关于坐标轴对称，关于 x,y 也具有轮换对称性；

2. 计算曲线积分，可以利用将积分曲线方程代入被积式得到简化.

【解】 由对称性可得$\oint_L y\mathrm{d}s = 0$， $\oint_L x^2\mathrm{d}s = \oint_L y^2\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s$，

故
$$\oint_L (x^2 + y + 1)\mathrm{d}s = \frac{1}{2}\oint_L (x^2+y^2)\mathrm{d}s + \oint_L y\mathrm{d}s + \oint_L \mathrm{d}s = \frac{3}{2}\cdot 2\pi = 3\pi.$$

评 注

重积分、曲面积分情形类似.

3. 善于转化问题，学会从不同角度看问题，寻找解题突破口

很多考研数学题都是解题口径宽，解题方法多，考生需要学会从不同角度看问题，找到解决问题的可行方法和最佳方法.

【例 6】 求极限$\lim\limits_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x-a}+\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$.

【分析】 观察可知：视为商，不能直接运用极限四则运算的商法则；视为三项代数和，也不能直接运用极限四则运算的加减法则；但视为两项和$\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}}$，则可顺利运用极限四则运算法则解决问题.

【解】
$$\text{原式} = \lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x-a}}{\sqrt{x^2-a^2}} + \lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{\sqrt{x^2-a^2}} = \lim_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{x+a}} + \lim_{x\to a^+}\frac{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x^2-a^2}}$$
$$= \lim_{x\to a^+}\frac{1}{\sqrt{x+a}} + \lim_{x\to a^+}\frac{\sqrt{x-a}}{(\sqrt{x}+\sqrt{a})\sqrt{x+a}} = \frac{1}{\sqrt{2a}}.$$

【例 7】 设 $2y + \sin y - x = 0$，求 y'.

【分析】 1. 若站在一元隐函数角度，则可对 x 求导，再利用四则运算求导法则与复合函数求导法则解出 y'；若站在二元函数角度，则可以利用偏导数按公式求得 y'.

2. 若视 y 为 x 的函数，则无法显化；若视 x 为 y 的函数，则容易显化. 因而，可利用反函数求导法.

3. 此外，从求导数或求微分角度都能入手并解决问题.

【解】 方法 1(一元函数) 视 $y = y(x)$，方程两边对 x 求导 $2y' + \cos y\cdot y' - 1 = 0$，解得
$$y' = \frac{1}{2+\cos y}.$$

方法 2(反函数角度)　因为 $x=2y+\sin y,\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=2+\cos y$，所以，由反函数求导法则可得

$$y'=\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}}=\frac{1}{2+\cos y}.$$

方法 3(二元函数)　设 $F(x,y)=2y+\sin y-x$，则 $F_x=-1,F_y=2+\cos y$，故由公式可得

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{1}{2+\cos y}.$$

方法 4(全微分)　微分所给方程可得 $2\mathrm{d}y+\cos y\mathrm{d}y-\mathrm{d}x=0$，解得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{1}{2+\cos y}$.

【例 8】　计算 $I=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$.

【分析】　站在一元函数积分角度，无法计算出积分；但站在二元函数重积分角度，借助极坐标却很容易计算出积分.

【解】　考虑反常二重积分

$$I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y=\lim_{t\to+\infty}\iint_{D_t}\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(D_t=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant t^2,t>0\})$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^t r\mathrm{e}^{-r^2}\mathrm{d}r=\lim_{t\to+\infty}\frac{\pi}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\mathrm{e}^{-r^2}\Big|_0^t=\frac{\pi}{4}\lim_{t\to+\infty}(1-\mathrm{e}^{-t^2})=\frac{\pi}{4},$$

故 $I=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. 泰勒公式的运用要点与技巧

一般地，下列情形可考虑运用泰勒公式：

(1) 题设出现函数的高阶导数；

(2) 题中出现 $\mathrm{e}^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x),(1+x)^\alpha$ 等函数.

涉及函数局部性质(如极限、连续、可导、极值、无穷小比较、极值、拐点、渐近线等)，用带有佩亚诺余项的泰勒公式. 涉及函数全局性质(如证明函数等式、不等式等)，用带有拉格朗日余项的泰勒公式.

【例 9】　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)}{x\sin x\tan x}$；　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{3}{2}}(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}-2\sqrt{x})$.

【分析】 1. 分子中 $\mathrm{e}^x,\sin x$ 可考虑泰勒公式，分母中 $\sin x,\tan x$ 可考虑等价无穷小.

2. 换元 $x=\dfrac{1}{t}$ 化为 $t\to0$ 的极限，再用泰勒公式.

【解】 (1) 当 $x\to0$ 时，$x\sin x\tan x\sim x^3$.

将分子展成三阶麦克劳林公式：

$$\mathrm{e}^x\sin x-x(1+x)=\left[1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]\cdot\left[x-\frac{x^3}{6}+o(x^3)\right]-x(1+x)$$

$$=\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

故原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)}{x^3}=\dfrac{1}{3}$.

(2) 先换元 $x=\dfrac{1}{t}$，再利用泰勒公式可得

$$原式=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{\dfrac{1}{t}+1}+\sqrt{\dfrac{1}{t}-1}-\dfrac{2}{\sqrt{t}}}{t^{\frac{3}{2}}}=\lim_{t\to0+}\frac{\sqrt{1+t}+\sqrt{1-t}-2}{t^2}$$

$$=\lim_{t\to 0^+}\frac{\left[1+\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^2+o(t^2)\right]+\left[1-\frac{1}{2}t+\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)}{2!}t^2+o(t^2)\right]-2}{t^2}=-\frac{1}{4}.$$

【例 10】 设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处存在二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{xf(x)-\ln(1+x)}{x^3}=1$，求 $f(0),f'(0),f''(0)$.

【分析】 极限的反问题. 出现 $\ln(1+x)$，想到用泰勒公式.

【解】 将 $f(x)$、$\ln(1+x)$ 分别展成带有佩亚诺余项的二阶、三阶麦克劳林公式：

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2),\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+o(x^3),$$

则 $xf(x)-\ln(1+x)=x\left[f(0)+f'(0)x+\dfrac{f''(0)}{2}x^2+o(x^2)\right]-\left[x-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}+o(x^3)\right]$

$$=[f(0)-1]x+\left[f'(0)+\frac{1}{2}\right]x^2+\left[\frac{f''(0)}{2}-\frac{1}{3}\right]x^3+o(x^3),$$

由已知极限可得 $\qquad f(0)-1=0,\quad f'(0)+\dfrac{1}{2}=0,\quad \dfrac{f''(0)}{2}-\dfrac{1}{3}=1,$

故 $f(0)=1,\quad f'(0)=-\dfrac{1}{2},\quad f''(0)=\dfrac{8}{3}.$

评 注

本题也可利用极限四则运算法则与洛必达法则来求解，但较为烦琐.

5. 二重积分计算一般思路与常用技巧

数学 2、数学 3 一般每年都考二重积分计算.

二重积分计算的一般思路：画域 → 选系 → 定序 → 定限 → 计算.

利用二重积分对称性、几何意义等简化计算，利用分割积分区域（或增减区域）兼顾被积函数与积分区域、直角坐标与极坐标等的便利.

二重积分的对称性可分为：

(1) 几何对称：当 D 关于 x 对称时，

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\begin{cases}0, & f(x,-y)=-f(x,y),\\ 2\iint_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y, & f(x,-y)=f(x,y)\end{cases}\quad ((x,y)\in D),$$

其中 D_1 是 D 位于 x 轴一侧的部分区域.

注：D 关于 y 对称情形可类似处理.

(2) 轮换对称：当互换 x,y 时，D 变为 D'，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D'}f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

特别地，若 $D'=D$，则 $\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D f(y,x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\dfrac{1}{2}\iint[f(x,y)+f(y,x)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

注：对三重积分、第一类曲线积分和第一类曲面积分也有类似情形.

【例 11】 计算 $I=\iint_D(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由 $y=2,x=2,x+y=0$ 及 $x^2+y^2=1$ 所围成的不含原点的部分区域.

【分析】 从积分区域和被积函数特点来看，关键在于如何兼顾直角坐标与极坐标计算的便利性.

【解】 增加区域 $D_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x+y,x^2+y^2\leqslant 1\}$，记三角形区域 $\widetilde{D}=D\cup D_1$，如图 1-1-1.
由二重积分性质、极坐标和直角坐标计算可得

$$I=\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_{D_1}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\int_{-2}^{2}\mathrm{d}x\int_{-x}^{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}y-\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^3\mathrm{d}r$$
$$=\int_{-2}^{2}\left(2x^2+\frac{4}{3}x^3+\frac{8}{3}\right)\mathrm{d}x-\frac{\pi}{4}$$
$$=2\left(\frac{2}{3}x^3+\frac{8}{3}x\right)\Big|_0^2-\frac{\pi}{4}=\frac{64}{3}-\frac{\pi}{4}.$$

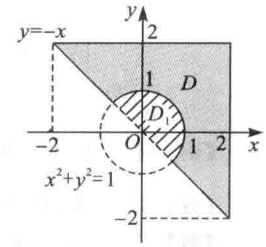

图 1-1-1

评注

依据被积函数和积分区域的特点，选择直角坐标或极坐标来化二重积分为二次积分，显然有三种情形：被积函数和积分区域两者一致导向直角坐标；两者一致导向极坐标；两者之一导向直角坐标，而另一个则导向极坐标. 最后的情形需要通过技术的处理，化解纠结，顺利解题.

【例 12】 设 f 是连续函数，D 是由 $y=x^3, x=-1, y=1$ 所围成的闭区域，计算

$$I=\iint_D x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

【分析】 1. 画出积分区域 D，发现它关于坐标轴并不具有对称性，但用 $y=-x^3$ 分割 D 为两部分，则它们分别具有某种对称性；

2. 被积函数也可根据需要进行分项，利用二重积分对称性简化.

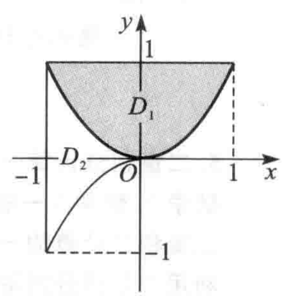

图 1-1-2

【解】 积分区域 D 可以分成 D_1, D_2 两部分(如图 1-1-2 所示)，

因为 D_1 关于 y 轴对称，且 $x[1+yf(x^2+y^2)]$ 关于 x 为奇函数，

所以 $\iint_{D_1} x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$

因为 D_2 关于 x 轴对称，且 x 关于 y 为偶函数，而 $xyf(x^2+y^2)$ 关于 y 为奇函数，

所以 $\iint_{D_2} x[1+yf(x^2+y^2)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{D_2} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} xyf(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=2\iint_{D_{21}} x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+0=2\int_{-1}^{0}x\mathrm{d}x\int_{x^3}^{0}\mathrm{d}y=-\frac{2}{5}.$$

6. 善于运用全微分解决多元函数微分法问题

在解决多元函数微分法问题时，常可直接求偏导数，也可直接求全微分，但问题越复杂越应该考虑运用全微分.

【例 13】 设 $y=f(x,t)$，而 t 是由方程 $F(x,y,t)=0$ 所确定的 x,y 的函数，求导数 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

【解】 由微分所给的函数和方程可得 $\mathrm{d}y=f_x'\mathrm{d}x+f_t'\mathrm{d}t$，　$F_x'\mathrm{d}x+F_y'\mathrm{d}y+F_t'\mathrm{d}t=0$.

上述两式联立消去 $\mathrm{d}t$ 可得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{f_x'\cdot F_t'-f_t'\cdot F_x'}{f_t'\cdot F_y'+F_t'}$.

【例 14】 设 $z=f(u)$，$u=f(x,y)$ 是由 $u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\mathrm{d}t$ 确定，求 $P(y)\frac{\partial z}{\partial x}+P(x)\frac{\partial z}{\partial y}$，其中 f,φ 可微，$\varphi'\neq 1$，P 连续.

【解】 直接全微分 $z=f(u)$，$u=\varphi(u)+\int_y^x P(t)\mathrm{d}t$ 可得 $\begin{cases}\mathrm{d}z=f'(u)\mathrm{d}u,\\ \mathrm{d}u=\varphi'(u)\mathrm{d}u+P(x)\mathrm{d}x-P(y)\mathrm{d}y.\end{cases}$

消去 $\mathrm{d}u$ 可得
$$\mathrm{d}z=f'\cdot\frac{P(x)\mathrm{d}x-P(y)\mathrm{d}y}{1-\varphi'}.$$

于是
$$P(y)\frac{\partial z}{\partial x}+P(x)\frac{\partial z}{\partial y}=\mathrm{d}z\Big|_{\mathrm{d}x=P(y),\mathrm{d}y=P(x)}=0.$$

7. 分部积分法运用的技巧

换元积分法与分部积分法是考研数学必考的积分法，常综合考查，且题目一般具有相当的计算量.

考生除了熟悉和掌握何时应用分部积分法，如何选择 u、$\mathrm{d}v$ 等问题外，还得积累一些有关分部积分法的技巧.

【例 15】 已知 $f'(x)=\arctan(x-1)^2$，$f(0)=0$，计算 $\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$.

【解】 由分部积分法与换元积分法可得

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x&=\int_0^1 f(x)\mathrm{d}(x-1)=[(x-1)f(x)]\Big|_0^1-\int_0^1(x-1)f'(x)\mathrm{d}x\\&=\int_0^1(1-x)\arctan(x-1)^2\mathrm{d}x\\&\xlongequal{u=(1-x)^2}\frac{1}{2}\int_0^1\arctan u\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\left[(u\arctan u)\Big|_0^1-\int_0^1\frac{u}{1+u^2}\mathrm{d}u\right]\\&=\frac{1}{2}\left[\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\ln(1+u^2)\Big|_0^1\right]=\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\ln 2.\end{aligned}$$

评 注

数学 2、数学 3 常考不定积分或定积分的计算题，一般综合性强，计算量大.

【例 16】 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有二阶连续导数，$f(a)=f(b)=0$，$M=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f''(x)|\}$.

证明：$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{(b-a)^3}{12}M$.

【分析】 不等式的证明常常是先找到一个等式，再经适当放缩得到不等式.

【证明】 由分部积分法可得

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x&\xlongequal{\text{技巧}}\int_a^b f(x)\mathrm{d}\left(x-\frac{a+b}{2}\right)=\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f(x)\Big|_a^b-\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\\&=-\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)f'(x)\mathrm{d}x\xlongequal{\text{技巧}}-\int_a^b f'(x)\mathrm{d}\left[\frac{(x-a)(x-b)}{2}\right]\\&=-\frac{(x-a)(x-b)}{2}f'(x)\Big|_a^b+\int_a^b\frac{(x-a)(x-b)}{2}f''(x)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由定积分保序性可得

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right|&=\left|\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant-\frac{1}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)|f''(x)|\mathrm{d}x\\&\leqslant-\frac{M}{2}\int_a^b(x-a)(x-b)\mathrm{d}x=-\frac{M}{2}\cdot\left[-\frac{(b-a)^3}{6}\right]=\frac{M}{12}(b-a)^3.\end{aligned}$$

8. 函数方程求解技巧

由函数所满足的等式求函数的问题称为函数方程求解. 微分方程、积分方程都是函数方程. 考研数学中，非微分方程的函数方程求解都是经过求导化为微分方程来求解.

【例 17】 已知 $f(x)$ 为连续函数，且满足积分方程 $f(x)=\sin x-\int_0^x(x-t)f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$.

【分析】 积分方程可经求导转化为微分方程，注意获取积分方程可能隐含的初始条件.

【解】 分离可得 $f(x)=\sin x-x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t$，$f(0)=0$.

对 x 求导可得 $f'(x)=\cos x-\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，$f'(0)=1$.

再对 x 求导可得 $f''(x)=-\sin x-f(x)$.

解二阶线性常系数微分方程初始值问题 $\begin{cases} f''(x)+f(x)=-\sin x, \\ f(0)=0, f'(0)=1, \end{cases}$

可得
$$f(x)=\frac{1}{2}(\sin x+x\cos x).$$

9. 含参量积分的处理技巧

$F(x)=\int_{a(x)}^{b(x)} f(x,t)\mathrm{d}t$ **称为含参量积分.**

求 $F'(x)$ 时，一般不能直接套用变限积分函数的导数公式，而需要利用诸如分离、换元、可加性等方法处理，再按相应的求导法则或变限积分求导公式计算.

【例 18】 设 $f(x)$ 为连续函数，求下列函数指定的导数：

(1) $F(x)=\int_0^x (x^2-t^2)f(t)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；

(2) $F(x)=\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t$，求 $F'(x)$；

(3) $F(x)=\int_a^b |x-t|f(t)\mathrm{d}t$，求 $F''(x)$.

【解】 (1) 因为
$$F(x)=x^2\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-\int_0^x t^2 f(t)\mathrm{d}t,$$
所以，$F'(x)=2x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

(2) 设 $u=x^2-t^2$，则 $F(x)=-\frac{1}{2}\int_{x^2}^0 f(u)\mathrm{d}u=\frac{1}{2}\int_0^{x^2} f(u)\mathrm{d}u$，

故
$$F'(x)=\frac{1}{2}\cdot f(x^2)\cdot 2x=xf(x^2).$$

(3) 因为对任意 $x\in[a,b]$，由定积分可加性可得
$$\begin{aligned} F(x)&=\int_a^x |x-t|f(t)\mathrm{d}t+\int_x^b |x-t|f(t)\mathrm{d}t=\int_a^x (x-t)f(t)\mathrm{d}t+\int_x^b (t-x)f(t)\mathrm{d}t \\ &=x\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_a^x tf(t)\mathrm{d}t+\int_x^b tf(t)\mathrm{d}t-x\int_x^b f(t)\mathrm{d}t, \end{aligned}$$
所以，$F'(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+xf(x)-xf(x)-xf(x)-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t+xf(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t-\int_x^b f(t)\mathrm{d}t$，

则
$$F''(x)=f(x)+f(x)=2f(x).$$

10. 中值等式的常见证明方法与技巧

证明中值等式是考研数学的重要题型，其解题关键常在于构造辅助函数，寻找辅助区间，运用相关定理. 构造辅助函数的主要方法有：直接法，积分法，变限函数法，常数变异法等等.

【例 19】 已知函数在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

(1) 存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)=1-\xi$；

(2) 存在两个不同的 $\eta_1,\eta_2\in(0,1)$，使 $f'(\eta_1)\cdot f'(\eta_2)=1$.

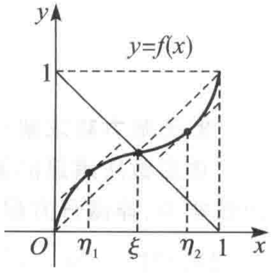

图 1-1-3

【分析】 1. 按条件画草图，利用几何直观获得启发与解题思路. 从几何上看：连接 $(0,0)$，$(1,1)$ 点的连续曲线 $y=f(x)$ 必与连接 $(0,1)$，$(1,0)$ 点的直线 $y=1-x$ 在区间 $(0,1)$ 上有交点 $(\xi,f(\xi))$（如图 1-1-3 所示）.

2. $f(x)$ 分别在$[0,\xi]$、$[\xi,1]$上应用拉格朗日中值定理.

【证明】 (1) 作辅助函数 $F(x)=f(x)-(1-x)$，则 $F(x)$ 在$[0,1]$上连续，且 $F(0)=-1<0, F(1)=1>0$，故由连续函数零点定理可得存在 $\xi\in(0,1)$，使 $F(\xi)=0$，即 $f(\xi)=1-\xi$. ①

(2) 函数 $f(x)$ 分别在$[0,\xi]$、$[\xi,1]$上应用拉格朗日中值定理可得

$$f'(\eta_1)=\frac{f(\xi)-f(0)}{\xi}=\frac{f(\xi)}{\xi}, \tag{②}$$

$$f'(\eta_2)=\frac{f(1)-f(\xi)}{1-\xi}=\frac{1-f(\xi)}{1-\xi}, \tag{③}$$

其中 $0<\eta_1<\xi<\eta_2<1$.

于是，由式①、②、③可得 $f'(\eta_1)f'(\eta_2)=\dfrac{f(\xi)}{\xi}\cdot\dfrac{f(\xi)-1}{\xi-1}=\dfrac{1-\xi}{\xi}\cdot\dfrac{-\xi}{\xi-1}=1$.

【例 20】 设函数 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，$f(1)=0$，证明：存在点 $\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)=0$.

【分析】 由条件可得 $f(0)=f'(0)=0$，利用泰勒公式.

【证明】 因为 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上具有二阶导数，且 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，所以

$$f(0)=\lim_{x\to0}f(x)=0,\quad f'(0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x)}{x}=0.$$

于是，将 $f(1)$ 在 $x=0$ 处展成拉格朗日型余项的一阶麦克劳林公式可得存在点 $\xi\in(0,1)$，使得 $0=f(1)=f(0)+f'(0)\cdot(1-0)+\dfrac{f''(\xi)}{2!}(1-0)^2$，即 $f''(\xi)=0$.

11. 函数不等式证明的方法与技巧

证明函数不等式是考研数学的重要题型，一般思路：等价转化所给不等式，充分简化，构造辅助函数，将证明不等式问题转化为研究辅助函数的某种性质、常用方法有：单调性法，最值法，凹凸性法，泰勒公式法，等等.

【例 21】 证明：$\sin\dfrac{x}{2}>\dfrac{x}{\pi}\ (0<x<\pi)$.

【证明】 **方法 1**(凹凸性法)

设 $f(x)=\sin\dfrac{x}{2}-\dfrac{x}{\pi}$，则 $f'(x)=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{x}{2}-\dfrac{1}{\pi}$，$f''(x)=-\dfrac{1}{4}\sin\dfrac{x}{2}$.

因为 $f''(x)<0\ (0<x<\pi)$，且 $f(0)=f(\pi)=0$，所以 $f(x)>0\ (0<x<\pi)$，得证.

方法 2(单调性法)

原不等式等价于：$\dfrac{\sin x}{x}>\dfrac{2}{\pi}\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$.

设 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}-\dfrac{2}{\pi}$，则 $f'(x)=\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2}$.

为确定 $f'(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$ 内的符号，只需确定分子 $g(x)=x\cos x-\sin x$ 的符号.

法 1 因为 $g'(x)=-x\sin x<0\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$g(0)=0$，所以，$g(x)<g(0)=0$.

法 2 由拉格朗日中值定理可得 $\sin x=x\cos\xi(0<\xi<x)$，故

$$g(x)=x\cos x-\sin x=x(\cos x-\cos\xi)<0\ \left(0<x<\frac{\pi}{2}\right).$$

因此 $f'(x)<0\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，故 $f(x)$ 在 $\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right]$ 内单调减少，从而，$f(x)>f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，即得证.

方法 3(最值法)

设 $f(x)=\sin x-\dfrac{2}{\pi}x$，则 $f(0)=f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$，

$$f'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}\begin{cases}>0, & 0<x<\arccos\frac{2}{\pi},\\ =0, & x=\arccos\frac{2}{\pi},\\ <0, & \arccos\frac{2}{\pi}<x<\frac{\pi}{2}.\end{cases}$$

故 $f(x)$ 在 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值必为 0,从而得证.

方法 4(中值定理法)

设 $f(x)=\sin x$,则对任意的 $x\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$,在 $[0,x]$, $\left[x,\frac{\pi}{2}\right]$ 上分别应用拉格朗日中值定理可得 $\frac{\sin x}{x}=$

$$\frac{\sin x-0}{x-0}=\cos\xi\ (0<\xi<x),\quad \frac{\sin\frac{\pi}{2}-\sin x}{\frac{\pi}{2}-x}=\cos\eta\left(x<\eta<\frac{\pi}{2}\right).$$

由 $\cos\eta<\cos\xi$ 整理可得证.

【例 22】 证明:$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geqslant 1+\frac{x^2}{2}\ (-1<x<1)$.

【证明】 **方法 1**(单调性法)

设 $f(x)=x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x-1-\frac{x^2}{2}\ (-1<x<1)$,$f(x)$ 是偶函数,故只需证明 $f(x)\geqslant 0\ (0\leqslant x<1)$.

因为 $f'(x)=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\left(\frac{1}{1+x}+\frac{1}{1-x}\right)-\sin x-x$

$$=\ln\frac{1+x}{1-x}+x\cdot\frac{1+x^2}{1-x^2}-\sin x>0\ (0<x<1),$$

在 $0<x<1$ 内,通过比较分子分母大小即可得所需结论.

由 $\frac{1+x}{1-x}>1$ 得 $\ln\frac{1+x}{1-x}>0$;由 $\frac{1+x^2}{1-x^2}>1$ 得 $x\frac{1+x^2}{1-x^2}>x$,进而

$$x\frac{1+x^2}{1-x^2}-\sin x>x-\sin x>0.$$

故 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调增加,从而,对任意 $x\in(0,1)$,均有 $f(x)>f(0)=0$.

于是,对任意 $x\in(-1,1)$,均有 $f(x)\geqslant 0$.

方法 2(拆分不等式法)

注意到 $x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x$,$1+\frac{x^2}{2}$ 均为偶函数,故只需证明:当 $0\leqslant x<1$ 时,有

$$\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2}\ (0\leqslant x<1) \qquad ①$$

和

$$\ln\frac{1+x}{1-x}\geqslant x \qquad ②$$

成立.

(1) 证明:$\cos x\geqslant 1-\frac{x^2}{2}\ (0\leqslant x<1)$.

设 $f(x)=\cos x-1+\frac{x^2}{2}\ (0\leqslant x<1)$,下面用多种方法证明:$f(x)\geqslant 0\ (0\leqslant x<1)$.

法 1(单调性法)

因为

$$f'(x)=x-\sin x>0\ (0<x<1),$$

故 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上单调增加,从而,对任意的 $x\in[0,1)$ 均有 $f(x)\geqslant f(0)=0$.

法 2(最值法)

因为

$$f(0)=0,f'(x)=x-\sin x>0\ (0<x<1),$$

故 $f(x)$ 在 $[0,1)$ 上最小值为 $f(0)=0$.

从而,由最小值概念可知 $f(x)\geqslant 0(0\leqslant x<1)$.