线性代数与解析几何

（第二版）

华南理工大学数学学院

周胜林 刘西民 编

高等教育出版社

线性代数与解析几何

Xianxing Daishu yu Jiexi Jihe

（第二版）

华南理工大学数学学院
周胜林　刘西民　编

高等教育出版社·北京

内容提要

本书内容共分七章，包括行列式、矩阵、向量代数与几何应用、线性方程组、特征值与特征向量、二次型与二次曲面、线性空间和线性变换。此外，各章精选了大量习题，部分习题给出了参考答案或提示。

本书系统介绍了线性代数与解析几何的基本内容，在编写中，力求由浅入深，由易到难，从具体到抽象，注意知识的前后联系，注重线性代数与解析几何的融合，对理论部分的处理力求简明扼要，注重叙述的准确性与严谨性。

本书可作为高等院校工科和其他非数学专业本科生的线性代数与解析几何课程教材或教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

线性代数与解析几何 / 周胜林，刘西民编. -- 2 版. -- 北京：高等教育出版社，2015. 7
ISBN 978-7-04-042896-4

Ⅰ. ①线… Ⅱ. ①周… ②刘… Ⅲ. ①线性代数－高等学校－教材②解析几何－高等学校－教材 Ⅳ. ① O151.2 ② O182

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 113568 号

策划编辑 高 从　　责任编辑 兰莹莹 高 从　　封面设计 钟 雨　　版式设计 于 婕
插图绘制 杜晓丹　　责任校对 殷 然　　责任印制 尤 静

出版发行 高等教育出版社
社　　址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100120
印　　刷 三河市宏图印务有限公司
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 14
字　　数 250千字
购书热线 010-58581118
咨询电话 400-810-0598
网　　址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
版　　次 2012 年2月第1 版
2015 年7月第2 版
印　　次 2015 年7月第 1次印刷
定　　价 23.70 元

物 料 号 42896-00

第二版前言

本书第一版自 2012 年出版以来, 编者与华南理工大学数学学院公共数学教学团队同仁在使用第一版进行教学过程中, 发现了一些有待改进之处。这次修订, 根据这几年的教学实践和反馈意见, 主要作了如下几个方面的工作:

1. 第一章增加了方程个数与未知数个数相等的齐次线性方程组有非零解的必要条件的内容;

2. 第四章增加了齐次线性方程组有非零解的充分必要条件的内容; 为便于教学, 还增加了 "$\mathbb{R}^n$ 的基、向量在基下的坐标" 一节;

3. 删除了个别较难的习题, 补充了一些较为容易的基本习题;

4. 更正了第一版中的某些表述不当之处。

本次修订, 线性代数部分由周胜林负责, 解析几何部分由刘西民负责。本书的修订得到华南理工大学教务处、华南理工大学数学学院和高等教育出版社的大力支持, 在此表示衷心的感谢!

由于编者水平所限, 书中的错误和不当之处, 敬请广大读者批评指正。

编　者

2015 年 3 月于华南理工大学

第一版前言

大学数学是高等学校非数学类专业的基础课程,是培养高素质创新人才的基石。线性代数与解析几何是大学数学的一门重要的必修课程,是进一步学习其他数学课程,如数理统计、矩阵论、运筹学,以及后续课程的必备基础,甚至是以后工作中经常使用的数学工具之一。面对当前形势和人才发展的需求,迫切需要对教学内容和体系、教学方式和方法、教学环节和手段等方面进行改革。根据线性代数与解析几何课程教学的要求,结合多年从事本科大学数学的教学实践经验,我们编写了这本教材。

线性代数是处理矩阵和有限维向量空间的数学分支,在数学的各分支及物理、工程技术科学等领域中有越来越广泛的应用;解析几何是用代数的方法研究几何问题的学科,是沟通几何图形与数量关系的一座桥梁,其内容丰富,在自然科学技术及某些社会科学领域中有着广泛的应用。线性代数中的大量概念和方法都有很强的几何背景,线性代数实际上产生于解析几何,所以线性代数与解析几何的联系非常紧密。在大学数学课程教学改革中,把二者内容放在一门课程中讲授,其目的就是为了更好地体现它们之间的联系,同时使学生更好地利用代数方法和几何方法来处理科学技术中的问题。

在本教材的编写中,我们力求由浅入深,由易到难,从具体到抽象,注重知识的前后联系。注重线性代数和解析几何的融合,注重概念叙述和定理证明的严谨性,并提供了大量的例题和习题以加强对基本定义、定理的理解和应用。

全书共分七章,约需 48 学时讲完,教师可以按照不同专业的要求选讲其中部分内容。第一章行列式,通过二阶和三阶行列式的定义,在引入 n 阶排列的基础上,给出 n 阶行列式的定义、性质和计算。第二章矩阵,引入矩阵的概念和运算之后,重点讲述矩阵的初等变换和初等矩阵,以及矩阵的秩,这里矩阵的秩定义为矩阵不为零子式的最大阶数,这样逆矩阵的定义就显得更加自然。第三章向量代数与几何应用,介绍向量代数、空间平面与直线,为下一章 n 维向量空间作准备。第四章线性方程组,先讨论消元法,利用矩阵的初等行变换得到方程组有解的判定;其次将二维和三维向量推广到一般的情形,进而讨论向量组的线性相关性、向量组的秩,并证明矩阵的秩和矩阵的行秩、列秩的一致性;最后讨论齐次和非齐次线性方程组解的结构。第五章特征值与特征向量,系统阐述向量的内积、正交性、方阵的特征值和特征向量、实矩阵的对角化,这些都是线性代数的基

本内容。第六章二次型与二次曲面，重点讲述二次型的化简，以及利用二次型的理论来分类二次曲面，这是线性代数与解析几何紧密结合的实例。第七章线性空间和线性变换，这是大学数学里首次接触到的一种抽象空间，我们以大量的例子来说明如何从具体的空间抽象出线性空间的定义，讨论基变换和坐标变换公式，进一步给出线性变换的概念及它与矩阵的关系。第七章的内容超出大纲要求，用 * 号表示，教师使用教材时可酌情处理。另外，随着计算机和计算软件的飞速发展，线性代数中的计算问题几乎都可以运用计算机借助相关的数学软件来解决。因此我们在相关章节里介绍了运用 MATLAB 软件解决线性代数有关计算问题的方法和命令，这对本课程的学习也是有益处的。

本书线性代数部分由周胜林编写，解析几何部分由刘西民编写。由于编者水平所限，书中缺点或错误在所难免，敬请专家、同行和广大读者批评指正。

本书的编写得到了华南理工大学教务处、华南理工大学数学系和高等教育出版社的大力支持，在此表示衷心的感谢！

编　者

2011 年 10 月于华南理工大学

目　　录

第一章 行 列 式

行列式 (determinant) 的概念是伴随着方程组的求解而发展起来的. 作为基本的数学工具之一, 行列式在线性代数、多项式理论及解析几何等领域中都有着极其重要的应用. 行列式的提出可以追溯到 17 世纪, 其雏形由日本数学家关孝和 (Seki Takakazu) 与德国数学家莱布尼茨 (Leibniz) 各自独立得出. 最终, 法国数学家柯西 (Cauchy) 于 19 世纪初创立了现代的行列式概念和符号.

本章主要讨论下面几个方面的内容: (1) 行列式的定义; (2) 行列式的性质和计算; (3) 克拉默法则.

§1.1 二阶与三阶行列式

先来看中国古代的一个鸡兔同笼问题. 大约在 1 500 年前,《孙子算经》中记载了这样一个有趣的问题: "今有雉兔同笼, 上有三十五头, 下有九十四足, 问雉兔各几何?" 这四句话的意思是: 有若干只鸡兔同在一个笼子里, 从上面数, 有 35 个头; 从下面数, 有 94 只脚. 问笼中各有几只鸡和兔? 用二元一次方程组很容易求解: 可设鸡有 x_1 只, 兔有 x_2 只, 则

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 35, \\ 2x_1 + 4x_2 = 94. \end{cases} \tag{1.1}$$

用消元法易得: $x_1 = 23, x_2 = 12$. 即鸡有 23 只, 兔子有 12 只.

我们将二元一次方程组一般化, 来观察解的特点. 考虑二元一次线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{1.2}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时, 由消元法可得方程组的解:

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - b_2a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\
x_2 = \dfrac{b_2a_{11} - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}.
\end{cases} \tag{1.3}
$$

这就是二元一次线性方程组 (1.2) 的公式解. 据此, 我们引进二阶行列式的概念.

定义 1.1. 令

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},
$$

其中 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 叫做二阶行列式, 这里 a_{11}, a_{22} 所在的斜线称为二阶行列式的主对角线, 相应地 a_{11}, a_{22} 称为主对角线元素, 而 a_{12}, a_{21} 所在的斜线称为副对角线. 显然, 其值由主、副对角线元素的积作差得来.

当 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$ 时, 借助于二阶行列式这个新概念, 方程组 (1.2) 的公式解可简记为

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\
x_2 = \dfrac{D_2}{D},
\end{cases}
$$

其中 $D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$.

我们回顾那道鸡兔同笼的题目, 在方程组 (1.1) 中,

$$
D = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \neq 0, \quad D_1 = \begin{vmatrix} 35 & 1 \\ 94 & 4 \end{vmatrix} = 46, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 35 \\ 2 & 94 \end{vmatrix} = 24,
$$

于是 $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 23$, $\quad x_2 = \dfrac{D_2}{D} = 12$. 即笼中有鸡 23 只, 兔子 12 只.

类似可以给出下面的定义:

定义 1.2. 令

$$
\begin{aligned}
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}
&= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\
&\quad a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31},
\end{aligned} \tag{1.4}
$$

我们称它为三阶行列式.

三阶行列式定义没有二阶行列式那么容易记忆, 需要注意展开式的六项中哪些项带有正号, 哪些项带有负号. 图 1.1 可以帮助大家记忆, 实线上的 3 个元素之积构成的三项都取正号, 虚线上 3 个元素之积构成的三项都取负号.

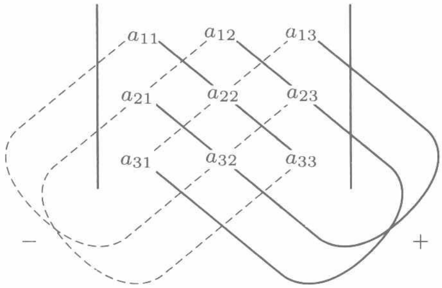

图 1.1

类似地, 若三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则用消元法同样可求其解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D}, \end{cases}$$

其中 D_1, D_2, D_3 是将 D 的第一列、第二列、第三列分别换成常数项所得到的三阶行列式, 即

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

例题 1.1. 解方程组

$$\begin{cases} 3x-2y+z=15, \\ 5y-2z=9, \\ 2x+y-z=1. \end{cases}$$

解 因为系数行列式为

$$D=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-11\neq 0,$$

所以方程组有解. 再由

$$D_1=\begin{vmatrix} 15 & -2 & 1 \\ 9 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-55,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 3 & 15 & 1 \\ 0 & 9 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-99,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 15 \\ 0 & 5 & 9 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-198,$$

可得

$$x=\frac{-55}{-11}=5, y=\frac{-99}{-11}=9, z=\frac{-198}{-11}=18.$$

§1.2　n 阶排列及其逆序数、对换

在 §1.1 中我们可以看到, 二、三阶行列式展开式中有的项取正号, 有的项取负号, 如果将行列式定义扩展到 $n(n\geqslant 4)$ 阶, 那么必然也会出现这样的现象. 那么每一项及其符号是基于什么规律而确定下来的呢? 展开式的项数又是多少呢? 这就要用到我们这一节将要阐述的 n 阶排列的概念.

定义 2.1. 由自然数 $1,2,\cdots,n$ 组成的任意一个 n 元有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$ 称为一个 n 阶排列, 其中排列 $12\cdots n$ 称为自然排列.

比如 2413 是 4 阶排列, 253164 是 6 阶排列. 需要注意的是, 1123 及 13567 都不是排列. 易知, n 阶排列一共有 $n!=n(n-1)(n-2)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ 个.

定义 2.2. 在一个排列中, 如果一个较大的数字排在一个较小的数字之前, 则称这两个数字构成一个逆序. 否则, 称这两个数字构成一个顺序. 在一个排列 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 中, 逆序的总数称为这个排列的逆序数, 记为 $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$. 逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

比如 8 阶排列 57864312, 为方便起见将数 i 与排在其前面的数构成的逆序数记为 τ_i, 则 $\tau_1 = 6, \tau_2 = 6, \tau_3 = 5, \tau_4 = 4, \tau_5 = 0, \tau_6 = 2, \tau_7 = 0, \tau_8 = 0$, 于是 $\tau(57864312) = 6+6+5+4+0+2+0+0 = 23$, 故 8 阶排列 57864312 为一奇排列. 请思考: 还有别的计算逆序数的方法吗?

定义 2.3. 把一个排列中两个数字 i, j 的位置互换而保持其余数字的位置不动, 则称对这个排列施行了一个对换, 记作 (i, j). 两个相邻位置数字的对换称为相邻对换, 否则称为一般对换.

对换具有可逆性, 即若连续实施两次相同的对换, 则将排列还原. 对换有下述重要性质:

定理 2.1. 对换改变排列的奇偶性.

证明 当 (i, j) 为相邻对换时, 对换前后, i, j 之外数字的位置都没有改变, 因此这些数字所构成的逆序数不变, i, j 和其余数字所成的逆序数也不变, 故只需考虑 i, j 两者之间的逆序. 如果 i 和 j 原来并没有逆序 (即 $i < j$), 那么在对换后的新排列中会得到一个新的逆序, 即增加了一个逆序数; 如果原来两者就是逆序 (即 $i > j$), 那么现在就会变成顺序, 即减少了一个逆序数. 在这两种情形中排列前后的奇偶性都发生了变动.

当 (i, j) 为一般对换时, 设 i, j 之间有 s 个数字 $k_1, k_2, \cdots, k_s$. 不失一般性, 设原排列为

$$\cdots i k_1 k_2 \cdots k_s j \cdots, \tag{2.1}$$

经对换 (i, j), 得到

$$\cdots j k_1 k_2 \cdots k_s i \cdots. \tag{2.2}$$

用下面的方法可以将 (2.2) 看作由 (2.1) 经过一系列的相邻对换而得到: 先将 (2.1) 的 i 向右依次与 $k_1, k_2, \cdots, k_s$ 作 s 次相邻对换得 $\cdots k_1 k_2 \cdots k_s i j \cdots$, 再将 j 向左依次与 $i, k_s, k_{s-1}, \cdots, k_1$ 作 $s+1$ 次相邻对换而得 (2.2), 即 (2.2) 可由 (2.1) 经 $2s+1$ 次相邻对换而得. 由第一段论述知, 每一个相邻对换都要改变排列的奇偶性, 而 $2s+1$ 是一个奇数, 所以 (2.1) 和 (2.2) 的奇偶性相反.

推论 2.1. 排列经过奇数次对换其奇偶性发生改变, 经过偶数次对换其奇偶性不变.

证明 由上面的定理知此结论显然成立.

推论 2.2. 当 $n \geqslant 2$ 时, 在 n 阶排列中, 奇偶排列数目相等, 即各有 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

证明 任取对换 (i,j), 对所有的奇排列作 (i,j) 对换, 由上面的定理知上述排列将全部变为偶排列, 故奇排列个数不大于偶排列个数. 同理, 对所有的偶排列施行 (i,j) 对换, 可以知偶排列个数不大于奇排列个数. 于是, 在 n 阶排列中, 奇偶排列数目相等, 即各有 $\dfrac{n!}{2}$ 个.

定理 2.2. 自然排列 $12\cdots n$ 可以与任意 n 阶排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 经过一系列对换相互转换, 且所作对换次数与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 具有相同的奇偶性.

证明 先来看由自然排列 $12\cdots n$ 到任意 n 阶排列的转换. 对 n 用数学归纳法. 当 $n=1$ 时, 一阶排列只有自然排列, 命题成立. $n=2$ 时, 二阶排列有两个, 即自然排列 12 和排列 21, 命题显然成立. 假设对 $n-1$ 的情形命题成立, 即 $n-1$ 阶自然排列 $12\cdots(n-1)$ 可经一系列对换变为任意的 $n-1$ 阶排列. 设 $i_1i_2\cdots i_n$ 是任一 n 阶排列, 若 $i_n=n$, 则 $i_1i_2\cdots i_{n-1}$ 是一个 $n-1$ 阶排列, 结论由归纳法得到; 若 $i_n=j\neq n$, 作对换 (j,n), 归结到 $i_n=n$ 的情形, 结论成立.

由于对换可逆, 任一 n 阶排列可经 (同样的) 一系列对换变为 n 阶自然排列. 由推论 2.1 知, 两者相互转换所作的对换次数与排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 具有相同的奇偶性.

§1.3 n 阶行列式的定义

有了 §1.2 的准备工作, 本节就可以给出 n 阶行列式的定义及其性质.

我们用

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示一个 n 阶行列式, 其中元素 $a_{ij}\in\mathbb{C}$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$, 这里 $\mathbb{C}$ 为复数集. 为了描述行列式中某个位置的元素, 我们将行列式的横排称为行 (row), 竖排称为列 (column), 这也是用行列式来命名上面式子的原因所在. 那么, a_{ij} 表示此 n 阶行列式的第 i 行第 j 列的元素, i 称为行指标, j 称为列指标.

我们首先分析二阶和三阶行列式的定义.

对于二阶或三阶, 行列式的值都是元素之 "积" 的 "和". 对于二阶行列式, 积是取自不同行不同列的两个元素的积, 这样的积共有 $2!=2$ 个, $a_{11}a_{22}$ 取正号,

$a_{12}a_{21}$ 取负号.

对于三阶行列式, 积都是取自不同行不同列的三个元素的乘积, 共有 $3! = 6$ 个. 其中三项, 即 $a_{11}a_{22}a_{33}$, $a_{12}a_{23}a_{31}$ 和 $a_{13}a_{21}a_{32}$ 带正号, 另外三项 $a_{11}a_{23}a_{32}$, $a_{12}a_{21}a_{33}$ 和 $a_{13}a_{22}a_{31}$ 带负号.

进一步可以观察到, 若我们首先将上述取自不同行不同列元素之积项的行指标按照自然顺序排起来, 再考察列指标, 则对于二阶行列式, 两项的列指标为 12, 21, 而 12 是偶排列, 此项前面带有正号, 而 21 是奇排列, 对应的项前面带有负号. 对于三阶行列式, 行指标按照自然顺序排起来后, 带正号的项的列指标为 123, 231, 312, 它们是关于 $1, 2, 3$ 的偶排列; 带负号的项的列指标为 132, 213, 321, 它们为奇排列.

从二阶和三阶行列式的展开式中得到启发, 下面借助于 n 阶排列的知识来定义 n 阶行列式的值.

定义 3.1. n 阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

等于所有来自不同行不同列的 n 个元素乘积的代数和. 由于代数和的项数为 $n!$ 个, 为了表达方便, 我们可以将每项中的 n 个元素按行指标由小及大的顺序排列, 即写作 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的形式, 并规定当列指标 $j_1j_2\cdots j_n$ 是偶排列时, 此项前面带正号; 当列指标 $j_1j_2\cdots j_n$ 是奇排列时, 此项前面带负号. 这样, n 阶行列式可以表示为

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}. \tag{3.1}$$

其中 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 表示对所有可能的 n 阶排列求和. (3.1) 称为行列式的展开式.

上述 n 阶行列式通常记为 $D = \det(a_{ij})$ 或者 $|a_{ij}|$.

可以验证当 $n = 2, 3$ 时, 我们定义的二、三阶行列式与 §1.1 定义的二、三阶

行列式是一致的, 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2} (-1)^{\tau(j_1j_2)} a_{1j_1}a_{2j_2},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2j_3} (-1)^{\tau(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

当 $n=1$ 时, 规定 $|a_{11}| = a_{11}$.

上面定义行列式展开式中的项是按行指标的自然顺序排列的. 一个自然的问题是, 每一项能否按列指标的自然顺序排列呢? 答案是肯定的. 由于数的乘法满足可交换性, 不妨设某项为 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$, 调整元素的顺序, 设

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} = a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}.$$

我们知道此项的正负由 $\tau(j_1j_2\cdots j_n)$ 来决定. 将上述等式左侧化为右侧可以通过元素之间的对换来完成, 每作一次元素的对换, 由其元素的行指标和列指标构成的排列也都要作一次对换, 也就是说 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 同时改变奇偶性, 故 $(-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} = (-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}$. 于是, n 阶行列式的另一个展开式为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n} (-1)^{\tau(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}. \tag{3.2}$$

例题 3.1. 确定 4 阶行列式 $\det(a_{ij})$ 的展开式中乘积项 $a_{31}a_{14}a_{43}a_{22}$ 所带的符号.

解 交换元素的顺序, 使得其行指标次序成为自然排列的形式, 得

$$a_{31}a_{14}a_{43}a_{22} = a_{14}a_{22}a_{31}a_{43}.$$

因为由列指标构成的排列逆序数 $\tau(4213) = 4$ 是偶数, 故乘积项 $a_{31}a_{14}a_{43}a_{22}$ 所带的符号为正.

一般而言, 直接利用定义来求行列式的值是件困难的事情, 因为当 n 增大时, 行列式的项数 $n!$ 增长很快, 比如我们知道 10 阶行列式的展开式就有 10!=3628800 项. 但对于某些特殊的情形, 可以按定义去计算其值. 举例如下:

例题 3.2. 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}.$$

解 通过观察可知, 此行列式只可能含一个非零项 $a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}$, 由列指标所构成排列的逆序数 $\tau(23\cdots(n-1)n1)=n-1$, 故原行列式

$$D=(-1)^{\tau(23\cdots(n-1)n1)}a_{12}a_{23}\cdots a_{n-1,n}a_{n1}=(-1)^{n-1}n!.$$

例题 3.3. 计算 n 阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 根据定义, D 的展开式中每一项都可以写成 $(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 的形式. 由于这个行列式的第 n 行中除了 a_{nn} 外其余元素都是 0, 所以含 $j_n\neq n$ 的项其值皆为零, 因此只需考虑项中含 $j_n=n$ 的那项即可. 再看第 $n-1$ 行, 这一行中只有 $a_{n-1,n-1}$ 和 $a_{n-1,n}$ 这两个元素可能不为零, 因此不为 0 的项只有可能在 j_{n-1} 取 $n-1$ 或 n 时得到. 由于同一列中只可以选取一个元素, 因此 $j_{n-1}\neq n$, 所以只有 $j_{n-1}=n-1$. 按同样的推理方法依次推出, D 的展开式中非零项只可能是 $(-1)^{\tau(12\cdots n)}a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$. 所以有

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

在行列式中, 由左上角到右下角所形成的斜线称为**主对角线**, 由右上角到左下角所形成的斜线称为**副对角线**. 对于例题 3.3 的 n 阶行列式, 在主对角线下方的元素全为零, 称为**上三角形行列式**, 如果主对角线上方的元素全为零, 则称为**下三角形行列式**. 上三角形行列式和下三角形行列式统称为**三角形行列式**. 如果除了主对角线之外的元素全为零, 则称为**对角行列式**.