考研数学

考研数学
清华版
精品备考丛书

历年真题名师精解

数学
（一）

胡金德　谭泽光◎主编

分类精解——历年真题条分缕析

题型丰富——海量题目科学归纳

名师点拨——深刻剖析真题本质

解读多维——全面把握命题规律

清華大学出版社

（清华版）考研数学精品备考丛书

考研数学

历年真题名师精解

数学（一）

胡金德　谭泽光◎主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书精心编排了2001年至2015年共15年的数学一考研真题，依照考试大纲要求，按知识点对所有题目进行讲解，体系清晰，分析细致、讲解详尽，便于考生系统复习。本书可作为广大考生复习阶段模拟练习的重要题库，起到查漏补缺、指导复习方向的作用。

本书可供将参加2016年研究生入学考试的数学一学生备考使用。

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历年真题名师精解．数学一/胡金德，谭泽光主编．--北京：清华大学出版社，2015
((清华版)考研数学精品备考丛书)
ISBN 978-7-302-40349-4

Ⅰ.①考…　Ⅱ.①胡…　②谭…　Ⅲ.①高等数学－研究生－入学考试－题解　Ⅳ.①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第114382号

责任编辑：朱敏悦
封面设计：汉风唐韵
责任校对：王荣静
责任印制：刘海龙

出版发行：清华大学出版社
　　网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
　　地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
　　社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
　　投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
　　质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　张**：22.75　　**字　　数**：581千字
版　　次：2015年7月第1版　　**印　　次**：2015年7月第1次印刷
印　　数：1～4000
定　　价：39.00元

产品编号：064932-01

前　言

全国工学、经济学硕士研究生入学统一数学考试实施多年来，每年命题都是紧扣大纲，形成了相对稳定、完整的模式。对这种模式的深入了解，有助于考生掌握命题规律，熟悉考试题型，并争取优良成绩。因此，在每一套考研数学辅导教程丛书中，真题解析类的书目都是重要的组成部分之一。通过练习真题，可以有效地帮助考生把握数学考试大纲的命题指导思想、原则和趋势，是广大考生和教师了解试题信息、分析命题重点、总结命题规律和揣摩命题动态的重要依据，同时本书也可作为考生复习阶段模拟练习的重要题库，起到查漏补缺，指导复习方向的作用。

因此，一本经典的历年考试真题解析教程应当是内容完整、分析细致、求解详尽、总结全面的，这也是广大考生所热切期待的。本丛书作者就是依据上述精神，精心编纂了本册《考研数学历年真题名师精解（数学一）》。本书布局巧妙，内容精细，综合了众多相关教程和复习指导书的优点，具有如下几个特点：

1. 内容细致，题型丰富

本书精心编排了 2001 年至 2015 年共 15 年的数学考研真题，依照考试大纲的要求，按知识点归纳对所有题目分专题进行讲解，体系清晰，便于考生系统复习。每一专题的题目按选择、填空、简答排序，内容由浅入深，方便考生循序渐进地领会各个知识点。同时本书也综合了其他几类试卷（如数学二，数学三）考试中的一些经典真题，以求对考研大纲的知识点全面覆盖。

2. 解析详尽，总结全面

对于每一道题目，编者为广大考生设计两个重要板块：【解析】和【知识点归纳】。【解析】是依据考研名师提供的经典讲义教案，提供了最新的解题思路、方法和技巧，给出详细准确的求解过程，以帮助考生开拓思路，提高解题能力。【知识点归纳】则是对每一道题目所涉及的知识点进行归纳总结，让考生对每一个题目所需的知识点有一个直接的认知，方便查漏补缺，完善知识体系。此外，【大纲回顾】一栏为考生提供了过去一年的考试大纲，对考生细致了解考试内容，把握重点将起到重要的作用。【本章小结】则全面回顾了本章所涉及的知识点，有助于考生系统总结，温故知新。

3. 精心设计，完美自测

除上述经典部分之外，编者还在附录中设计了“参考答案及自测表”，对所有真题题目进行题型归类，方便考生归纳总结复习的不足，及时发现并弥补自身知识体系的不足。

考生在使用本书的时候，应该按章节先结合教材、复习全书同步复习相关知识点，同时选取 5 套左右的真题试卷作为阶段性模拟测验。在完成第一次系统复习后，再选取 5 套左右的真题试卷进行模拟演练，并仔细填写错误统计表，总结错误类型，进行第二轮专项突破复习，结合我们的《考研数学能力训练——基础篇》完成一次全面的考试能力提升。在完成第二轮复习之后，做完剩下的考研真题卷，再次检查自身的错误，进一步完善自己的知识结构。在每次模拟考试

的时候，应严格按照考试时间进行，稳步提升对考试的时间掌控能力。另外，在每次做完一套考研真题之后，考生应当对自己所做的答卷作一个详细的归纳总结，查清出错原因，看看自己是在基本理论、基本概念和基本方法方面有什么欠缺，还是在做题技巧、知识的综合和灵活运用等方面有所不足。总之，这样的归纳总结过程对于考生的复习来说是十分有必要的，其重要程度与做题无异，考生应当认真对待这一复习环节。

编者力求编写一套更为优秀的辅导丛书，但因水平有限，难免有不足之处，恳请广大考生读者批评指正。

最后，真诚地祝愿广大考生通过辛勤的努力，取得良好的成绩，考入理想的学府。

编　者

2015 年于北京

目　录

第一部分　高等数学

第二部分　线性代数

第三部分　概率论与数理统计

附　　录

第一部分　高等数学

第一章　函数、极限、连续

大纲回顾

考试内容

函数的概念及表示法；函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；复合函数、反函数、分段函数和隐函数；基本初等函数的性质及其图形；初等函数；函数关系的建立；数列极限与函数极限的定义及其性质；函数的左极限与右极限；无穷小量和无穷大量的概念及其关系；无穷小量的性质及无穷小量的比较；极限的四则运算；极限存在的两个准则：单调有界准则和夹逼准则；两个重要极限：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e},$$

函数连续的概念；函数间断点的类型；初等函数的连续性；闭区间上连续函数的性质.

考试要求

1. 理解函数的概念，掌握函数的表示法，会建立应用问题的函数关系.

2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.

3. 理解复合函数及分段函数的概念，了解反函数及隐函数的概念.

4. 掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念.

5. 理解极限的概念，理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.

6. 掌握极限的性质及四则运算法则.

7. 掌握极限存在的两个准则，并会利用它们求极限，掌握利用两个重要极限求极限的方法.

8. 理解无穷小量、无穷大量的概念，掌握无穷小量的比较方法，会用等价无穷小量求极限.

9. 理解函数连续性的概念（含左连续与右连续），会判别函数间断点的类型.

10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性，理解闭区间上连续函数的性质（有界性、最大值和最小值定理、介值定理），并会应用这些性质.

专题一　函数的性质

1.（05，数1，8题）设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数，“$M\Leftrightarrow N$”表示“M的充分必要条件是 N”，则必有　　【　　】

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数. (B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数. (D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

解析

【思路一】 特例法

取 $f(x)=\cos x+1, F(x)=\sin x+x+1$,则

$f(x)=\cos x+1$ 是偶函数,而 $F(x)=\sin x+x+1$ 不是奇函数,即 $f(x)$ 是偶函数不能得出 $F(x)$ 一定是奇函数,排除(B);

$f(x)=\cos x+1$ 是周期函数,而 $F(x)=\sin x+x+1$ 不是周期函数,即 $f(x)$ 是周期函数不能得出 $F(x)$ 一定是周期函数,排除(C);

$F(x)=\sin x+x+1$ 是单调递增函数,而 $f(x)=\cos x+1$ 不是单调函数,即 $F(x)$ 是单调函数不能得出 $f(x)$ 一定是单调函数,排除(D);

所以选(A)选项.

【思路二】 由题意得 $F(x)=\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$,则 $F(-x)=\int_0^{-x} f(t)\mathrm{d}t+C$,令 $s=-t$ 得

$$F(-x)=\int_0^x -f(-s)\mathrm{d}s+C=\begin{cases}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C, & f(x)\text{ 为奇函数},\\ -\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C, & f(x)\text{ 为偶函数}.\end{cases}$$

由上式可知,当 $C\neq 0$ 时,(B)选项不成立,而(A)选项成立,故选(A)选项.

知识点归纳

1. 在做选择题时,可以利用特例法,排除其他错误选项,简单快速地得到答案.

2. 本题【思路二】得到的结论为:设 $f(x)$ 为连续函数,则当 $f(x)$ 为奇函数时,$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为偶函数,对于任意的常数 C,$f(x)$ 的全体原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 为偶函数;$f(x)$ 为偶函数时,$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$ 为奇函数,只有当常数 $C=0$ 时,$f(x)$ 的原函数 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+C$ 为奇函数,做选择题和填空题时可以直接拿来用.

专题二　极限的概念与性质

2.(03,数1,二(2)题)设 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ 均为非负数列,且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1,\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\infty$,则必有 【　】

(A) $a_n<b_n$ 对任意 n 成立. (B) $b_n<c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在. (D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在.

解析

【思路一】 举反例利用排除法. 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,很自然地能想到取数列 $a_n=\dfrac{1}{n}$,同样的可以想到取 $b_n=1,c_n=n$ 使得所取数列满足题意. 当 $n=1$ 时,排除(A),(B). 显然,$\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n=1$,极限存在,排除(C)选项. 故正确答案为(D)选项.

【思路二】　直接证明，根据定义可知数列极限与数列前面有限项的大小无关，不能以这种当 n 充分大时的情形来比较数列各项的大小，故排除(A)，(B)．而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 是无穷小与无穷大相乘，$0\cdot\infty$ 为未定型，不能判断极限存在与否，排除(C)，$\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不是未定式，其结果为无穷大，故正确答案为(D) 选项．

知识点归纳

对于概念性的选择题来讲，平时多积累一些常见的例子，有助于考生在考试时快速做出判断，节省考试时间．

1．对于数列的极限，极限值与数列前面有限项的大小无关，不能以此来说明所有项的情形．如以上的(A)，(B) 选项．

2．要注意未定型 $\left(\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty},0\cdot\infty,1^{\infty},0^{0},\infty^{0}\right)$ 的极限是不能确定的，可能存在也可能不存在．

3．可以确定四则运算极限的情形有：无穷与无穷之间的乘运算为无穷；无穷与有界之间的加、减都为无穷．

专题三　　求解数列极限

3．(10，数 1，4 题) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$　　　　【　　】

(A) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$．　　(B) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$．

(C) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}\mathrm{d}y$．　　(D) $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$．

解析

【思路一】　对题设的极限式进行恒等变换

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{1+\frac{i}{n}}\cdot\frac{1}{n}\right]\cdot\lim_{n\to\infty}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}\right],$$

由定积分的定义可将极限转化为定积分，得

$$\text{原式}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x}\cdot\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{1+y^2}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{(1+x)(1+y^2)}.$$

所以选(D) 选项．

【思路二】　根据题目以及选项的形式，将和式转化为二重积分的积分和．

设正方形区域 $D=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,0\leqslant y\leqslant 1\}$，二元函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}$；若将区域 D 的长宽分别分成 n 等份，即将区间 $x\in[0,1]$ 与 $y\in[0,1]$ 分成 n 等份，这样就把 D 分成 n^2 个小正方形且每个小正方形的面积为 $\dfrac{1}{n^2}$，又因为可以把

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]}\cdot\frac{1}{n^2}$$

看成函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}$ 的二重积分的一个积分和,即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=\iint_D\frac{\mathrm{d}\sigma}{(1+x)(1+y^2)}=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1\frac{1}{(1+x)(1+y^2)}\mathrm{d}y$$

故选择(D)选项.

4.(08,数1,4题)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界,$\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是 【 】

(A) 若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.　　(B) 若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.

(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛.　　(D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛.

解析

对于(A)选项:由数列 $\{x_n\}$ 收敛不能推出 $\{x_n\}$ 单调,也得不到函数 $f(x_n)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调,所以 $\{f(x_n)\}$ 不一定收敛,故(A)错误;

对于(B)选项:由数列 $\{x_n\}$ 单调可以推出函数 $f(x_n)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调,又 $f(x)$ 有界,所以 $\{f(x_n)\}$ 收敛,故(B)正确;

对于(C)选项:可令 $x_n=n$,使得数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛,但 $\{x_n\}$ 不收敛,故(C)错误;

对于(D)选项:同样可令 $x_n=n$,由于 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调,可知数列 $\{f(x_n)\}$ 单调,但 $\{x_n\}$ 不收敛,故(D)错误.

故选择(B)选项.

知识点归纳

数列的单调有界收敛准则:

1) 如果数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界,即存在一个确定的常数 m,使得对于一切的 n 都有 $x_n\geqslant m$,则数列 $\{x_n\}$ 收敛,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

2) 如果数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界,即存在一个确定的常数 m,使得对于一切的 n 都有 $x_n\leqslant m$,则数列 $\{x_n\}$ 收敛,即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

5.(06,数1,16题)设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi,x_{n+1}=\sin x_n(n=1,2,\cdots)$

(Ⅰ)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在,并求其极限;(Ⅱ)计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解析

(Ⅰ)利用数列单调有界收敛准则来判断极限的存在性.

易知当 $0<x<\pi$ 时,有 $\sin x<x$,而 $0<x_2=\sin x_1<x_1<\pi$,利用归纳证明可得

$$0<x_{n+1}=\sin x_n<x_n<\pi,$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调下降且有下界,所以数列 $\{x_n\}$ 的极限存在,设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$,对方程 $x_{n+1}=\sin x_n$ 两边取极限有 $A=\sin A$,可得 $A=0$.

(Ⅱ)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{x_n^2}\ln\frac{\sin x_n}{x_n}\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\exp\left\{\frac{1}{x_n^2}\ln\left(1+\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n^2}\left(\frac{\sin x_n}{x_n}-1\right)\right\}$$

$$= \exp\left\{\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x_n - x_n}{x_n^3}\right\}$$

转化为函数极限，由（Ⅰ）知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，又

$$\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x}{x^3}\right\}=\exp\left\{\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!}x^3+o(x^3)}{x^3}\right\}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}.$$

知识点归纳

遇到证明如本题这种递推数列极限的问题时，一般应想到利用数列单调有界收敛准则求解. 其关键在于判断数列的单调性与有界性. 在已证明极限存在的基础上再利用所给方程，等式两边同时取极限，即可得到所求数列极限.

专题四　求解函数极限

6.（10，数 1，1 题）极限$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$　【　】

(A) 1.　　(B) e.　　(C) e^{a-b}.　　(D) e^{b-a}.

解析

【思路一】　利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

$$原式=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-a)(x+b)+(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^x$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{(x-a)(x+b)}\right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x+ab}\cdot\frac{x[(a-b)x+ab]}{(x-a)(x+b)}}=\mathrm{e}^{a-b}$$

故正确答案为(C) 选项.

【思路二】　遇见幂指函数求极限的问题，可以直接利用公式

$$\lim u^v=\mathrm{e}^{\lim v\ln u}（其中\ u-1\to 0）.$$

即将原先求幂指数极限的问题转化成求乘积 $\lim v\ln u$ 的极限问题. 所以有

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=\lim_{x\to\infty}\mathrm{e}^{x\ln\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\ln\left[1+\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]}$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]}.$$

转化为求解$\lim\limits_{x\to\infty}x\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]$的问题，而

$$\lim_{x\to\infty} x\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}-1\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{(a-b)x^2+abx}{x^2+(b-a)x-ab}=a-b.$$

故 原式 $=e^{a-b}$. 所以正确答案为(C) 选项.

【思路三】

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x&=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{(x-a)(x+b)}{x^2}\right]^{-x}\\&=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{a}{x}\right)^{-x}\cdot\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{b}{x}\right)^{-x}\\&=e^a\cdot e^{-b}=e^{a-b}.\end{aligned}$$

知识点归纳

幂指函数求极限通常有两种方法:

1) 利用 $\lim u^v=e^{\lim v\ln u}$,将原极限化为求 $\lim v\ln u$;

2) 利用重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.

【思路三】的方法不易想到,但当分子比分母简单时一般采用此方法.

7.(15,数 1,9 题)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ________.

解析

此题考查 $\dfrac{0}{0}$ 型未定式极限,可直接用洛必达法则,也可以用等价无穷小替换.

【思路一】 洛必达法则

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\tan x}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

【思路二】 等价无穷小替换

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

8.(06,数 1,1 题)$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$ ________.

解析

本题属于 $\dfrac{0}{0}$ 型极限的求解问题,根据常见的等价无穷小替换即可.这里用到 $\ln(1+x)\sim x$,

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,所以原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\frac{1}{2}x^2}=2.$

知识点归纳

一些常见的等价无穷小

当 $x\to 0$ 时有,$\sin x\sim x$,$\tan x\sim x$,$\arcsin x\sim x$,$\arctan x\sim x$,

$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$,$\ln(1+x)\sim x$,$e^x-1\sim x$,$(1+x)^a-1\sim ax$.

注:这些等价替换只能在乘、除运算中运用,而不能在加、减运算中运用.

9.(03,数 1,一(1) 题)$\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=$ ________.

解析

【思路一】 幂指函数求极限,将原式转化

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}}.$$

由等价无穷小 $\ln(1+x^2)\sim x^2(x\to0)$,结合洛必达法则有

$$\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{\ln\cos x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x}=-\frac{1}{2}.$$

所以

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

【思路二】 利用重要极限$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$.原式可以有如下转换:

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\lim_{x\to0}[1+(\cos x-1)]^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}}.$$

转化为求解$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}$的问题,而

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2}=-\frac{1}{2}.$$

所以

$$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

10.(11,数 1,15 题)求极限$\lim\limits_{x\to0}\left[\dfrac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}$.

解析

【思路一】 由 $\lim u^v=e^{\lim v\ln u}$ 得

$$\lim_{x\to0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim_{x\to0}e^{\frac{1}{e^x-1}\ln\frac{\ln(1+x)}{x}}=e^{\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{e^x-1}\ln\frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

转化为求极限$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{e^x-1}\ln\dfrac{\ln(1+x)}{x}$的问题,而

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x-1}\ln\frac{\ln(1+x)}{x}&=\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x-1}\ln\left\{1+\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\right\}\\&=\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right].\end{aligned}$$

通分后利用洛必达法则得

$$\begin{aligned}\lim_{x\to0}\frac{1}{x}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]&=\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}\\&=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{1+x}-1}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{-x}{2x(1+x)}\\&=\lim_{x\to0}\frac{-1}{2(1+x)}=-\frac{1}{2}\end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{e^x-1}\ln\frac{\ln(1+x)}{x}=-\frac{1}{2}.$$

故 原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$.

【思路二】 利用重要极限$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}\right]^{\frac{1}{e^x-1}}=\lim_{x\to 0}\left\{1+\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\right\}^{\frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}-1}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\frac{1}{e^x-1}}$$
$$=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\frac{1}{e^x-1}}$$

转化为求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\frac{1}{e^x-1}$的问题,计算方法同【思路一】

所以 原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$.

【思路三】 同【思路一】或【思路二】,转化为求极限$\lim\limits_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\frac{1}{e^x-1}$的问题,而$\ln(1+x)$的泰勒展开式为

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+o(x^2),x\to 0.$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{\ln(1+x)}{x}-1\right]\frac{1}{e^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)-x}{x^2}$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2+o(x^2)}{x^2}=-\frac{1}{2}$$

故原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$.

知识点归纳

记住一些常见函数如 $e^x,\sin x,\cos x,\ln(1+x)$ 和$(1+x)^a$ 在 $x=0$ 点的泰勒展开式,并能很熟练地写出展开式的前 2、3 项有时会使解题更加快捷.

11.(08,数 1,15 题)求极限$\lim\limits_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

解析

【思路一】 如果利用等价无穷小 $\sin x^4\sim x^4$,将 x^4 换成 $\sin^4 x$ 后,可大大简化运算.

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{\sin^4 x}$$
$$\xlongequal{令\ \sin x=t}\lim_{t\to 0}\frac{t-\sin t}{t^3}=\lim_{t\to 0}\frac{1-\cos t}{3t^2}=\frac{1}{6}.$$

【思路二】 可以利用等价无穷小 $\sin x\sim x(x\to 0)$,并结合泰勒公式进行计算.因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\sin(\sin x)}{x^3}$$

利用泰勒公式和等价无穷小 $\sin x\sim x(x\to 0)$ 替换得

$$\sin(\sin x)=\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)$$

故

$$原式=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-\left[\sin x-\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)\right]}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{6}\sin^3 x+o(x^3)}{x^3}=\frac{1}{6}.$$