

· 考研数学 ·



历年真题 名师精解

数学
(一)

胡金德 谭泽光 主编

◆ 分类精解 —— 历年真题条分缕析 ◆

◆ 题型丰富 —— 海量题目科学归纳 ◆

◆ 名师点拨 —— 深刻剖析真题本质 ◆

◆ 解读多维 —— 全面把握命题规律 ◆



清华大学出版社

(清华版) 考研数学精品备考

· 考研数学 ·

历年真题 名师精解

数学
(一)

胡金德 谭泽光 主编

清华大学出版社
北京

内 容 简 介

本书精心编排了2001年至2015年共15年的数学一考研真题,依照考试大纲要求,按知识点对所有题目进行讲解,体系清晰,分析细致、讲解详尽,便于考生系统复习。本书可作为广大考生复习阶段模拟练习的重要题库,起到查漏补缺、指导复习方向的作用。

本书可供将参加2016年研究生入学考试的数学一学生备考使用。

本书封面贴有清华大学出版社防伪标签,无标签者不得销售。

版权所有,侵权必究。侵权举报电话:010-62782989 13701121933

图书在版编目(CIP)数据

考研数学历年真题名师精解. 数学一/胡金德,谭泽光主编. —北京:清华大学出版社,2015

((清华版)考研数学精品备考丛书)

ISBN 978-7-302-40349-4

I. ①考… II. ①胡… ②谭… III. ①高等数学—研究生—入学考试—题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第114382号

责任编辑:朱敏悦

封面设计:汉风唐韵

责任校对:王荣静

责任印制:刘海龙

出版发行:清华大学出版社

网 址: <http://www.tup.com.cn>, <http://www.wqbook.com>

地 址:北京清华大学学研大厦A座 邮 编:100084

社总机:010-62770175 邮 购:010-62786544

投稿与读者服务:010-62776969, c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈:010-62772015, zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 装 者:北京密云胶印厂

经 销:全国新华书店

开 本:185mm×260mm

印 张:22.75

字 数:581千字

版 次:2015年7月第1版

印 次:2015年7月第1次印刷

印 数:1~4000

定 价:39.00元

产品编号:064932-01

前 言

全国工学、经济学硕士研究生入学统一数学考试实施多年来,每年命题都是紧扣大纲,形成了相对稳定、完整的模式。对这种模式的深入了解,有助于考生掌握命题规律,熟悉考试题型,并争取优异成绩。因此,在每一套考研数学辅导教程丛中,真题解析类的书目都是重要的组成部分之一。通过练习真题,可以有效地帮助考生把握数学考试大纲的命题指导思想、原则和趋势,是广大考生和教师了解试题信息、分析命题重点、总结命题规律和揣摩命题动态的重要依据,同时本书也可作为考生复习阶段模拟练习的重要题库,起到查漏补缺,指导复习方向的作用。

因此,一本经典的历年考试真题解析教程应当是内容完整、分析细致、求解详尽、总结全面的,这也是广大考生所热切期待的。本丛书作者就是依据上述精神,精心编纂了本册《考研数学历年真题名师精解(数学一)》。本书布局巧妙,内容精细,综合了众多相关教程和复习指导书的优点,具有如下几个特点:

1. 内容细致,题型丰富

本书精心编排了2001年至2015年共15年的数学考研真题,依照考试大纲的要求,按知识点归纳对所有题目分专题进行讲解,体系清晰,便于考生系统复习。每一专题的题目按选择、填空、简答排序,内容由浅入深,方便考生循序渐进地领会各个知识点。同时本书也综合了其他几类试卷(如数学二,数学三)考试中的一些经典真题,以求对考研大纲的知识点全面覆盖。

2. 解析详尽,总结全面

对于每一道题目,编者为广大考生设计两个重要板块:【解析】和【知识点归纳】。【解析】是依据考研名师提供的经典讲义教案,提供了最新的解题思路、方法和技巧,给出详细准确的求解过程,以帮助考生开拓思路,提高解题能力。【知识点归纳】则是对每一道题目所涉及的知识点进行归纳总结,让考生对每一个题目所需的知识点有一个直接的认知,方便查漏补缺,完善知识体系。此外,【大纲回顾】一栏为考生提供了过去一年的考试大纲,对考生细致了解考试内容,把握重点将起到重要的作用。【本章小结】则全面回顾了本章所涉及的知识点,有助于考生系统总结,温故知新。

3. 精心设计,完美自测

除上述经典部分之外,编者还在附录中设计了“参考答案及自测表”,对所有真题题目进行题型归类,方便考生归纳总结复习的不足,及时发现并弥补自身知识体系的不足。

考生在使用本书的时候,应该按章节先结合教材、复习全书同步复习相关知识点,同时选取5套左右的真题试卷作为阶段性模拟测验。在完成第一次系统复习后,再选取5套左右的真题试卷进行模拟演练,并仔细填写错误统计表,总结错误类型,进行第二轮专项突破复习,结合我们的《考研数学能力训练——基础篇》完成一次全面的考试能力提升。在完成第二轮复习之后,做完剩下的考研真题卷,再次检查自身的错误,进一步完善自己的知识结构。在每次模拟考试

的时候,应严格按照考试时间进行,稳步提升对考试的时间掌控能力。另外,在每次做完一套考研真题之后,考生应当对自己所做的答卷作一个详细的归纳总结,查清出错原因,看看自己是在基本理论、基本概念和基本方法方面有什么欠缺,还是在做题技巧、知识的综合和灵活运用等方面有所不足。总之,这样的归纳总结过程对于考生的复习来说是十分有必要的,其重要程度与做题无异,考生应当认真对待这一复习环节。

编者力求编写一套更为优秀的辅导丛书,但因水平有限,难免有不足之处,恳请广大考生读者批评指正。

最后,真诚地祝愿广大考生通过辛勤的努力,取得良好的成绩,考入理想的学府。

编 者

2015 年于北京

目 录

第一部分 高等数学

第一章	函数、极限、连续	1
专题一	函数的性质	1
专题二	极限的概念与性质	2
专题三	求解数列极限	3
专题四	求解函数极限	5
专题五	无穷小及其阶的比较	9
专题六	极限中参数的求解	12
专题七	函数的连续性及其间断点类型	13
专题八	函数的渐近线问题	15
第二章	一元函数微分学	19
专题一	导数的定义	19
专题二	导数的物理意义和几何意义	22
专题三	连续与导数的关系	23
专题四	隐函数、反函数及含参量函数的求导	25
专题五	分段函数求导	27
专题六	n 阶导数	28
专题七	函数单调性、极值和最值	29
专题八	拐点与凹凸性	32
专题九	函数零点与方程根的讨论	35
专题十	微分中值定理	36
专题十一	不等式	41
第三章	一元函数积分学	46
专题一	原函数与不定积分的概念和性质	46
专题二	求解不定积分	48
专题三	定积分的概念和性质	48
专题四	求解定积分	52
专题五	变限积分函数的求解	53
专题六	反常积分的性质和计算	56
专题七	一元函数积分学的几何、物理应用	57
第四章	向量代数和空间解析几何	62
专题一	点到平面的距离	62
专题二	曲面方程与旋转体体积	63
第五章	多元函数微分学	68
专题一	偏导数与全微分的基本概念	68

专题二	多元复合函数求导	71
专题三	隐函数求导	74
专题四	求解函数的方向导数与梯度	77
专题五	多元函数微分的几何应用	80
专题六	多元函数的极值与拉格朗日乘数法	82
第六章	多元函数积分学	93
专题一	利用区域对称和函数奇偶性求解二重积分	93
专题二	交换积分次序	95
专题三	二重积分的坐标系变换	98
专题四	三重积分的计算	101
专题五	重积分的应用	103
专题六	第一类曲线积分	105
专题七	第二类曲线积分与格林公式	106
专题八	向量场的散度与旋度	112
专题九	斯托克斯公式求解第二类曲线积分	113
专题十	曲线积分与路径无关	115
专题十一	第一类曲面积分	118
专题十二	第二类曲面积分与高斯公式	120
第七章	无穷级数	128
专题一	级数的概念与敛散性	128
专题二	正项级数与交错级数	131
专题三	幂级数的收敛区间与收敛域	133
专题四	幂级数的和函数	135
专题五	函数的幂级数展开	141
专题六	傅里叶级数	143
专题七	数项级数求和	145
第八章	常微分方程	148
专题一	可分离变量的微分方程	148
专题二	一阶线性微分方程	149
专题三	可降阶的高阶微分方程	150
专题四	线性微分方程的特解和通解	151
专题五	欧拉方程	154
专题六	微分方程的应用	155

第二部分 线性代数

第一章	行列式	158
专题一	数字型行列式的计算	158
专题二	三对角线行列式的计算	160
专题三	抽象型行列式的计算	161
第二章	矩 阵	164
专题一	矩阵的基本运算	164

专题二	矩阵求逆	165
专题三	方阵的幂	166
专题四	分块矩阵与伴随矩阵	167
专题五	初等变换	168
专题六	矩阵的秩	170
专题七	求解矩阵方程	172
第三章	向 量	176
专题一	向量组的线性相关性与线性表示	176
专题二	向量组的等价问题	178
专题三	特征向量与向量组的线性相关性	179
专题四	向量组的秩与极大线性无关组	179
专题五	向量空间的基本概念	180
专题六	过渡矩阵与基	181
第四章	线性方程组	185
专题一	线性方程组解的判定、性质与结构	185
专题二	齐次线性方程组的基础解系与通解	187
专题三	非齐次线性方程组的通解	190
专题四	两方程组的公共解与同解问题	197
第五章	矩阵的特征值和特征向量	200
专题一	矩阵特征值与特征向量的求解	200
专题二	相似矩阵的性质及其判定	202
专题三	方阵的对角化	204
专题四	实对称矩阵及其对角化	207
第六章	二次型	214
专题一	二次型的基本概念	214
专题二	正交变换化二次型为标准形	216
专题三	合同矩阵的判定	221
专题四	正定矩阵与正定二次型	221

第三部分 概率论与数理统计

第一章	随机事件和概率	224
专题一	概率的基本性质	224
专题二	几何概型	224
专题三	条件概率与全概率公式	225
专题四	独立事件与伯努利概型	226
第二章	随机变量及其分布	229
专题一	随机变量的分布函数	229
专题二	连续性随机变量及其概率密度	230
专题三	随机变量的常见分布	231
专题四	随机变量函数的分布	234

第三章 多维随机变量及其分布	237
专题一 二维离散型随机变量的概率分布、边缘分布与条件分布	237
专题二 二维连续型随机变量的概率密度、边缘密度与条件密度	239
专题三 随机变量的独立性与相关系数	242
专题四 正态分布、指数分布与均匀分布	244
专题五 随机变量函数的分布	245
第四章 随机变量的数字特征	254
专题一 数学期望与方差的概念与性质	254
专题二 几种重要分布的期望与方差	257
专题三 协方差与相关系数	259
第五章 大数定律和中心极限定理	265
专题一 切比雪夫不等式	265
专题二 辛钦大数定理	265
专题三 列维—林德伯格中心极限定理	266
第六章 数理统计的基本概念	268
专题一 统计量的数字特征	268
专题二 χ^2 分布、 t 分布与 F 分布	269
第七章 参数估计	273
专题一 矩估计与最大似然估计	273
专题二 区间估计	278
专题三 估计量的评价标准	279
第八章 假设检验	285
专题一 正态总体均值的假设检验	285

附 录

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	287
2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	291
2013 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	296
2012 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	300
2011 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	305
2010 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	309
2009 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	313
2008 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	318
2007 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	322
2006 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	327
2005 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	332
2004 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	337
2003 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	342
2002 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	347
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学一真题	351
后记	355

第一部分 高等数学

第一章 函数、极限、连续

大纲回顾

→ 考试内容

函数的概念及表示法;函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性;复合函数、反函数、分段函数和隐函数;基本初等函数的性质及其图形;初等函数;函数关系的建立;数列极限与函数极限的定义及其性质;函数的左极限与右极限;无穷小量和无穷大量的概念及其关系;无穷小量的性质及无穷小量的比较;极限的四则运算;极限存在的两个准则:单调有界准则和夹逼准则;两个重要极限:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e,$$

函数连续的概念;函数间断点的类型;初等函数的连续性;闭区间上连续函数的性质.

→ 考试要求

1. 理解函数的概念,掌握函数的表示法,会建立应用问题的函数关系.
2. 了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性.
3. 理解复合函数及分段函数的概念,了解反函数及隐函数的概念.
4. 掌握基本初等函数的性质及其图形,了解初等函数的概念.
5. 理解极限的概念,理解函数左极限与右极限的概念以及函数极限存在与左、右极限之间的关系.
6. 掌握极限的性质及四则运算法则.
7. 掌握极限存在的两个准则,并会利用它们求极限,掌握利用两个重要极限求极限的方法.
8. 理解无穷小量、无穷大量的概念,掌握无穷小量的比较方法,会用等价无穷小量求极限.
9. 理解函数连续性的概念(含左连续与右连续),会判别函数间断点的类型.
10. 了解连续函数的性质和初等函数的连续性,理解闭区间上连续函数的性质(有界性、最大值和最小值定理、介值定理),并会应用这些性质.

专题一 函数的性质

1. (05, 数 1, 8 题) 设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数, “ $M \Leftrightarrow N$ ” 表示 “ M 的充分必要条件是 N ”, 则必有

【 】

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数.

(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数.

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数.

(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数.

解析

【思路一】 特例法

取 $f(x) = \cos x + 1, F(x) = \sin x + x + 1$, 则

$f(x) = \cos x + 1$ 是偶函数, 而 $F(x) = \sin x + x + 1$ 不是奇函数, 即 $f(x)$ 是偶函数不能得出 $F(x)$ 一定是奇函数, 排除(B);

$f(x) = \cos x + 1$ 是周期函数, 而 $F(x) = \sin x + x + 1$ 不是周期函数, 即 $f(x)$ 是周期函数不能得出 $F(x)$ 一定是周期函数, 排除(C);

$F(x) = \sin x + x + 1$ 是单调递增函数, 而 $f(x) = \cos x + 1$ 不是单调函数, 即 $F(x)$ 是单调函数不能得出 $f(x)$ 一定是单调函数, 排除(D);

所以选(A) 选项.

【思路二】 由题意得 $F(x) = \int_0^x f(t)dt + C$, 则 $F(-x) = \int_0^{-x} f(t)dt + C$, 令 $s = -t$ 得

$$F(-x) = \int_0^x -f(-s)ds + C = \begin{cases} \int_0^x f(t)dt + C, & f(x) \text{ 为奇函数,} \\ -\int_0^x f(t)dt + C, & f(x) \text{ 为偶函数.} \end{cases}$$

由上式可知, 当 $C \neq 0$ 时, (B) 选项不成立, 而(A) 选项成立, 故选(A) 选项.

知识点归纳

1. 在做选择题时, 可以利用特例法, 排除其他错误选项, 简单快速地得到答案.

2. 本题【思路二】得到的结论为: 设 $f(x)$ 为连续函数, 则当 $f(x)$ 为奇函数时, $\int_0^x f(t)dt$ 为偶函数, 对于任意的常数 C , $f(x)$ 的全体原函数 $\int_0^x f(t)dt + C$ 为偶函数; $f(x)$ 为偶函数时, $\int_0^x f(t)dt$ 为奇函数, 只有当常数 $C = 0$ 时, $f(x)$ 的原函数 $\int_0^x f(t)dt + C$ 为奇函数, 做选择题和填空题时可以直接拿来用.

专题二 极限的概念与性质

2. (03, 数1, 二(2) 题) 设 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ 均为非负数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} c_n =$

∞ , 则必有

【 】

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 成立.

(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 成立.

(C) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 不存在.

(D) 极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不存在.

解析

【思路一】 举反例利用排除法. 由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, 很自然地能想到取数列 $a_n = \frac{1}{n}$, 同样的可

以想到取 $b_n = 1, c_n = n$ 使得所取数列满足题意. 当 $n = 1$ 时, 排除(A), (B). 显然, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n = 1$, 极限存在, 排除(C) 选项. 故正确答案为(D) 选项.

【思路二】 直接证明,根据定义可知数列极限与数列前面有限项的大小无关,不能以这种当 n 充分大时的情形来比较数列各项的大小,故排除(A),(B). 而 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n c_n$ 是无穷小与无穷大相乘, $0 \cdot \infty$ 为未定型,不能判断极限存在与否,排除(C), $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n c_n$ 不是未定式,其结果为无穷大,故正确答案为(D) 选项.

知识点归纳

对于概念性的选择题来讲,平时多积累一些常见的例子,有助于考生在考试时快速做出判断,节省考试时间.

1. 对于数列的极限,极限值与数列前面有限项的大小无关,不能以此来说明所有项的情形. 如以上的(A),(B) 选项.

2. 要注意未定型 $\left(\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, 0 \cdot \infty, 1^\infty, 0^0, \infty^0\right)$ 的极限是不能确定的,可能存在也可能不存在.

3. 可以确定四则运算极限的情形有:无穷与无穷之间的乘运算为无穷;无穷与有界之间的加、减都为无穷.

专题三 求解数列极限

3. (10, 数1, 4 题) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} =$

【 】

(A) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^x \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

(C) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y)} dy.$

(D) $\int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy.$

解析

【思路一】 对题设的极限式进行恒等变换

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[\frac{1}{1+\frac{i}{n}} \cdot \frac{1}{n} \right] \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \left[\frac{1}{1+\left(\frac{j}{n}\right)^2} \cdot \frac{1}{n} \right], \end{aligned}$$

由定积分的定义可将极限转化为定积分,得

$$\text{原式} = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} \cdot \int_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{dy}{(1+x)(1+y^2)}.$$

所以选(D) 选项.

【思路二】 根据题目以及选项的形式,将和式转化为二重积分的积分和.

设正方形区域 $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$, 二元函数 $f(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$; 若将区域 D 的长宽分别分成 n 等份, 即将区间 $x \in [0, 1]$ 与 $y \in [0, 1]$ 分成 n 等份, 这样就把 D 分成 n^2 个小正方形且每个小正方形的面积为 $\frac{1}{n^2}$, 又因为可以把

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{1}{\left(1+\frac{i}{n}\right)\left[1+\left(\frac{j}{n}\right)^2\right]} \cdot \frac{1}{n^2}$$

看成函数 $f(x, y) = \frac{1}{(1+x)(1+y^2)}$ 的二重积分的一个积分和, 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)} = \iint_D \frac{d\sigma}{(1+x)(1+y^2)} = \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{1}{(1+x)(1+y^2)} dy$$

故选择(D) 选项.

4. (08, 数1, 4 题) 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列, 下列命题正确的是 【 】

- (A) 若 $\{x_n\}$ 收敛, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛. (B) 若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\{f(x_n)\}$ 收敛.
(C) 若 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 则 $\{x_n\}$ 收敛. (D) 若 $\{f(x_n)\}$ 单调, 则 $\{x_n\}$ 收敛.

解析

对于(A) 选项: 由数列 $\{x_n\}$ 收敛不能推出 $\{x_n\}$ 单调, 也得不到函数 $f(x_n)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调, 所以 $\{f(x_n)\}$ 不一定收敛, 故(A) 错误;

对于(B) 选项: 由数列 $\{x_n\}$ 单调可以推出函数 $f(x_n)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调, 又 $f(x)$ 有界, 所以 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 故(B) 正确;

对于(C) 选项: 可令 $x_n = n$, 使得数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛, 但 $\{x_n\}$ 不收敛, 故(C) 错误;

对于(D) 选项: 同样可令 $x_n = n$, 由于 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调, 可知数列 $\{f(x_n)\}$ 单调, 但 $\{x_n\}$ 不收敛, 故(D) 错误.

故选择(B) 选项.

知识点归纳

数列的单调有界收敛准则:

1) 如果数列 $\{x_n\}$ 单调下降有下界, 即存在一个确定的常数 m , 使得对于一切的 n 都有 $x_n \geq m$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

2) 如果数列 $\{x_n\}$ 单调上升有上界, 即存在一个确定的常数 m , 使得对于一切的 n 都有 $x_n \leq m$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在.

5. (06, 数1, 16 题) 设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0 < x_1 < \pi, x_{n+1} = \sin x_n (n = 1, 2, \dots)$

(I) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ 存在, 并求其极限; (II) 计算 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解析

(I) 利用数列单调有界收敛准则来判断极限的存在性.

易知当 $0 < x < \pi$ 时, 有 $\sin x < x$, 而 $0 < x_2 = \sin x_1 < x_1 < \pi$, 利用归纳证明可得

$$0 < x_{n+1} = \sin x_n < x_n < \pi,$$

即数列 $\{x_n\}$ 单调下降且有下界, 所以数列 $\{x_n\}$ 的极限存在, 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = A$, 对方程 $x_{n+1} = \sin x_n$ 两边取极限有 $A = \sin A$, 可得 $A = 0$.

(II)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{x_n^2} \ln \frac{\sin x_n}{x_n} \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \exp \left\{ \frac{1}{x_n^2} \ln \left(1 + \frac{\sin x_n}{x_n} - 1 \right) \right\} \\
&= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{x_n^2} \left(\frac{\sin x_n}{x_n} - 1 \right) \right\} \\
&= \exp \left\{ \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin x_n - x_n}{x_n^3} \right\}
\end{aligned}$$

转化为函数极限,由(I)知 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$, 又

$$\exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3} \right\} = \exp \left\{ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{3!}x^3 + o(x^3)}{x^3} \right\} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{x_{n+1}}{x_n} \right)^{\frac{1}{x_n}} = e^{-\frac{1}{6}}.$$

知识点归纳

遇到证明如本题这种递推数列极限的问题时,一般应想到利用数列单调有界收敛准则求解.其关键在于判断数列的单调性与有界性.在已证明极限存在的基础上再利用所给方程,等式两边同时取极限,即可得到所求数列极限.

专题四 求解函数极限

6. (10, 数1, 1题) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x =$

【 】

(A) 1.

(B) e.

(C) e^{a-b} .

(D) e^{b-a} .

解析

【思路一】 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$$\begin{aligned}
\text{原式} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-a)(x+b) + (a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right]^x \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right]^x \\
&= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{(a-b)x + ab}{(x-a)(x+b)} \right]^{\frac{(x-a)(x+b)}{(a-b)x + ab} \cdot \frac{x[(a-b)x + ab]}{(x-a)(x+b)}} = e^{a-b}
\end{aligned}$$

故正确答案为(C)选项.

【思路二】 遇见幂指函数求极限的问题,可以直接利用公式

$$\lim u^v = e^{\lim v \ln u} \quad (\text{其中 } u \rightarrow 1, v \rightarrow \infty).$$

即将原先求幂指数极限的问题转化成求乘积 $\lim v \ln u$ 的极限问题. 所以有

$$\begin{aligned}
\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} e^{x \ln \frac{x^2}{(x-a)(x+b)}} \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln \left[1 + \frac{x^2}{(x-a)(x+b)} - 1 \right]} \\
&= e^{\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} - 1 \right]}.
\end{aligned}$$

转化为求解 $\lim_{x \rightarrow \infty} x \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} - 1 \right]$ 的问题,而

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} - 1 \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(a-b)x^2 + abx}{x^2 + (b-a)x - ab} = a - b.$$

故原式 = e^{a-b} . 所以正确答案为(C) 选项.

【思路三】

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x^2}{(x-a)(x+b)} \right]^x &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{(x-a)(x+b)}{x^2} \right]^{-x} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{a}{x} \right)^{-x} \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{x} \right)^{-x} \\ &= e^a \cdot e^{-b} = e^{a-b}. \end{aligned}$$

知识点归纳

幂指函数求极限通常有两种方法:

- 1) 利用 $\lim u^v = e^{\lim v \ln u}$, 将原极限化为求 $\lim v \ln u$;
- 2) 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

【思路三】的方法不易想到, 但当分子比分母简单时一般采用此方法.

7. (15, 数1, 9题) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解析

此题考查 $\frac{0}{0}$ 型未定式极限, 可直接用洛必达法则, 也可以用等价无穷小替换.

【思路一】 洛必达法则

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-\sin x}{\cos x}}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\tan x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

【思路二】 等价无穷小替换

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + \cos x - 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

8. (06, 数1, 1题) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln(1+x)}{1 - \cos x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解析

本题属于 $\frac{0}{0}$ 型极限的求解问题, 根据常见的等价无穷小替换即可. 这里用到 $\ln(1+x) \sim x$,

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \text{ 所以原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2}{\frac{1}{2}x^2} = 2.$$

知识点归纳

一些常见的等价无穷小

当 $x \rightarrow 0$ 时有, $\sin x \sim x, \tan x \sim x, \arcsin x \sim x, \arctan x \sim x,$

$$1 - \cos x \sim \frac{1}{2}x^2, \ln(1+x) \sim x, e^x - 1 \sim x, (1+x)^a - 1 \sim ax.$$

注: 这些等价替换只能在乘、除运算中运用, 而不能在加、减运算中运用.

9. (03, 数 1, (1) 题) $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

解析

【思路一】 幂指函数求极限, 将原式转化

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)}}.$$

由等价无穷小 $\ln(1+x^2) \sim x^2 (x \rightarrow 0)$, 结合洛必达法则有

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln \cos x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\sin x}{2x} = -\frac{1}{2}.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

【思路二】 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$. 原式可以有如下转换:

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)}}.$$

转化为求解 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)}$ 的问题, 而

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{\ln(1+x^2)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}} = e^{-\frac{1}{2}}.$$

10. (11, 数 1, 15 题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}}.$

解析

【思路一】 由 $\lim u^v = e^{\lim v \ln u}$ 得

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{1}{e^x - 1} \ln \frac{\ln(1+x)}{x}} = e^{\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \ln \frac{\ln(1+x)}{x}}.$$

转化为求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \ln \frac{\ln(1+x)}{x}$ 的问题, 而

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \ln \frac{\ln(1+x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \ln \left\{ 1 + \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] \right\} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right]. \end{aligned}$$

通分后利用洛必达法则得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x} - 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-x}{2x(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-1}{2(1+x)} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

所以

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^x - 1} \ln \frac{\ln(1+x)}{x} = -\frac{1}{2}.$$

故 原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$.

【思路二】 利用重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} \right]^{\frac{1}{e^x-1}} &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ 1 + \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] \right\}^{\frac{\frac{1}{\ln(1+x)-1} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right]}{e^x-1}} \\ &= e^{\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] \frac{1}{e^x-1}} \end{aligned}$$

转化为求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] \frac{1}{e^x-1}$ 的问题, 计算方法同【思路一】

所以 原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$.

【思路三】 同【思路一】或【思路二】, 转化为求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] \frac{1}{e^x-1}$ 的问题, 而 $\ln(1+x)$ 的泰勒展开式为

$$\ln(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + o(x^2), x \rightarrow 0.$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{\ln(1+x)}{x} - 1 \right] \frac{1}{e^x-1} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{2}x^2 + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

故原式 $= e^{-\frac{1}{2}}$.

知识点归纳

记住一些常见函数如 $e^x, \sin x, \cos x, \ln(1+x)$ 和 $(1+x)^a$ 在 $x=0$ 点的泰勒展开式, 并能很熟练地写出展开式的前 2、3 项有时会使解题更加快捷.

11. (08, 数 1, 15 题) 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4}$.

解析

【思路一】 如果利用等价无穷小 $\sin x^4 \sim x^4$, 将 x^4 换成 $\sin^4 x$ 后, 可大大简化运算.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{\sin^4 x} \\ &\stackrel{\text{令 } \sin x = t}{=} \lim_{t \rightarrow 0} \frac{t - \sin t}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1 - \cos t}{3t^2} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

【思路二】 可以利用等价无穷小 $\sin x \sim x (x \rightarrow 0)$, 并结合泰勒公式进行计算. 因为

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\sin x - \sin(\sin x)] \sin x}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \sin(\sin x)}{x^3}$$

利用泰勒公式和等价无穷小 $\sin x \sim x (x \rightarrow 0)$ 替换得

$$\sin(\sin x) = \sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + o(x^3)$$

故

$$\text{原式} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \left[\sin x - \frac{1}{6} \sin^3 x + o(x^3) \right]}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} \sin^3 x + o(x^3)}{x^3} = \frac{1}{6}.$$