

高等学校教材

理论力学

周又和 编著

高等教育出版社

高等学校教材

L I L U N L I X U E

理论力学

周又和 编著

高等教育出版社·北京

内容提要

本书是理论力学国家级精品课程的配套教材。本书以培养初学者掌握力学分析方法为主要目标,包括受力分析、力系简化、平衡力系分析、运动描述、动力学分析和分析力学初步等基础性内容。

本书分十二章。第一章为解析几何初步;第二、三章分别介绍力系分析和力系简化;第四章介绍各类静力学的分析与计算方法;第五、六章分别介绍质点(系)和刚体运动的分析方法;第七章至第十一章主要介绍动力学的基本分析方法、基本理论及主要应用;第十二章介绍现代力学分析的工具——分析力学的基本概念、建立动力学方程的途径和方法。作为分析力学的应用之一,本书还介绍了平衡稳定性分析的主要方法。

本书的主要特点有:(1)对全书各部分内容既进行了严格的表述与推证,又强调了力学分析的直观性和简明性;(2)对内容体系进行了适当调整,使之更加协调完整;(3)增加或修订了一些必要的基本概念和结论;(4)采用由浅入深、循序渐进的方式安排各章节内容;(5)结合教材内容对与现代科学技术发展相关联的部分给予了提示。

为了便于学习本书内容,书中精选了大量相关例题、思考题和习题供读者使用。本书可供力学、机械、土建等工科专业学生学习理论力学课程使用,亦可供从事理论力学课程教学或相关科研人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

理论力学/周又和编著. —北京:高等教育出版社,2015.5

ISBN 978-7-04-042233-7

I. ①理… II. ①周… III. ①理论力学-高等学校-教材 IV. ①O31

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 037685 号

策划编辑 黄 强	责任编辑 黄 强	封面设计 王 鹏	版式设计 范晓红
插图绘制 杜晓丹	责任校对 刘 莉	责任印制 毛斯璐	

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街 4 号
邮政编码 100120
印 刷 北京北苑印刷有限责任公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 36.25
字 数 660 千字
购书热线 010-58581118

咨询电话 400-810-0598
网 址 <http://www.hep.edu.cn>
<http://www.hep.com.cn>
网上订购 <http://www.landaco.com>
<http://www.landaco.com.cn>
版 次 2015 年 5 月第 1 版
印 次 2015 年 5 月第 1 次印刷
定 价 52.00 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换
版权所有 侵权必究
物 料 号 42233-00

序 言

理论力学是力学、机电、船舶、航空航天、土建等专业学生学习力学知识的第一门课程。随着科学技术的发展,力学知识已成为研究各类工程技术问题与自然现象形成与发展机制的重要工具之一。

理论力学既强调基础理论(如通过引入公理和以此为基础开展数学推理分析与计算等),又强调工程应用(如针对工程中的力学问题进行演算等)。由于理论力学教材大多面向工程类专业,因此多数教材更强调直观训练;少数理科院校和部分设有力学专业的工科院校编写的理论力学教材着重强调理论的分析与计算,但在直观训练方面又略显不足。为满足国家对高水平创新型力学人才培养的要求,在本科生的力学教学中应贯穿教学与科研相结合的思想。因此,力学教材的建设在保持自身体系完整和准确的同时,要体现教学与科研、工程应用的有机关联。

考虑到上述因素和理论力学知识体系的科学认知规律,本书对内容体系进行了系统改革,在保证教材体系的完整性、概念的准确性、推导的严谨性的同时,将知识点与科学研究的思维方法进行融合,并对相关科学前沿问题作了适当介绍。

本书作为理论力学国家级精品课程建设的一部分,以质点(系)和刚体(系)的力学系统为研究对象,完整地介绍了进行力学分析的理论建模,以及基本定量分析方法等基础内容,主要包括受力分析、力学系统的运动描述,以及运动状态的力学分析等。掌握这些基本的力学原理及分析方法后,能为后续力学课程的学习奠定基础,同时也可以对物体的整体力学特性进行分析与研究。

本书的主要编写特点如下:

1. 关于教材的理论体系划分。目前理论力学课程主要划分为三大部分:静力学、运动学和动力学,部分教材还包含了分析力学的基础部分。总体上看,这样的划分比较合理,然而也容易造成学生思维定势上的误解,以为受力分析和力系简化仅限于静力学^[1]。本书将受力分析与力系简化从静力学中独立出来,对于读者准确把握基本概念是有益的。

2. 关于理论力学的公理体系构成。理论力学的公理体系主要由五个公

理组成。在力系简化中主要用到二力平衡公理、加减平衡力系公理和作用与反作用公理。不管静力学问题还是动力学问题,运用这三个公理,即可对任意力系进行简化分析^[1]。因此在本书中,力的合成平行四边形公理和变形体刚化原理没有列入公理体系中,主要理由为:力的合成可直接采用解析几何的矢量加法运算规则;对于刚化原理,一是概念描述不准确将导致静力学分析上的混乱,二是由刚化原理导出的静力平衡条件对于可变形体是必要条件而非充分条件的结论是不正确的,否则材料力学和弹性力学等列出的平衡方程就失去了理论基础。

3. 本书运用了解析几何的矢量运算来进行数学表征和公式的推导,部分用到线性代数、微积分等数学知识。内容采用从一般到特殊的方式进行表述,这样做能使初学者准确把握课程内容。为此,本书第一章简要给出了书中用到的解析几何分析方法及主要结果,为本书后续的严谨数学表述奠定基础。

4. 针对当前部分理论力学教材中存在一些内容的不准确表述或推证,本书给出了一些相关基本概念的准确表述和严格的数学推证。主要有如下几个方面:(1) 三力平衡汇交定理;(2) 空间力系平衡方程表征的多种方式;(3) 平衡方程的独立性问题与可解性问题;(4) 刚体一般运动基点法的理论基础;(5) 动力学三大普遍定理动力学方程的独立性问题;(6) 重心概念的严格表述;(7) 碰撞恢复系数;(8) 指出了考虑摩擦的力学问题的本质为导致力学方程的非线性;(9) 对于动矩心(含质心和速度瞬心等)的动量矩定理给出了完整推导;(10) 定点转动刚体转动的复合运动;(11) 特殊力学运动实现的力学条件。

5. 给出了一些可供开展科学研究的课题。在进行概念与结论严谨推导的过程中,本书提示了一些目前某些领域关注的若干科学研究课题。例如,(1) 正碰撞基本模型是目前颗粒流或离散单元法的基础之一,而恢复系数随碰撞速度变化是目前基本模型关注的基础性研究课题;(2) 考虑摩擦的斜碰撞问题;(3) 在严格意义上,重心与质心是不重合的;(4) 在各章末给出了思考题,读者在提高知识能力的同时,可加强对科学问题的了解和思考。

6. 为了尽可能反映本书的内容与其他相关知识领域的关联,书中给出了适当的表述和索引文献,便于读者思考和知识扩展。

如何在新世纪培养工程技术和科学研究的高水平创新型力学人才,是摆在力学教育工作者面前的艰巨任务。理论力学作为一门基础课程,在教学实践中肩负有重大的责任与使命。作者在20年前就上述问题开展了一些思考与研究。本书是在2007年着手申报国家精品课程时开始编写的,期待本书能为读者学习力学建模及其基本分析方法提供一本较完整的教材和参考书。

西北工业大学支希哲教授仔细审阅了全稿,并提出了很多宝贵的意见,特此致谢。

由于时间仓促,书中错误在所难免,恳请读者给予指正,不胜感激。

周又和 于兰州大学

2015年1月

目 录

绪论	1
第一章 解析几何概要	7
1.1 矢量及其基本运算	7
1.2 基矢与坐标系	10
1.3 坐标变换	13
1.4 矢量导数	16
思考题	23
习题一	23
第二章 受力分析	24
2.1 力的基本概念	24
2.2 约束及约束力	28
2.3 受力分析和受力图	35
思考题	43
习题二	44
第三章 力系的简化与计算	47
3.1 力系简化的基本公理	48
3.2 汇交力系的合成	50
3.3 力矩与力偶系的合成	54
3.4 空间任意力系的简化	65
3.5 力系简化的应用——重心的概念及计算	76
思考题	86
习题三	88
第四章 力系的平衡与计算	95
4.1 平衡方程——静定与静不定问题	96
4.2 平面力系的平衡	104
4.3 空间力系的平衡	123
4.4 考虑摩擦的平衡问题	128

思考题	146
习题四	146
第五章 质点与刚体的基本运动学	164
5.1 质点运动的表征方式	164
5.2 刚体的平移	180
5.3 刚体的定轴转动	182
5.4 刚体的定点运动	188
思考题	196
习题五	197
第六章 质点与刚体的复合运动学	206
6.1 两参考系中运动描述的基本概念	206
6.2 质点复合运动的速度与加速度合成定理	208
6.3 刚体一般运动的基点法	227
6.4 刚体的平面运动分析	231
6.5 刚体转动的合成运动	249
思考题	264
习题六	265
第七章 质点(系)动力学	280
7.1 惯性参考系与非惯性参考系	280
7.2 惯性参考系中的质点动力学	281
7.3 惯性参考系中的质点系动力学	295
7.4 非惯性参考系中的质点(系)动力学	299
思考题	307
习题七	308
第八章 动力学三大普遍定理	320
8.1 动量定理	320
8.2 转动惯量与惯性积——转动惯量张量	333
8.3 动量矩定理	352
8.4 动能定理	367
8.5 动力学三大普遍定理的综合运用	389
思考题	399
习题八	400
第九章 刚体动力学	426
9.1 刚体空间运动的一般动力学方程	426

9.2 刚体的平移	428
9.3 刚体的定轴转动	429
9.4 刚体的平面运动	432
9.5 刚体的定点运动及规则进动	436
思考题	442
习题九	443
第十章 碰撞动力学基础	449
10.1 碰撞的基本概念	449
10.2 刚性碰撞模型的一般动力学方程	456
10.3 两球体的碰撞	459
10.4 刚体的碰撞与定轴转动刚体的碰撞中心	470
思考题	477
习题十	478
第十一章 达朗贝尔原理——动静法	483
11.1 达朗贝尔原理	484
11.2 刚体基本运动的动静法	487
11.3 定轴转动刚体对轴承的动压力及其消除条件	493
思考题	496
习题十一	497
第十二章 分析力学基础	504
12.1 约束与虚位移的基本概念	504
12.2 广义坐标与广义力	511
12.3 虚位移原理	513
12.4 动力学普遍方程——第一类与第二类 Lagrange 动力学方程	525
12.5 平衡稳定性的基本概念与分析方法	537
思考题	553
习题十二	554
参考文献	564

绪 论

力学(mechanics)是研究物质机械运动规律的科学。物体的机械运动是指物体的空间位置随时间的变化,它包括物质的平移、转动、流体的流动和固体的变形等多种运动或变形形态,也包括物体相对一参考系静止不动这一特殊的运动状态^[2-7]。

机械运动既是人类最早认识的物质运动形态,也是自然界广泛存在的一类最普遍、最基本的运动形态。自宇宙形成以来,宇宙中各星体的形成和演化、自然界的地貌形成与时空演化、滑坡、泥石流、台风、气候变化、地震等无不与力学的研究密切相关。自从有了人类社会以来,人类为了生存环境的改善(包括使用的生产工具、交通运输工具和生活条件如住房等),就开始形成了对“力”及其所产生影响的认识与实践活动。在早期的科学萌芽中,为了解释自然现象和推动人类生存环境的改善,“力”的概念及其科学研究一直是伴随着哲学体系的建立而形成的。随着人类社会进入农业社会,对天气现象、昼夜转换、季节变化规律的认识提出了需求。在长期的人类社会活动与实践中,为了规范人类社会的活动,天文历法成为人类认识天体运动的首要需求,这也正是力学进入定量研究的开端,并逐渐将对“力”的认识及其规律的研究上升到精确化的第一门定量科学。进入工业化社会后,随着需求的增加,力学也就成为自然科学中最先形成的较为完备的一门学科。自17世纪以来,力学就成为研究宏观低速物质运动的一门完整的科学体系,成为推进近现代工业、国防、人类社会生活必不可少的基础性学科。在早先,有关力学的研究归属于物理学的范畴,进入20世纪后,随着物理学向微观尺度和高速(即接近光速)物质运动规律研究的拓展,力学学科的研究就从物理学中独立出来,主要解决宏观低速运动物质中所存在的一些共性或特殊对象的力学科学问题。

在现代科学技术中,力学同时又是与各工程技术具有广泛联系的一门技术学科,它为近代工程技术的发展提供了重要的基础理论和研究方法。由于机械工程、土木工程、桥梁工程、船舶工程、航空航天工程、道路交通工程、车辆工程、水利工程、化工工程、矿山工程、岩土工程等大量工程设计和研究的需要,固体力学(包括材料力学、结构力学、弹性力学、塑性力学等)和结构动力学(振动理论、

非线性振动、非线性动力学理论等)等得到了长足的发展。在航海、航空航天、水力发电、渗流、大气科学等学科的发展与推动下,流体力学得以形成和完善(包括水动力学、空气动力学等)。随着自然灾害对人类的破坏力度的增强,大量的自然灾害(如台风、暴雨、洪水、滑坡、雪崩、泥石流、地陷、地震、风沙、泥沙等)的形成与发展过程无不与力学的研究密切关联在一起。由于这些自然灾害对象的复杂性,并且同时涉及流体与固体介质(通常称之为多相介质),它们对力学的知识体系提出了更高的新要求,需要对所谓非连续介质的散体力学或多相介质的连续体力学开展力学基础性研究,这些到目前为止仍然没有获得有效解决。与此同时,在人类认知向微观物质世界、宇宙巨观世界拓展的同时,力学学科的分析方法与基础理论知识也在向各基础学科渗透,如物理学科中当前的热点课题——微机械与纳米结构力学特性的实验测量与表征、材料科学中各类材料力学性能的表征、化学学科中的化学动力学过程机制的揭示(目前称其为物理化学)、生命过程中的生物力学或生物医学工程、地学领域的地质过程(包括地貌演化与气候演变等)、天文学中的天体形成与演化、月球对地球引力导致的潮汐或固体潮现象(后者为地震研究中所关注),等等,其科学规律的有效揭示也都与其力学规律紧密联系在一起。

力学学科的发展是始终与人类生产活动紧密关联在一起的,遵循从实践出发、经抽象上升到理性认识、再将理性认识在实践中检验后用来指导实践的认知规律^[8]。在古代,人们在农业生产、建筑、运输等方面逐渐积累了一些初步的力学知识。例如,我国的墨翟及其学派的著作《墨经》里,就有关于力、重心等概念的叙述。古希腊的亚里士多德和阿基米德等也总结了不少关于杠杆平衡和浮力等力学规律。此后,人们在生产实践中不断总结了一些力学规律,但总体比较零星与粗糙。随着历法对天文观测的需要,在提高观测精度的需求下,一方面促进了观测手段和观测仪器的发展,另一方面也从这些大量的有效观测资料中总结出了一些基本的规律。例如,在哥白尼的工作和第谷·布拉赫所积累的二十多年天文观测资料,以及其他观测资料基础上,开普勒将行星运动总结归纳出著名的行星运动三定律。在此基础上,著名科学家牛顿总结出了描述量引力体之间相互作用力的著名万有引力定律(即其引力大小与引力体的质量成正比,与两引力体距离的平方成反比)。此后,由于定量分析的需要,牛顿在建立微积分这一当时最新数学工具的同时(与数学家莱布尼茨同时独立完成),总结出了牛顿三定律,从而奠定了力学的基本理论框架,也使力学成为一门“精确”的科学。在牛顿力学基础上,法国青年科学家勒威耶根据当时的观测资料,运用万有引力定律和牛顿力学的基本方程,经过计算发现太阳系中除了已被认知的七大行星外,还应有一颗大行星(就是后来所称的海王星)。他在1846年公布这一结果

后,没过多久伽勒就在他指定的方位上观测到了海王星,从而有力地证明了万有引力定律的正确性。

“力”是自然科学研究中最早抽象为科学概念之一的基础物理量,它是人类社会为了揭示自然规律与开展有效工程实践等认知活动中使用最为广泛的一科学词汇。这一抽象概念的提出为自然科学研究的形成和发展、乃至对现代科学技术的发展一直起着推动与促进作用。我们知道,大自然各类现象的演化是物质世界的时空变化过程,而这些自然现象的时空演化无不与“力”紧紧联系在一起。由于“力”是看不见、摸不着的,亦即不可直接测量,人们只能从这些大量的时空变化过程与生产实践的可观测结果中,感知并最终发现导致各类自然现象演化过程发生变化所起核心作用的原因是由某种“力”所主导,而这种“力”是不能直接测量的。从而根据大量的可观测现象就抽象出了“力”的概念,再将这一抽象“力”与可观测自然现象演化过程联系在一起,进而就产生了力学的科学研究方法与研究体系。为了使这一研究可行,首先需要对于物质某些运动量实现有效测量(包含物体的位置、运动轨迹、速度和加速度等的直接测量),其次需要有连接“力”与运动量的数学关系式(即数学方程),最后需要有对所建立数学方程的有效求解方法。由此构成了目前定量科学研究中的三个主要途径:实验研究、理论建模、定量分析。由于自然现象的多样性和复杂性,从而导致决定这些现象的力的表征上的多样性和复杂性。因此,对于一力学系统的建模也就包括了其力学系统中力的表征方式和力学方程的表征,如流体介质中力随运动特性变化规律的表征、固体颗粒之间相互作用力的表征,等等。而这些力的表征往往需要开展大量的可重复实验,并在此基础上进行行之有效的抽象,才可能得到有效的规律。在一力学系统上升到数学方程表征后,就需要对其力学方程所能描述的规律和特征开展定性与定量分析,亦即对数学方程的解的特性开展理论分析和计算求解研究。如果其定量预测结果能与可测物理量(或力学量)相近,则表明对其力学系统所建立的模型是有效的,进而可以以此为基础实施其力学的设计应用等;反之,就需要在其研究途径中对某些部分进行修正,直到满足解决实际问题的要求为止。当力学的基本研究途径与研究系统的合理性确立后,就可以在此力学理论体系下开展系统的理论研究,以实现对工程问题的功能性与安全性进行有效设计,后者就是力学成为各类工程科学研究的基础之所在。对于不同的自然与工程问题,其力学研究的难易程度是不一样的,而所谓难易也是相对于认知水平而言的。可以毫不夸张地讲,目前人们仍未解决的绝大部分问题,仍然是其中力的表征规律没有得到有效解决,当然也有相当一部分问题是数学工具上的困难。科学研究的目标就是要解决人类还没有认知的部分,工程应用就是利用人类认知的部分去改造世界。当然,在现实世界中(包括大量的

工程问题),虽然科学技术水平已得到相当程度的发展,但是仍存在大量未被认知的部分,进而影响着工程应用的有效性。一方面可能其基本科学规律(如力的表征方法)由于问题的复杂性而未能被有效揭示(如地球深部的介质受力特征和物质形态等),另一方面可能存在数学描述与求解上的极大困难(如风沙、泥沙、泥石流、非线性系统的数学求解、多场耦合导致的大规模科学计算上的实现等),这些均需要在实验、数学与科学计算上开展深入的基本研究才可能使问题得到有效解决。有些问题需要这些研究手段与方法中的某一类就可以解决,有些则需要它们的联合运用才可能使问题获得解决。当研究的问题因其复杂性而难以上升到基本方程描述的定量化阶段时(很多未被认知的实际问题多数如此),其研究方法往往是通过实验测量、野外观测等来进行的,如化学、生物学等早期的研究均是如此,它是通过实验测量或野外观测中得到规律,并通过统计或拟合来实现有关规律的揭示的。如果一研究问题可以上升到定量化阶段(即可以用数学方程描述),则对其数学方程实行有效的定性分析和定量求解就是必要的,而且一旦其模型被确立为合理的,则这一研究对于现实的指导性就能发挥出更大的作用,而此时数学基础理论与方法以及数值科学计算就成为非常重要的途径和工具,由此也促进了数学学科与计算科学的发展。力学学科就是伴随着人类认知活动的深入而逐渐形成与发展起来的。到目前为止,对于均匀固体和流体,其线性问题(即在数学上满足叠加原理)的力学认知已相对较为完善,其理论框架和数学分析方法也较为成熟。但对于非均匀介质、多相介质、多场耦合与非线性等力学问题,远没有达到较为成熟的地步,仍然是当前相关领域理论与工程学科关注的基础性课题。

科学研究是人类认识自然与改造自然的一种创新性认知活动,它以揭示新现象、发现新规律、解决新问题为主要目标。一方面随着人类认知范围的扩大,一些新的学科如化学、生物、计算机科学、材料科学等得以形成与发展;另一方面,随着认知能力与观测手段的发展,原有学科也在向精细化方向发展。可以这样来讲,科学研究活动就是人类社会由简单到复杂、由少到多、由粗到精的认识发展过程。例如,在物理学或力学中的最基本的长度与时间量,其精度的提高不仅推动了科学研究的发展,而且也推动了相关技术的发展。在早期,人们是用弓来测量长度,并以此来度量田地的面积,木匠用择叠尺或直尺测量长度等。随着机械工业的产生与发展,这类测量精度满足不了机械零件加工的需要,于是就有了千分卡的测量原理及测量仪器。而随着大地测量和航天航空测量的需求,要求在大尺度范围内实施有效的测量,就发展了半站仪、全站仪和激光测距仪等测量仪器及其测量方法。为了确定长度测量的标准,早先是采用伦敦附近的子午线长度的400万分之一为1 m,此后制成箔铍合金标准以保证其足够的精度。

随着物理学的发展,目前更精确的定义是采用光在真空中($1/299\,792\,458$)s的时间间隔内所经路程的长度为1 m,使其精度上升到 10^{-13} m,从而使天文测量和航天测量等的精度达到相当高的水平。又例如,在早期人们为了计时需要,采用的方法有沙漏、滴水等简单方法。我们知道,计时主要与一现象的周期性相联系在一起,即对于同一周期现象其耗时相同,于是昼夜分明、四季循环这些自然现象就可以作为时间的度量。问题在于如何将这些自然周期的时间进行有机联系,以及如何有效准确地度量时间来满足人类的日常生产活动。随着工业化的到来,这种需求日益迫切。正是机械工业的发展,同时随着天文观测精度的提高及其行星运动规律的揭示,特别有关重力加速度的规律及单摆力学规律的揭示,有力地促进了钟表行业的建立与发展,使计时精度得到了很大提高。随着航天与天文测量的需要,也随着物理学的发展,对高精度标准时间提出了更高的要求。如我国西安授时台的建立,为我国各领域提供了高精度的统一时间,保证了我国社会发展、科学研究与高技术的需要。其他科学技术的发展,与此相类似,需要在追求精度的过程中才能得到发展和提高。

理论力学是学习力学知识的第一门基础课程,它的主要目标是引导初学者掌握开展力学分析的理论建模及基本定量分析的方法,为后续力学课程的学习奠定基础。在此前提下,理论力学课程的主要研究对象为质点与刚体及其形成的力学系统,主要任务是针对实际问题进行抽象处理,并建立可供分析的力学模型及其基本的分析方法。为此,本书的主要内容包括:受力分析与力系简化、静力平衡分析、描述物体运动的运动学、在受力作用下力学系统运动改变的动力学和分析力学初步等基本内容。全书以矢量运算的解析几何这一数学工具为基础,通过对各基本定理的表述及其数学公式的表征,力求做到体系完整、概念表述准确、数学推导严谨。在定量分析方法上,主要以大学一年级学生的数学知识(含线性代数、高等数学和常微分方程)为基础,通过解算不同类型的例题和习题,来增强初学者对各定理应用的理解和掌握,从而达到提出问题、分析问题和解决问题等基本能力的目标。在本课程的学习中,一方面需要从宏观层面掌握和了解各类力学系统的基本特性、准确判定一力学系统的类型和特征;另一方面也需要对被判定的力学系统,通过准确和灵活应用相关的力学定理及其数学工具,开展有效的定量分析来实现对其力学特征的定量分析,并得到所需的定量结果。为此,力学分析的一般途径为:

- (1) 针对实际力学问题开展受力分析,画出可供力学分析的受力图;
- (2) 对力学运动量(位移、速度、加速度)之间的关系开展运动分析;
- (3) 针对其力学问题选择力学定理列出数学方程;
- (4) 应用已有数学知识对描述其力学系统的数学方程(含运动关系式)进

行数学求解运算并给出所需要的解;

(5) 对所得解析或定量结果的合理性与适用范围进行讨论。

所谓受力分析主要是指从实际问题出发来画出可供力学分析的受力图,这是整个力学分析的基础性环节。在此基础上,通过公理化的体系和数学推演来对各种力系进行简化,以掌握各类力系的基本特征。这两部分内容不仅在静力学中用到,而且也是动力学分析的基础。为此,本书将这两部分内容从静力学中独立出来进行介绍。在掌握画受力图与力系简化的基本内容后,按静力学、运动学和动力学三部分进行了分别介绍。所谓静力学是指研究一力学系统相对于惯性参考系处于静止不动或作匀速运动的规律,包括未知约束力的求解和平衡位置的确定等。而运动学则主要研究力学系统位置、运动速度和加速度的表征方法,以及它们之间相关联的时空变化规律。在运动学中,无需考虑其运动变化产生的原因即力,而仅考虑其可能存在的时空变化的表征方式及其规律,并由此为动力学研究提供基础。动力学是在牛顿第二定律的基础上,研究一力学系统运动改变随外加作用力的变化规律,由此演化出动力学三大普遍定理等基本分析方法。作为一类重要的动力学问题——碰撞动力学,采用已建立的动力学理论介绍了开展这一动力学分析的所谓刚体碰撞基本理论与方法。另外,达朗贝尔原理的动静法是将动力学问题采用类似于静力学分析的一种方法,它一方面为解决动力学分析提供了新的思路,另一方面更重要的是为分析力学提供了基石。分析力学为力学系统建立力学方程提供了一种新途径,主要为复杂力学系统的力学方程建立提供了统一的有效方法。

通过对这些基础内容的学习,读者将具备对于一力学系统开展力学分析所需要的基本力学建模及开展必要定量分析等方面的基本能力。这样一方面可以在此基础上开展一些力学研究,另一方面将主要为后续力学知识的学习提供坚实的力学分析基础。

第一章 解析几何概要

解析几何是现代数学的一个分支,它主要采用代数方法来研究矢量的基本表征与运算,其基本理论、表征和运算是包含有矢量形式物理量的各应用学科的数学基础。我们知道,在力学基本理论中的力、位移、速度、加速度、动量、动量矩等力学量均为矢量,在电磁学中电场强度和磁场强度等物理量也具备这类特征。由它们构成的基本定律或定理等的数学表征均可以通过矢量的运算方程来表达。这不仅有利于从严格的数学框架上阐明各力学规律的物理意义,而且也有利于把握力学或物理世界在科学研究上的一些本质特性。在本章中,仅介绍与理论力学相关内容所涉及的解析几何部分以及其表征的线性代数部分等基本内容,为本书介绍的基本原理与运算提供必要的数学基础。对于已熟知这些内容的读者,除了记号外,可以不必详细阅读本章内容直接进入下一章;对于希望知道更多相关内容的读者,可以查阅相关的数学教科书^[9-11]。

1.1 矢量及其基本运算

1. 矢量的定义

矢量不仅具有大小而且还有方向性。在采用图形来表达一矢量时,是采用具有一定长度的单向箭头来表示的,如图 1-1 所示。其箭头的始端或末端称之为矢量的作用点,它反映了矢量的作用位置特征;矢量长度相对于一标准长的倍数就称之为其矢量的大小^①,矢量在空间所指的方位就称之为其矢量的方向。作用点、大小和方向这三个特性反映了一矢量的全部特征,这在某些力学或物理的矢量表征中是必须的,即改变这三者中的任一个都会导致其力学或物理特性的改变。当然在实际问题中,也存在一些矢量,它们对其作用的位置并不敏感,

^① 在数学研究中,通常取单位 1 来作为度量一矢量大小的标准长。而在实际问题中既可采用这类数学上抽象的单位长,也可以取具有实际意义的量作为其标准长,这如同我们在度量长度时可以采用 1 mm 或 1 m 作单位来测量实际长度一样。值得注意的是,在采用不同单位长来度量同一量时,其读数不同将是显然的。

亦即在空间平移矢量的位置时,对其所关注的问题并没有改变。将具有可平移特性的矢量称之为**自由矢量**。在数学上,主要考虑的是自由矢量。对于实际力学或物理中的不可平移非自由矢量,在引进一定移动规则后,有关数学上的自由矢量的运算就可以用上了。除特别说明外,本章仅讨论数学意义上的自由矢量。在书写矢量时,印刷体中通常采用黑体或非黑体上方加向右的箭头来表示。在本书中,我们将一律采用前者即黑体来表示矢量。如 $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{F}$ 等。如果一矢量的大小为零,即其长度为零,称其为**零矢量**,一律记为 $\mathbf{0}$ 。对于一矢量 $\mathbf{a}$,其大小或模记为 $|\mathbf{a}|$,有时写为 a 。因此,所谓零矢量就是指其矢量的模为零,反之亦然。称两矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$ 相等是指当且仅当这两矢量的大小与方向同时完全相同,并记 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ 。

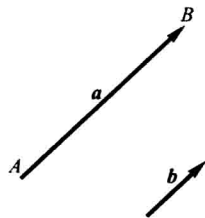


图 1-1

2. 矢量加法或求和运算

矢量加法也称为矢量的求和运算,它是基于平行四边形法则来进行的。如图 1-2 所示,对于两矢端共点但不平行的两矢量 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{b}$,记其交点为 O ,则由几何学可知这两矢量在空间是共面的。于是过其中一矢量的末端作平行于另一矢量的平行线,再过另一矢量的末端作平行于前一矢量的平行线,就得到了这两平行线的一交点,记其为 A 。于是由 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 以及与其相交的平行线部分就构成了一共面的平行四边形,进而从点 O 到点 A 的有向线段也是一矢量,记为矢量 $\mathbf{c}$ 。显然矢量 $\mathbf{c}$ 与矢量 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 共面。按此规则经 $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ 两矢量得到矢量 $\mathbf{c}$ 的运算过程,就称之为矢量的求和或加法运算,记为

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \quad (1-1)$$

显然矢量的求和运算满足交换律,即有 $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$ 。矢量的加法运算或矢量加法的平行四边形法则是构成矢量运算的最基本规则。换言之,我们称某一物理量为矢量,是指它除了大小和方向的特征外,还必须满足矢量的加法运算法则,反之亦然。

值得注意的是,矢量加法的平行四边形法则也可以解释为平移其中一矢量,使其始端移至另一矢量的末端,于是从固定矢量的始端至该平移矢量的末端所作出的一矢量就是这两矢量的合矢量(见图 1-3),这又称为矢量求和的三角形法则。

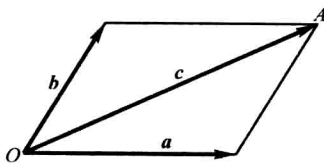


图 1-2

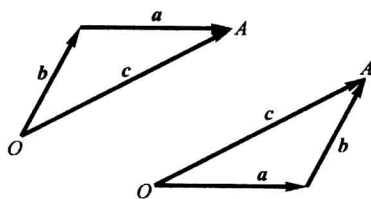


图 1-3