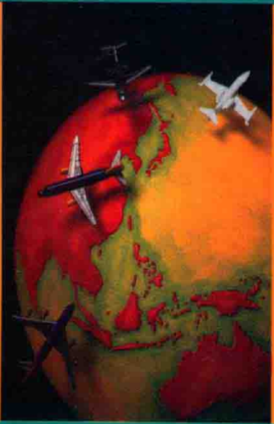
中学数学专题丛书

叶尧城 主编

孔峰 编著

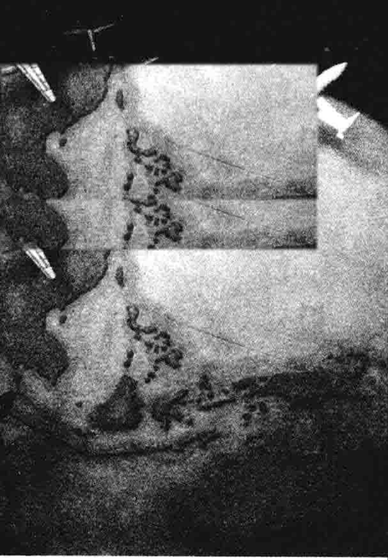


直线与圆

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU

湖北教育出版社

10



中学数学专题丛书

叶尧城 主编

直线与圆

孔峰 编著

10

湖北教育出版社

(鄂)新登字02号

图书在版编目(CIP)数据

直线与圆/孔峰编著.—武汉:湖北教育出版社,2001
(中学数学专题丛书/叶尧城主编)
ISBN 7-5351-3166-2

Ⅰ.直… Ⅱ.孔… Ⅲ.①直线-中学-教学参考资料
②圆-中学-教学参考资料 Ⅳ.G634.633

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第091098号

出版 发行:湖北教育出版社
网 址:http://www.hbedup.com
武汉市青年路277号
邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:湖北新华印务有限公司 (430034·武汉市解放大道145号)
开 本:787mm×1092mm 1/32 8.5印张
版 次:2002年4月第1版 2002年7月第2次印刷
字 数:164千字 印数:5 001-8 000

ISBN 7-5351-3166-2/G·2571 定价:11.00元

总　序

随着素质教育的深入推进,需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁,以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建?改革教材成为了人们选择的突破口!当前,国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用,新教材在“为所有的学生打好共同基础”上将有所作为。然而,我国幅员辽阔,地区间的教育水平的差异大,个体间学习水平的差异大。如何真正地体现“以学生发展为本”,发展学生的个性特长,让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高,还需要通过特定的教学过程来完成,其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的“检测题”、“同步练习”、“习题集”等)。因此,我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物,以专题讲座的形式,帮助学生了解知识的发生、发展过程,学会分析、解决问题的思想方法,深化、拓宽相关知识。

有鉴于此,我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有18个小册子,各册相对独立又相互联系,小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触,介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础。**通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力。**精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用。**精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新。**精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功。**选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002年1月

目录

一
直线方程

1.1 直线的倾斜角,斜率和方向矢量

在初中我们学习过,一次函数 $y = kx + b$ 的图像是一直线,它是以满足 $y = kx + b$ 的每一对 x, y 的值为坐标的点构成的.而 $y = kx + b$ 可作为二元一次方程,因此这个方程的解和直线上的点存在一一对应关系.以一个方程的解为坐标的点均是某直线上的点,反之,这条直线上点的坐标都是这个方程的解.此时,这个方程就叫做这条直线的方程,这条直线叫做这个方程的直线.

为了建立直角坐标系中的直线方程,需研究直线确定方向的概念,如直线的倾斜角,斜率和直线的方向矢量.

在平面直角坐标系中,对于一条与 x 轴相交的一直线,如果把 x 轴绕着交点按逆时针方向旋转到和直线重合时所转的最小正角记为 α,那么 α 就称之为直线的倾斜角.从而倾斜角取值范围为 $[0, \pi)$.其中在直线和 x 轴平行或重合时倾斜角 $\alpha = 0$.

倾斜角不是 $90°$ 的直线,它的倾斜角的正切称之为直线的

斜率,常用 k 表示,$k=\tan\alpha$.斜率常表示倾斜角不等于 $90°$ 的直线对 x 轴的倾斜程度.

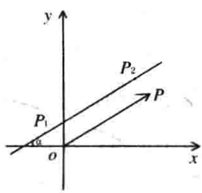
在坐标平面内,如果两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 给定,那么直线 P_1P_2 就惟一确定了.若直线 P_1P_2 的倾角不为 $90°$ 时,此直线的斜率也是惟一确定的,如何用两点的坐标表示直线 P_1P_2 的斜率?

设直线 P_1P_2 的倾斜角是 α,斜率是 k,向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 方向向上,则 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 的坐标是 (x_2-x_1,y_2-y_1).过原点作向量 $\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{P_1P_2}$,则 P 点坐标是 (x_2-x_1,y_2-y_1).而且直线 OP 倾斜角亦是 α.由正切函数定义可知:

$$\tan\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\text{即 } k=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

同样在向量 $\overrightarrow{P_2P_1}$ 的方向向上时,同理可求得:$\tan\alpha=k=\dfrac{y_1-y_2}{x_1-x_2}=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.

综上所述,过两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ 的直线的斜率公式:$k=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$.



直线 P_1P_2 的斜率被向量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 对应的坐标 (x_2-x_1,y_2-y_1) 所惟一确定,因此矢量 $\overrightarrow{P_1P_2}$ 称为直线 P_1P_2 的方向矢量.$\overrightarrow{P_1P_2}$ 常用 (x_2-x_1,y_2-y_1) 表示.直线的方向矢量

不惟一.当一直线平行于 x 轴或 y 轴时直线的方向依然可由方向矢量来确定.

例1 若 $A(3,1),B(-2,m),C(8,11)$ 三点在同一直线上,求实数 m.

解 三点 A,B,C 在同一直线上,则 AB 和 AC 的倾斜角相等,从而 $k_{AB}=k_{AC}$.

则 $\frac{m-1}{-2-3}=\frac{11-1}{8-3}=2$,求得 $m=-9$.

因此所求实数 m 值为 -9.

例2 已知 $A(3,-5),B(0,-9),C(-m,2m-1)$.

(1) 若直线 AC 的倾斜角是直线 AB 的倾斜角的2倍,求实数 m 的值.

(2) 若 $AC\perp AB$,求 m 的值.

解 (1) 由斜率公式知 $k_{AB}=\frac{-9-(-5)}{0-3}=\frac{4}{3}$.

设 AB 直线倾斜角为 α,依题意则 AC 倾斜角为 2α.则 K_{AC}

$$=\tan 2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=-\frac{24}{7}$$

而又 $k_{AC}=\frac{(2m-1)-(-5)}{-m-3}=-\frac{24}{7}$,

$\therefore m=-\frac{22}{5}$.

(2) $\because k_{AB}=\frac{4}{3}$,则 AB 直线倾角 α 为锐角.

而 $AC\perp AB$,则 AC 倾斜角为 $\frac{\pi}{2}+\alpha$.

$\because k_{AC}=\tan(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\frac{1}{\tan\alpha}=-\frac{3}{4}$,

而 $k_{AC}=-\frac{2(m+2)}{m+3}=-\frac{3}{4}$,

求得 $m=-\frac{7}{5}$.

例3 已知 $A(-\sqrt{3}\sin\theta,\cos^2\theta)$,$B(0,1)$是相异两点,则直线 AB 倾斜角的取值范围如何?

解 由斜率公式知:

$$k_{AB}=\frac{1-\cos^2\theta}{0+\sqrt{3}\sin\theta}=\frac{\sin^2\theta}{\sqrt{3}\sin\theta}=\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}}$$

而 A,B 是两相异点,则 $\sin\theta\neq 0$

从而 $-\frac{\sqrt{3}}{3}\leqslant k_{AB}\leqslant\frac{\sqrt{3}}{3}$,且 $k_{AB}\neq 0$.

于是 AB 直线倾斜角 α 取值范围为:$(0,\frac{\pi}{6}]\cup[\frac{5\pi}{6},\pi)$.

例4 设 $A(a^2+1,a)$,$B(3a-1,-1)$是平面上相异点,在 a 取什么实数值时,AB 直线的倾斜角分别为锐角,直角,钝角?

解 由斜率公式知:

$$k_{AB}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{a-(-1)}{a^2+1-(3a-1)}=\frac{a+1}{a^2-3a+2},$$

即 $k_{AB}=\frac{a+1}{(a-1)(a-2)}$.

(1) 在 AB 直线倾斜角为锐角时,$k_{AB}>0$.

则$\dfrac{a+1}{(a-1)(a-2)}>0$,

$\therefore -1<a<1$或$a>2$.

(2) 在 AB 直线倾斜角为直角时,k_{AB} 不存在.

则$(a-1)(a-2)=0$,

于是 $a=1$,或 $a=2$.

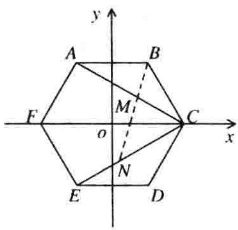
(3) 在 AB 直线倾斜角为钝角时,$k_{AB}<0$.

则$\dfrac{a+1}{(a-1)(a-2)}<0$,

于是 $a<-1$或$1<a<2$.

例 5 已知 AC,CE 是正六边形 $ABCDEF$ 的两条对角线,点 M,N 分别内分 AC,CE.使 $AM:AC=CN:CE=r$.如果 B,M,N 三点共线.求 r 值.

解 建立如图所示的直角坐标系,设正六边形边长为 2,则 $A(-1,\sqrt{3})$,$B(1,\sqrt{3})$,$C(2,0)$,$E(-1,-\sqrt{3})$.



又 $AM:AC=CN:CE=r$.

则 $\lambda=\dfrac{AM}{MC}=\dfrac{CN}{NE}=\dfrac{r}{1-r}$.

由定比分点公式可求出 M 和 N 点坐标:

$M(3r-1,\sqrt{3}-\sqrt{3}r)$,$N(2-3r,-\sqrt{3}r)$.

又 B,M,N 三点共线,则 $k_{BM}=k_{MN}$.

于是$\dfrac{\sqrt{3}-(\sqrt{3}-\sqrt{3}r)}{1-(3r-1)}=\dfrac{\sqrt{3}(1-r)-(1-\sqrt{3}r)}{(3r-1)-(2-3r)}$

即 $-\dfrac{\sqrt{3}r}{3r-2}=\dfrac{\sqrt{3}}{6r-3}$

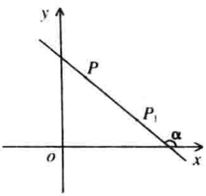
从而 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

因此所求 r 值为$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

1.2 直线的方程

1. 点斜式和斜截式

已知直线 l 的斜率 k,且过点 $P_1(x_1,y_1)$,求直线 l 的方程.



设 $P(x、y)$ 是直线 l 上不同于 P_1 的任一点,由过两点的直线斜率公式得:

$$k=\frac{y-y_1}{x-x_1}.$$

可化为:$y-y_1=k(x-x_1)$.

这个方程是由直线上一点和直线斜率确定的,称之为直线的点斜式方程.

在直线 l 的倾斜角 $\alpha=0$时,$k=\tan\theta=0$,此时直线方程:$y=y_1$.

在直线 l 的倾斜角 $\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ 时,k 不存在,此时,$\dfrac{1}{k}=\dfrac{x-x_1}{y-y_1}=0$,直线方程为 $x=x_1$.

如果一直线 l 的斜率为 k,与 x 轴交点是$(0,b)$,代入点斜式得直线方程 $y-b=k(x-0)$ 即:$y=kx+b$.这里的 b 为直线 l 在 y 轴上截距,此方程是由直线 l 的斜率和它在 y 轴上截距确定,故此直线方程称之为直线方程的斜截式.在 k 不存在时,此直线为:$x=0$.

例1 已知直线$(2a^2-3a+3)x+7(2-a)y+1=0$的倾斜角为 $\pi-\arctan\dfrac{3}{7}$,求实数 a 的取值.

解 由直线$(2a^2-3a+3)x+7(2-a)y+1=0$

化为:$y=-\dfrac{2a^2-3a+3}{7(2-a)}\cdot x-\dfrac{1}{7(2-a)}$, $2-a\neq 0$,

则斜率 $k=\dfrac{2a^2-3a+3}{7(a-2)}$.

而直线倾斜角 $\alpha=\pi-\arctan\dfrac{3}{7}$,

则 $k=\tan\alpha=\tan(\pi-\arctan\dfrac{3}{7})=-\dfrac{3}{7}$,

于是有$\dfrac{2a^2-3a+3}{7(a-2)}=-\dfrac{3}{7}$.

求得 $a=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ 因此所求实数 a 的取值为:$\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$.

例2 求过点 $P(-5,-4)$且与两坐标轴围成三角形面积为5的直线方程.

解 依题意,设所求直线方程为 $y+4=k(x+5)$.

令 $x=0$,则 $y=5k-4$;

$y=0$,则 $x=\dfrac{4-5k}{k}$.

则直线与两坐标轴交点$\left(\frac{4-5k}{k},0\right)$,$(0,5k-4)$.

由题意知　$\frac{1}{2}\left|(5k-4)\left(\frac{4-5k}{k}\right)\right|=5$,

从而$(5k-4)^2=10|k|$,

$k<0$时无解;

$k>0$时有$25k^2-50k+16=0$.

解得　$k=\frac{8}{5}$,$k=\frac{2}{5}$.

所求直线方程为:$8x-5y+20=0$,$2x-5y-10=0$.

例3　已知直线l过点$P(3,5)$,且l的倾斜角分别是AB:$3x-4y+1=0$的倾角的①一半②二倍③三倍,分别求直线l的方程.

解　设直线$3x-4y+1=0$的倾斜角为α.

则$\tan\alpha=\frac{3}{4}$.

且知$\sin\alpha=\frac{3}{5}$,$\cos\alpha=\frac{4}{5}$,由三角公式知:

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{1}{3}.$$

$$\tan2\alpha=\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{24}{7}.$$

$$\tan3\alpha=\frac{3\tan\alpha-\tan^3\alpha}{1-3\tan^2\alpha}=\frac{117}{37}.$$

而直线均过点(3,5),由点斜式求得在三种不同情况下的直线方程分别为:

$y-5=\frac{1}{3}(x-3)$; $y-5=\frac{24}{7}(x-3)$;

$y-5=\frac{117}{37}(x-3)$.

例 4 已知直线 $y=kx+b(k\neq 0)$ 上两点 $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$ 求证:(1) $|AB|=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|$;

(2) $|AB|=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|$.

证明 $\because A(x_1,y_1),B(x_2,y_2)$ 同在直线 $y=kx+b$ 上,

则 $y_1=kx_1+b$, $y_2=kx_2+b$.

于是 $y_1-y_2=k(x_1-x_2)$.

由两点间距离公式知:

$$\begin{aligned}(1)\ |AB|&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}\\&=\sqrt{(x_1-x_2)^2+[k(x_1-x_2)]^2}\\&=\sqrt{1+k^2}\,|x_1-x_2|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2)\ |AB|&=\sqrt{[\frac{1}{k}(y_1-y_2)]^2+(y_1-y_2)^2}\\&=\sqrt{1+\frac{1}{k^2}}\,|y_1-y_2|\end{aligned}$$

说明 如果直线 $Ax+By+C=0(A^2+B^2\neq 0)$ 上两点 $M_1(x_1,y_1)M_2(x_2,y_2)$,利用上面方法可推证出 $|M_1M_2|=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{B^2}}\cdot|x_1-x_2|=\sqrt{\frac{A^2+B^2}{A^2}}\,|y_1-y_2|$.

例 5 已知直线 l 斜率为 6,且被两坐标轴所截取的线段

长为$\sqrt{74}$,求直线 l 方程.

解 设所求直线 l 方程为 $y = 6x + b$.

在 $x = 0$ 时,$y = b$;在 $y = 0$ 时 $x = -\frac{b}{6}$.

则依题意知:$b^2 + \left(-\frac{b}{6}\right)^2 = 74$,

求得 $b = \pm 6\sqrt{2}$.

所求直线方程为 $y = 6x \pm 6\sqrt{2}$.

例6 已知函数 $y = f(x)$ 的图像是自原点出发的一条折线.当 $n \leqslant y \leqslant n + 1(n = 0,1,2,\cdots)$ 时,该图像是斜率为 b^n 的线段(其中正常数 $b \neq 1$),设数列$\{x_n\}$由 $f(x_n) = n(n = 1,2,\cdots)$ 定义.

(1) 求 x_1,x_2 和 x_n 表达式;

(2) 求 $f(x)$ 表达式,且写出其定义域.

解 (1) 依题意 $f(0) = 0$,又由 $f(x_1) = 1$.在 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 时,函数 $f(x)$ 的图像是斜率为 $b^0 = 1$ 的线段.

故$\frac{f(x_1) - f(0)}{x_1 - 0} = 1$,得 $x_1 = 1$.

又由 $f(x_2) = 2$,在 $1 \leqslant y \leqslant 2$ 时,函数 $y = f(x)$ 的图像斜率为 b 的线段.故由:

$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = b$,即 $x_2 - x_1 = \frac{1}{b}$,得 $x_2 = 1 + \frac{1}{b}$.

记 $x_0 = 0$.由函数 $y = f(x)$ 图像中第 n 段线段的斜率为 b^{n-1}.故得:

$$\frac{f(x_n)-f(x_{n-1})}{x_n-x_{n-1}}=b^{n-1},\text{而 } f(x_n)=n,$$

则 $x_n-x_{n-1}=\left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}$.

又 $b\neq 1$.

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}(x_k-x_{k-1})=1+\frac{1}{b}+\frac{1}{b^2}+\cdots+\frac{1}{b^{n-1}}$$

$$=\frac{b-\left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}}{b-1}.$$

(2) 在 $0\leqslant y\leqslant 1$ 时,从(1)可知 $y=x$.即 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$f(x)=x$.

在 $n\leqslant y\leqslant n+1$ 时,即 $x_n\leqslant x\leqslant x_{n+1}$ 时,由(1)可知 $f(x)=n+b^n(x-x_n)$,$x_n\leqslant x\leqslant x_{n+1}$,$n=1,2,\cdots$

前 n 段折线对应函数定义域为:

$[0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup[x_2,x_3]\cup\cdots\cup[x_{n-1},x_n]=[0,x_n]$

在 $b>1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b-\left(\frac{1}{b}\right)^{n-1}}{b-1}=\frac{b}{b-1}$;

在 $0<b<1$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$.

综上所述,$b>1$ 时,$y=f(x)$ 定义域为 $\left[0,\frac{b}{b-1}\right)$;$0<b<1$ 时,$y=f(x)$ 定义域为 $[0,+\infty)$.

2. 两点式,截距式直线方程

已知直线 l 经过两点 $P_1(x_1,y_1)$,$P_2(x_2,y_2)$ $(x_1\neq x_2)$ 求直线 l 的方程.