工程力学

电机专业用

（下册）

上海机械学院

一九七七年二月

目　　录

第三篇　构件的运动分析

绪　　言

在第一篇中我们讨论了构件的静平衡及静力分析。本篇将进一步从几何角度来讨论构件的运动；即讨论构件运动的几何性质，而不涉及改变其运动状态的原因（作用于构件上之力及构件之质量）。具体来说，即分析构件运动的轨迹、位置、速度、加速度以及这些运动要素之间的关系。至于作用力与运动之间的关系，则放在第三篇中讨论。

在许多工程问题中，运动分析往往是占首要意义的。例如机械的传动系统设计中，在强、刚度分析之前，首先应该对机构进行运动分析，使各构件的运动相互谐调配合，满足机械正常运转的需要。所以，学习本篇的目的，一方面是为学习动力分析打下基础；另一方面也为机构运动分析提供了基础。

任何物体都有一定的大小和形状，当物体运动时，物体上各点的运动往往是不同的。例如，火车转弯时，外侧的速度就要比内侧大。虽然物体上各点的运动不尽相同，但在研究某些问题时，可以忽略这些差别，忽略物体的大小而抽象为一个点来研究。例如在研究列车的运动规律时，只需知道它在各个时刻到达何处，何时到达何站，也就是把列车作为一个点（有时也称为动点）来考虑。同样，在讨论人造地球卫星之轨道，炮弹之飞行轨迹等等问题中，都可以把它们作为点来研究。

在这类问题中，把物体抽象成点不但是允许的，而且是必要的。

正如列宁指出："一切科学的（正确的·郑重的·非瞎说的）抽象都更深刻、更正确、更完全地反映着自然"。不然，就主次不分，抓不住本质，使问题复杂化。点的运动除了直接解决这类问题之外，还进一步为分析物体的一般运动提供了基础，因为任何物体都是由点组成的。

研究物体的运动时必须选择另一物体以确定其位置及运动，这另一物体称参考体，而固结于参考体上的坐标系称为参考系。同一物体对于不同的参考系而言，其运动是不同的。如坐在火车车厢内的乘客，相对于车厢来讲是静止的，但相对于地面来讲是运动的。因此，在描述一物体的运动时，应说明它是相对于哪一参考系的，这就是运动的相对性。在一般工程及日常生活中，我们都取地面或机架作为参考体，如电机轴在旋转，这是指相对于电机机座而言的；又如我们讲火车在行驶，这是指相对于地面而言的。一般我们不作特别说明时，其运动都是指相对于地面或机架而言。

点运动时在空间所经过的路线称为点的轨迹。当轨迹是一直线时，称为点的直线运动；如果点的运动轨迹是一曲线，称为点的曲线运动；一点相对于另一点的运动称为点的相对运动。

第十三章　点的运动

§1　点的直线运动

设有动点M沿直线运动（图13-1），取直线轨迹为x轴，并在轴上任取一点0为坐标原点，则动点M的位置可由坐标OM=x确定。动点M的位置随时间而变，用数学式表示即为

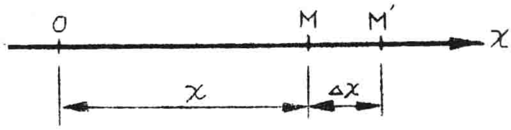


图 13-1

$$x = f(t) \tag{13-1}$$

此式称为动点M的运动方程。如函数f(t)已知，则可求出任一瞬时t时动点M的位置。

为了表明动点运动的快慢程度，我们引用速度的概念。

设在瞬时t时，动点M在位置M。在瞬时t′，其位置在M′，位移为Δx。位移Δx与对应的时间间隔Δt之比称为平均速度：

$$v^* = \frac{\Delta x}{\Delta t}。$$

平均速度表明在Δt 时间间隔内动点M运动的平均快慢。

平均速度不能反映动点运动的真实快慢。如将时间间隔Δt 取得愈小，则它愈接近真实情况。当Δt → 0，此时的平均速度极限值即称为瞬时速度（或简称速度）：

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}, \tag{13-2}$$

也就是在直线运动中，动点的速度等于其坐标对时间的一次导数。

加速度是表明速度变化快慢的物理量。

设动点在M位置时之速度为v，在M'位置之速度为v'，在Δt时间间隔内，速度的增量为$\Delta v = v' - v$，比值$\frac{\Delta v}{\Delta t}$即称为平均加速度：

$$a^* = \frac{\Delta v}{\Delta t}。$$

和速度情况相同，当$\Delta t \to 0$时，此时的平均加速度的极限值就是动点M在该瞬时的瞬时加速度（或简称加速度）。即

$$a = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, \qquad (13-3)$$

也就是在直线运动中，动点的加速度等于其速度对时间的一次导数，或等于其坐标对时间的二次导数。

下面讨论两种特殊情况：

(1) 匀速直线运动　速度大小不变之运动称为匀速运动。根据表达式（13-2），$v = \frac{dx}{dt}$，或

$$dx = v\,dt。$$

在此情况下，因v＝常量，故将上式两面积分后得

$$\int_{x_0}^{x} dx = v\int_0^t dt,$$

或

$$x = x_0 + vt, \qquad (13-4)$$

其中x_0是动点在$t = 0$时之起始坐标。

(2) 匀变速直线运动　速度大小均匀变化的运动称为匀变速运动。根据表达式$a = \frac{dv}{dt}$，或

$$dv = a\,dt\ 。$$

在此情况下，因 a = 常量，故将上式两面积分后有

$$\int_{v_0}^{v} dv = a\int_0^t dt\ ,$$

或
$$v = v_0 + at\ , \qquad (13-5)$$

其中 v_0 是动点在 $t=0$ 时之初速度。

再根据表达式 $v=\frac{dx}{dt}$，上式可改写为

$$\frac{dx}{dt}=v_0+at，或\ dx=v_0\,dt+at\,dt\ 。$$

两面积分后得

$$\int_{x_0}^{x} dx = v_0\int_0^t dt + a\int_0^t t\,dt\ ,$$

或
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2\ 。 \qquad (13-6)$$

由式（13－5）、（13－6）消去 t 后，也可以得

$$v^2 - v_0^2 = 2a(x-x_0)。 \qquad (13-7)$$

公式（13－4）、（13－5）、（13－6）、（13－7）就是动点匀速直线运动和匀变速直线运动时诸运动量之间之关系。

例13－1　某制砖厂的制砖流水线上采用直线电机。电机的运动过程，如不计运动时的摩擦阻力，近似地可看作三个阶段：匀加速的起动阶段、匀速阶段和匀减速的终止阶段（图13－2）。已知行程 S = 10米，单程时间 t=2

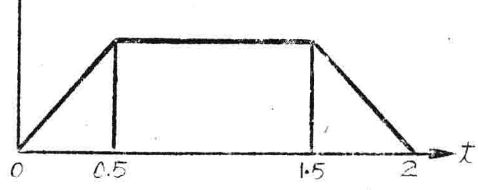


图13－2

秒，起动阶段和终止阶段的时间各等于0.5秒。试求起动加速度a。

解：从图13－2可知，由于起动阶段和终止阶段的时间相等，故知这两阶段中的加速度的绝对值是相等的。令x_1、x_2、x_3；t_1、t_2、t_3 各为这三个阶段中的行程和所需时间。根据图13－2及式(13-5)、(13-6)有

$$x_1=\frac{1}{2}at_1^2,\quad x_2=at_1\cdot t_2,\quad x_3=\frac{1}{2}at_3^2。$$

整个行程为S，所以有

$$\frac{1}{2}at_1^2+at_1t_2+\frac{1}{2}at_3^2=S。$$

代入各项数据得

$$\frac{1}{2}a\times0.5^2+a\times0.5\times1+\frac{1}{2}a\times0.5^2=10。$$

简化后得　　　$0.75a=10$。

由此解得　　　$a=13.3$ 米／秒^2

§2　点的曲线运动

一、弧坐标法　设有一动点作曲线运动（图13-3），假定它的运动轨迹是已知的。在轨迹曲线上任取一点0作为原点，在原点两边规定正负指向，则动点M在任一瞬时的位置可用它沿曲线到原点的弧坐标s来确定。点运动时，弧坐标s随时间而变，故有

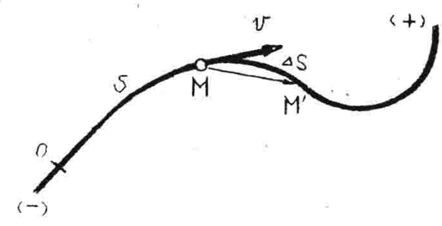


图13-3

$$s=f(t),\qquad (13-8)$$

这就是点沿曲线轨迹运动的弧坐标运动方程。

现在来求动点的速度。设在瞬时 t，动点的位置在 M 点，经过 Δt 时间间隔，动点的位置在 M' 点，位移是 MM' 矢量，平均速度是

$$\vec{v}^{*}=\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t},$$

当 $\Delta t \to 0$，上式的极限值就是动点在该瞬时 t 时的瞬时速度，即

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$$

低下进一步再来看这一速度矢量的方向和大小。由于当 $\Delta t\to 0$ 时，矢量 MM' 的方向趋近于轨迹上 M 点的切线方向，因此速度的方向就是轨迹的切线方向。另外，当 $\Delta t\to 0$ 时，弦长和弧长趋于相等，故有

$$v=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{MM'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overset{\frown}{MM'}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{ds}{dt} \quad (13-9)$$

即点的速度等于其弧坐标对时间的一次导数，而方向沿着该点的切线方向。

现在再来求动点的加速度。

设在瞬时 t 和 $t+\Delta t$，动点的位置在 M 点和 M' 点，其速度分别为 v 及 v'（图 13-4，a）。作矢量 CA 代表速度 v，矢量 CA' 代表速度 v'（图 13-4，b），则矢量 AA' 等于 $\overline{\Delta v}$，即等于动点在 Δt

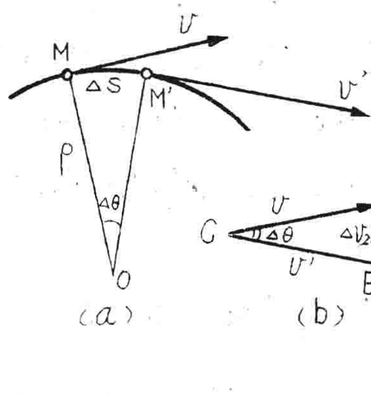


图 13-4

时间内速度的改变量。在CA'上截取一点B，令线段CB之长等于线段CA之长，于是矢量BA'即代表在Δt时间内速度大小的改变量，矢量AB代表在Δt时间内速度因其方向改变而有之改变量。这两部分的速度改变量分别以Δv_1及Δv_2命之。由于$\Delta\vec{v}=\Delta\vec{v}_1+\Delta\vec{v}_2$，两边除以$\Delta t$并取$\Delta t\to 0$的极限，得

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta t}+\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\vec{v}_2}{\Delta t}\text{。}$$

上式左边一项就是动点在瞬时t时的加速度a。现在来看右边两项所代表的意义。当$\Delta t\to 0$时，M'点趋于M点，而速度v'趋于速度v并以之为极限。因此，右边第一项的极限方向就是动点在M点的速度方向，所以这一项称为切向加速度，通常以a_τ表示之，它表明速度大小随时间的改变率，方向沿着M点的切线方向。当$\Delta t\to 0$时，速度改变量Δv_2的方向趋于M点的法线方向并以此法线为极限位置，因此，右边第二项的极限方向就是M点轨迹的法线方向，所以这一项称为法向加速度，通常以a_n表示之，它表明速度方向随时间的改变率，方向恒指向轨迹的曲率中心。

以切线τ和法线n为坐标轴，在力学中也称为自然坐标轴。切向加速度a_τ及法向加速度a_n就是加速度a在这两个轴上的加速度投影（图13-5）。

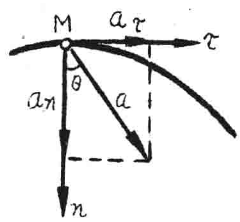


图 13-5

切向加速度的大小为

$$a_\tau=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_1}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{v'-v}{\Delta t}=\frac{dv}{dt}=\frac{d^2s}{dt^2},\qquad(13\text{-}10)$$

即切向加速度的大小等于速度对时间的一次导数，等于弧坐标对时间的二次导数。

现在再来看法向加速度的大小。由图13－4，b知，$\Delta v_2 \approx v\Delta Q \approx v\dfrac{\Delta s}{\rho}$，ρ是轨迹在M点的曲率半径。所以

$$a_n=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v_2}{\Delta t}=\frac{v}{\rho}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{v^2}{\rho} \qquad (13-11)$$

即法向加速度的大小等于速度的平方除以曲率半径。

在匀速圆周运动中，$a_\tau=0$，$\rho=R$，故$a=a_n=\dfrac{v^2}{R}$。

在直线运动中，$\rho=\infty$，$a_n=0$，故$a=a_\tau=\dfrac{dv}{dt}$。

三 直角坐标法 设有动点M沿平面曲线运动（图13－6）。在曲线所在平面中任取一点0，设立直角坐标轴Oxy。于是，M点的曲线运动可看为M点沿x、y轴之直线运动之合成。设（x，y）为M点在t瞬时之坐标，则

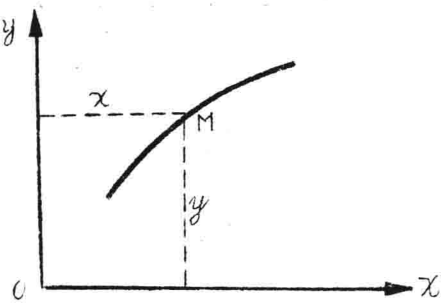


图 13－6

$$\left.\begin{aligned} x &= f_1(t) \\ y &= f_2(t) \end{aligned}\right\}, \qquad (13-12)$$

这就是动点沿x、y轴之运动方程。如果运动方程为已知，则消去参数t后，即得动点的运动轨迹。

要求动点的速度及加速度在x、y轴上的投影，只需分别将上式对时间求导一次和二次即可，即：

$$v_x=\frac{dx}{dt}\ ,\quad v_y=\frac{dy}{dt}\ ;\qquad (13-13)$$

$$a_x=\frac{dv_x}{dt}=\frac{d^2x}{dt^2}\ ,\quad a_y=\frac{dv_y}{dt}=\frac{d^2y}{dt^2}\ 。\qquad (13-14)$$

例13-2　已知一动点作曲线运动，其运动方程为$x=a\cos\omega t$，$y=a\sin\omega t$。试求其运动轨迹，速度及切向加速度和法向加速度（图13-7）。

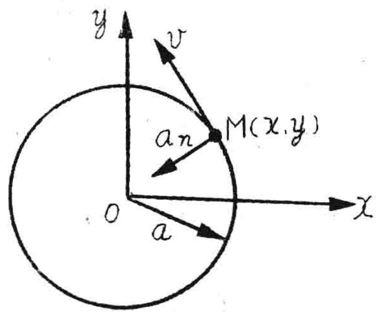


图 13-7

解：将上面的两运动方程中，消去参数t，得

$$x^2+y^2=a^2\ 。$$

所以运动轨迹是一个半径为a的圆。

速度的投影是

$$v_x=\frac{dx}{dt}=-a\omega\sin\omega t\ ;$$

$$v_y=\frac{dy}{dt}=a\omega\cos\omega t\ 。$$

速度的大小是

$$v=\sqrt{v_x^2+v_y^2}=a\omega=常数。$$

所以知此动点作匀速圆运动。

切向加速度按式（13-10）为

$$a_\tau=\frac{dv}{dt}=\frac{d}{dt}(a\omega)=0$$

法向加速度按式（13-11）为

$$a_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{a^2\omega^2}{a} = a\omega^2 \text{。}$$

§3* 点的相对运动

以上我们所讨论的点的运动都是相对于地球或固结于地球上的一点而言的。在工程实际中，地球总被认为是绝对静止不动的，因此这种运动也常称为点的绝对运动，而人类多半是在地球上活动的，所以习惯上也不加以特别注出绝对两字。在日常生活和工程中，我们也常常会遇到另一种问题即动点M相对于另一动点的运动。例如通常看到的雨滴是垂直向下的，但雨滴对行驶中的车厢而言都是斜向而来，这就是雨滴相对于车厢这动点的运动问题。又例如凸轮机构中（图13-8），从动杆的端点M相对于地球的运动是往复直线运动，但M点相对于轮廓边缘上在该瞬时和M点相接触的一点A的移动速度却是M点相对于A点的运动问题。一动点相对于另一动点的运动称为点的相对运动。以下我们来讨论两动点的速度与其相对速度之间之关系。

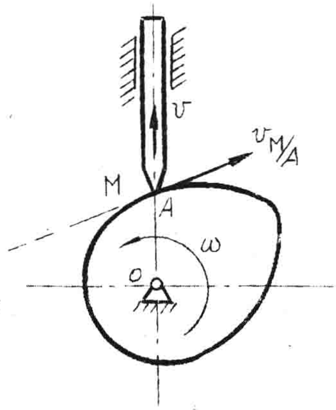


图 13-8

设有两动点M及A（图13-9，a），在瞬时t时，此两点在M及A位置，在瞬时$t+\Delta t$时，在M'及A'位置。在Δt时间间隔内，

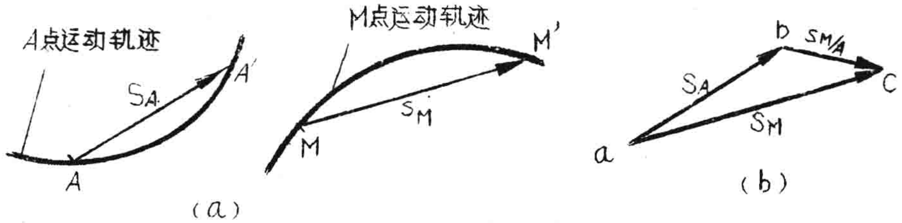


图 13-9

A 点的位移为矢量 S_A，M 点的位移为矢量 S_M。作矢量 ab 等于矢量 S_A，矢量 ac 等于矢量 S_M，连 b 、c 点，于是矢量 bc 即代表在 Δt 时间间隔内，动点 M 相对于动点 A 的相对位移，以矢量式子表示即为

$$\vec{S}_{M/A} = \vec{S}_M - \vec{S}_A \text{。}$$

将上式两边各除以 Δt 并取极限，得

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{S}_{M/A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{S}_M}{\Delta t} - \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{S}_M}{\Delta t} \text{。}$$

根据速度的定义，矢量 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{S}_{M/A}}{\Delta t}$ 就是动点 M 相对于动点 A 的相对速度，矢量 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{S}_M}{\Delta t}$ 就是动点 M 的速度，矢量 $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{S}_A}{\Delta t}$ 就是动点 A 的速度。因此上式也可写成

$$\vec{v}_{M/A} = \vec{v}_M - \vec{v}_A$$

或

$$\vec{v}_M = \vec{v}_{M/A} + \vec{v}_A \qquad (13\text{-}15)$$

用文字叙述即动点M的速度等于它相对于动点A的相对速度和动点A的速度的矢量和。

例13-3　车厢以速度$v_{车}$沿水平直线行驶。雨滴铅直向下，滴在车厢侧面的玻璃上留下与水平线成α角的雨痕。求雨滴的绝对速度$v_{雨}$（图13-10）。

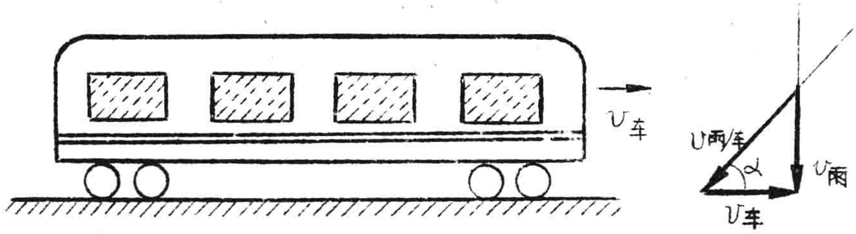


图 13-10

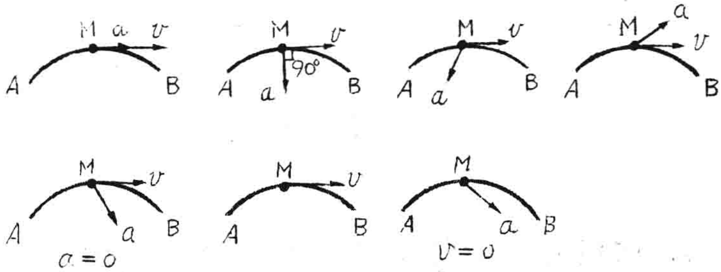
解：雨滴的绝对速度$v_{雨}$的方向是铅垂直向下的，车厢的速度$v_{车}$的方向是水平向右的，现在已知$v_{雨/车}$的方向与水平线成α角。应用相对速度关系式$\vec{v}_{雨}=\vec{v}_{雨/车}+\vec{v}_{车}$，画$v_{车}$，从$v_{车}$的两端点引出相应的速度线作出速度的矢量图。由三角关系得

$$v_{雨}=v_{车}\cdot tg\alpha。$$

第十三章　习　题

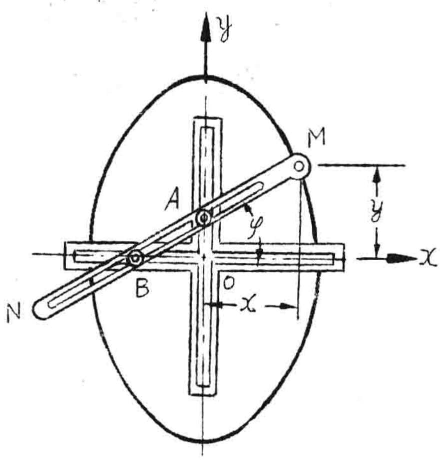
1. 矿井的升降机，在开始阶段匀加速上升，经过3秒钟速度达到3米／秒，然后以这个速度匀速上升6秒钟，最后在2秒钟内作匀减速运动，到达井口时正好停下来，求矿井的深度。

2. 试指出下列所画图中，M点的加速度方向是否可能如图所示？为什么？哪些是加速运动？哪些是减速运动？



题　2　图

3. 在右图中，MN杆上的A、B两点装有滑块，可以在相互垂直的两槽中滑动。已知：$\varphi=\omega t$，$MA=a$，$MB=b$，试求端点M所画出的轨迹。



题　3　图