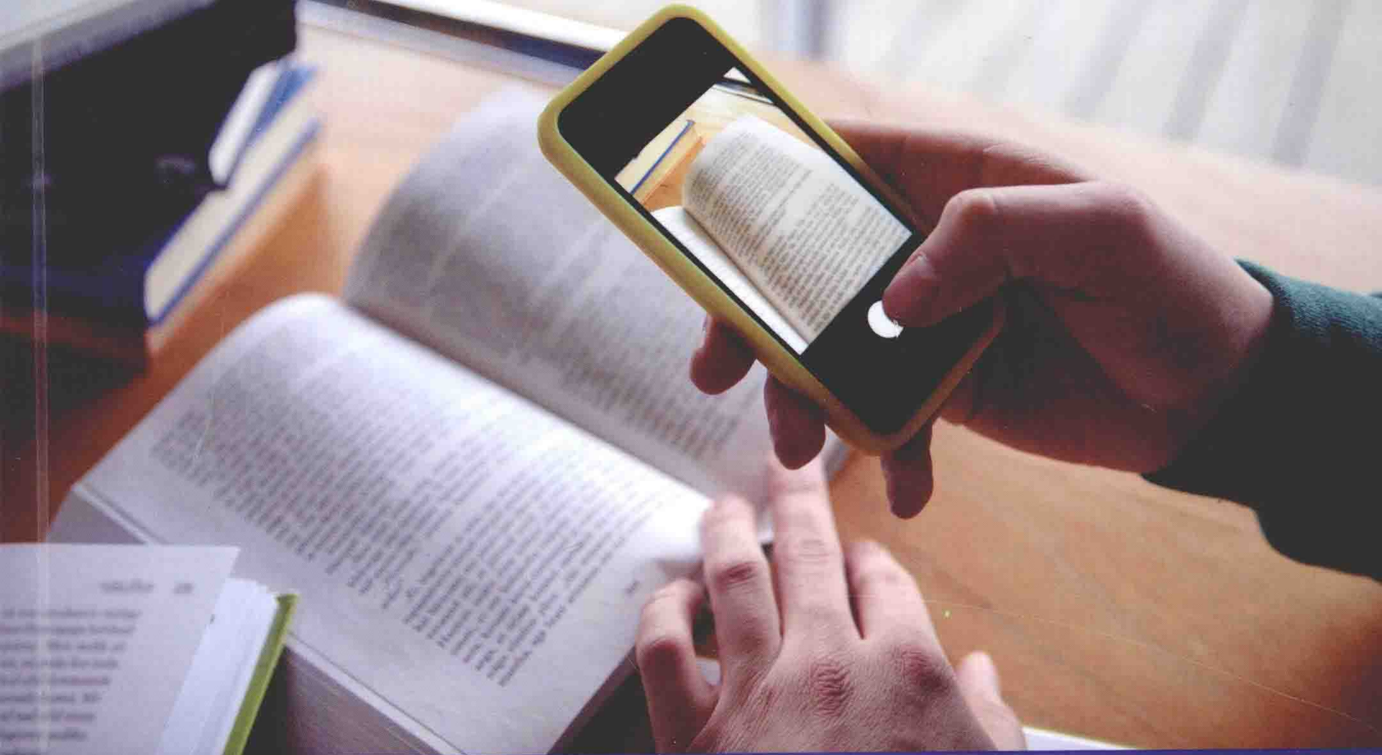


"十三五"移动学习型规划教材

微积分

主　编　范周田　张汉林

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

“十三五”移动学习型规划教材

微　积　分

主　编　范周田　张汉林
参　编　董庆华　沙　峯　黄秋梅

机 械 工 业 出 版 社

本书中取国内外优秀教材的众家之长，在透彻研究的基础上，以尽可能简单的方式呈现微积分知识.

本书是传统课本与网络（手机）结合的立体教材. 网络（手机）支持重点知识讲解、图形演示、习题答案或提示、扩展阅读、讨论等移动学习功能.

本书内容包括函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、多元微积分、无穷级数、微分方程与差分方程.

本书各节末均配有习题，各章末还配有综合习题.

本书可作为高等院校经济管理类专业的数学教材，也可作为自学或考研的参考书.

图书在版编目（CIP）数据

微积分/范周田，张汉林主编. —北京：机械工业出版社，2015.9
“十三五”移动学习型规划教材
ISBN 978-7-111-50100-8

Ⅰ.①微… Ⅱ.①范…②张… Ⅲ.①微积分—高等学校—教材 Ⅳ.①O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 168330 号

机械工业出版社（北京市百万庄大街 22 号 邮政编码 100037）
策划编辑：韩效杰 责任编辑：韩效杰
责任校对：佟瑞鑫 封面设计：路恩中
责任印制：乔 宇
保定市中画美凯印刷有限公司印刷
2015 年 8 月第 1 版第 1 次印刷
190mm×210mm · 12.666 印张 · 305 千字
标准书号：ISBN 978-7-111-50100-8
定价：39.00元

前　　言

微积分是学习如何解决问题的一门课程．尽管有些人可能在工作之后再也用不到微积分，但是他们仍然可以从微积分的学习中受益，因为学习微积分的好处不仅体现在专业上而且还体现在智力上．我们编写本书的目的是期望读者能够更顺利地完成微积分的学习．

本书逻辑简约，语言科学、平易，取国内外优秀教材的众家之长，秉承透彻研究、简单呈现的原则，对微积分内容及叙述方式做了进一步的梳理．

本书的一大特色是具备了网络支持功能，是传统教材与现代教育手段有机结合的一次尝试．网络（手机）视频、音频或文本支持重点知识讲解、图形演示、习题答案或提示、扩展阅读、讨论等，实现移动学习的功能，并将不断升级、扩展和完善．

对我们的同事、关心并支持我们的朋友和出版社的朋友一并表示感谢！

由编者水平和时间所限，书中难免有不妥之处，敬请广大读者批评指正．

编者

目　录

第 1 章 函　　数

为了方便阅读本书，我们把初等数学中已经涉及又和微积分密切相关的一些知识进行罗列或重新叙述，如函数的概念、某些特殊形式的函数，以及基本初等函数的图像与性质等，以备读者参考、查阅.

1.1 函数

在微积分中，我们主要研究数值之间的对应关系，即函数.

设 D 为实数集 $\mathbf{R}$ 的一个非空子集. 如果对 D 中的任意**一个**数值 x，都存在 $\mathbf{R}$ 中**唯一的一个**数值 y 与之对应，那么我们称这两个数值之间的对应关系为函数，记为 f，并记 $y = f(x)$，把 x 称为**自变量**，把 y 称为**因变量**，自变量的取值范围称为函数的定义域，因变量的取值范围称为函数的值域，分别记为 D_f 和 R_f.

我们通过一个简单的例子来进行说明.

令 $D = \{1,2,3\}$，D 到 $\mathbb{R}$ 的对应关系是：1 对应 5；

2 对应 10；

3 对应 15.

这个对应方式满足唯一性的要求，因此是一个函数，记为 f. 函数 f 可以描述为：D 中的每个数值都对应其自身的 5 倍.

把集合 D 内的数值用 x 表示，即 x 取值可以是 1,2,3 这三个数值中的任意一个，则函数 f 可以描述为：x 对应 $5x$，记为 $y = f(x) = 5x$. 定义域 $D_f = \{1,2,3\}$，值域 $R_f = \{5,10,15\}$.

需要注意的是，f 与 $f(x)$ 是有所不同的：f 是对应关系，即函数，而 $f(x)$ 表示函数 f 在 x 处的值. 一般情况下不做严格区分，我们说函数 f，也可以说函数 $f(x)$ 或者说函数 $y = f(x)$. 另外，函数表示与自变量和因变量所使用的字母是无关的，也**不一定要有表达式**.

如果函数是用于表达实际问题，那么它的定义域也由实际问题确定. 例如，设半径为 r 的圆的面积为 S，则有函数关系

$$S = \pi r^2,$$

由于 r 表示半径，因此有 $r > 0$.

微积分中许多时候不涉及函数的实际意义，只讨论函数的表达式. 在这种情况下，函数的定义域是使表达式有意义的所有值构成的集合. 例如，函数 $y=\pi x^2$ 的定义域是 $(-\infty,+\infty)$.

函数 $y=f(x)$ 是一元函数. 如果一个函数用来表示一个变量与另外一组变量之间的确定关系，即当这一组变量的取值都确定后，这个变量的取值也随之唯一确定，这一组中有几个变量就称函数是几元函数.

1.2 几种具有特殊性质的函数

1. 单调函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 如果对任意的 $x_1>x_2\in D$，都有 $f(x_1)>f(x_2)$，就称 $f(x)$ 是单调递增函数，简称单增. 如果对任意的 $x_1>x_2\in D$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$，就称 $f(x)$ 是单调递减函数，简称单减. 单调递增函数和单调递减函数统一称为单调函数.

一般而言，一个函数往往在其定义域中的某些区间上是递增的，而在另外的区间上是递减的，这样的区间称为函数的单调区间. 例如，函数 $y=x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调递增，在 $(-\infty,0]$ 上单调递减，$[0,+\infty)$ 和 $(-\infty,0]$ 就是函数 $y=x^2$ 的单调区间.

2. 奇函数与偶函数

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D. 如果对任意 $x\in D$，都有 $-x\in D$，我们就说 D 关于原点对称.

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，而且 $y=f(x)$ 的图形关于坐标系原点对称，就称函数 $y=f(x)$ 为奇函数. 即如果对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

如果函数 $y=f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，而且 $y=f(x)$ 的图形关于 y 轴对称，就称函数 $y=f(x)$ 为偶函数. 即如果对任意 $x\in D$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

例如，$y=x^2,x\in(-\infty,+\infty)$ 是偶函数，而 $y=x^3,x\in(-\infty,+\infty)$ 是奇函数.

3. 周期函数

设 $y=f(x)$ 为函数. 如果存在正数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$ 对定义域中的任意 x 成立，则称 $y=f(x)$ 为周期函数，T 是一个周期.

通常情况下，我们关心周期函数的最小正周期，简称周期. 例如，正弦函数 $y=\sin x$ 和余弦函数 $y=\cos x$ 的周期是 2π，而正切函数 $y=\tan x$ 和余

切函数 $y=\cot x$ 的周期是 π.

当然也有例外的情况,例如,常数函数 $y\equiv C$ 是周期函数,任意正数都是它的周期,因此它没有最小正周期.

4. 有界函数

设 $f(x)$ 在 D 上有定义. 若存在常数 $M>0$,使得一切 $x\in D$,有 $|f(x)|\leqslant M$ 则称 $f(x)$ 在 D 上有界,也称 $f(x)$ 是 D 上的有界函数.

例如,因 $|\sin x|\leqslant 1$,故 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界. 有界函数也可以如下定义:若存在常数 m 和 M,使得一切 $x\in D$,有 $m\leqslant f(x)\leqslant M$,则称 $f(x)$ 在 D 上有界,其中 m 称为函数 $f(x)$ 的一个下界,M 称为函数 $f(x)$ 的一个上界.

例如,函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 上有界,因 $0<\dfrac{1}{x}\leqslant 1,x\in(1,+\infty)$.

1.3 反函数

设 f 为一元函数. 如果对任意的 $y\in R_f$,都存在唯一的 $x\in D_f$,使得 $y=f(x)$,则称函数 f 有**反函数**. f 的反函数记为 f^{-1}.

函数 $y=f(x)$ 的反函数可以记为 $x=f^{-1}(y)$,也可以记为 $y=f^{-1}(x)$. 函数 $y=f(x)$ 与 $x=f^{-1}(y)$ 的图像是相同的,与 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y=x$ 对称.

例如,$y=\sqrt{x}$ 有反函数 $x=y^2$,也可以说 $y=\sqrt{x}$ 的反函数是 $y=x^2$.

一般地,不是任意的函数都有反函数. 例如,$y=x^2,-\infty<x<+\infty$ 就没有反函数.

函数 $y=f(x)$ 存在反函数的充分必要条件是对任意的 $x_1,x_2\in D_f$,如果 $x_1\neq x_2$,则 $f(x_1)\neq f(x_2)$. 特别地,**单调的函数有反函数**.

例如,正弦函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 有定义但没有反函数. 对任意给定的整数 k,函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[k\pi-\dfrac{\pi}{2},k\pi+\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上单调,因此有反函数. 特别地,我们把正弦函数 $y=\sin x$ 在区间 $\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$ 上的反函数记为 $y=\arcsin x,x\in[-1,1],y\in\left[-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2}\right]$.

类似地,反余弦函数、反正切函数和反余切函数见表 1-4~表1-6.

1.4 函数的表示

通常可以用集合、图表、数据对应、图形和解析表达式等表示函数.

1. 解析表达式(显函数)

我们在初等数学中熟知的函数,如多项式函数 $y=x^2+5x+3$, 正弦函数 $y=\sin x$, 指数函数 $y=a^x$, 对数函数 $y=\log_a x$ 等都是用解析表达式表示的.

2. 分段函数

一个函数在其定义域的不同部分可以有不同的表达式,即所谓的分段函数.

例 1.1　符号函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

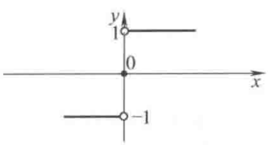


图 1-1

如图 1-1 所示,该分段函数的定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为 $\{-1,0,1\}$. 由符号函数的定义,对任意实数 x ,都有 $x=|x|\operatorname{sgn}x$.

例 1.2　设分段函数

$$y=\begin{cases}x^2-1, & x\in[-1,0),\\ 2x, & x\in[0,1),\\ -2x+4, & x\in[1,2),\\ 0, & x\in[2,3).\end{cases}$$

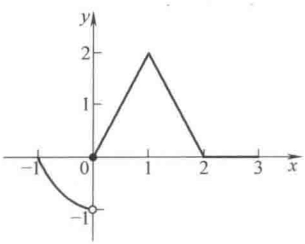


图 1-2

整个函数定义在$[-1,3]$上,如图 1-2 所示.

例 1.3　取整函数

对任意实数 x, 用 $y=f(x)=[x]$ 表示不超过 x 的最大整数,称为取整函数,其定义域为 $(-\infty,+\infty)$, 值域为整数集 $\mathbf{Z}$. 函数曲线呈阶梯状,又称为阶梯形曲线,如图 1-3 所示.

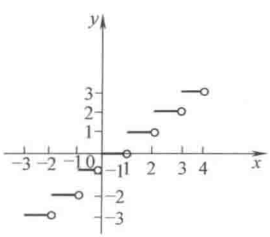


图 1-3

例 1.4　狄利克雷(Dirichlet) 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\in\mathbf{R}\backslash\mathbf{Q}.\end{cases}$$

狄利克雷函数十分特殊: $D(x)$ 是有界的函数, $|D(x)|\leqslant 1$; $D(x)$ 是偶函数,即 $D(-x)=D(x)$; $D(x)$ 是周期函数,以任意的正有理数为周期,由于没有最小的正有理数,所以 $D(x)$ 也就没有最小正周期. 另外,我们无法画出 $D(x)$ 的图像.

3. 隐函数

在平面直角坐标系 Oxy 中，以坐标系原点为圆心的单位圆可以用方程 $x^2+y^2=1$ 表示. 如果只考虑上半圆，即 $y\geqslant 0$，则可以从方程 $x^2+y^2=1$ 中解出 $y=\sqrt{1-x^2}$；如果只考虑下半圆，即 $y\leqslant 0$，则可以从方程 $x^2+y^2=1$ 中解出 $y=-\sqrt{1-x^2}$. 我们说函数 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和函数 $y=-\sqrt{1-x^2}$ 都是由方程 $x^2+y^2=1$ 确定的函数，称为隐函数. 需要注意的是，如果不对 y 进行任何限制，则将有两函数 $y=f(x)$ 满足方程 $x^2+y^2=1$.

一般地，如果函数 $y=f(x)$ 满足方程 $F(x,y)=0$，即 $F(x,f(x))=0$，我们就说 y 是方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 x 的隐函数.

通常情况下，即使知道 y 是方程 $F(x,y)=0$ 所确定的 x 的隐函数，也不一定能够从方程 $F(x,y)=0$ 中把 y 解出来.

1.5 基本初等函数

基本初等函数没有十分明确的规定. 本书为了方便，除了较特殊的**常数函数** $y=C$ 外，把微积分中最常见的函数分为五类，称为**基本初等函数**，包括幂函数 $y=x^{\mu}\ (\mu\neq 0)$，指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$，对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$，三角函数 $\sin x,\cos x,\tan x,\cot x$，以及反三角函数 $\arcsin x,\arccos x,\arctan x,\operatorname{arccot} x$.

1. 幂函数 $y=x^{\mu}\ (\mu\neq 0)$

幂函数的定义域稍显复杂，与 μ 的具体取值有关：当 μ 为正整数时，定义域为 $(-\infty,+\infty)$；当 μ 为负整数时，定义域为 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$；其他情况详见表 1-1，其中 p,q 是正整数.

表 1-1 幂函数的定义域

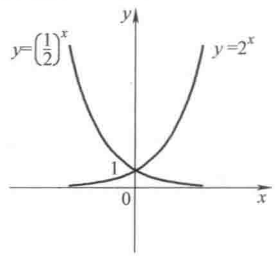
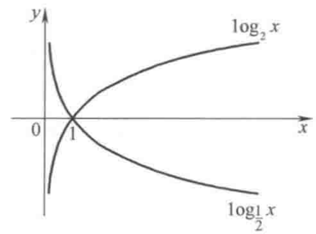
函数	$y=x^{\mu}\quad(\mu\neq 0)$				
μ	$\mu=\frac{q}{2p}$	$\mu=\frac{q}{2p+1}$	$\mu=-\frac{q}{2p}$	$\mu=-\frac{q}{2p+1}$	μ 为无理数
定义域	$[0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$	$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$	$(0,+\infty)$

注：表中的分数为既约分数.

由表 1-1 可见，对于任意实数 $\mu\neq 0$，幂函数 $y=x^{\mu}$ 都在 $(0,+\infty)$ 上有定义. 当 $\mu>0$ 时，$y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增；当 $\mu<0$ 时，$y=x^{\mu}$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

2. 指数函数与对数函数(见表 1-2)

表 1-2　指数函数与对数函数

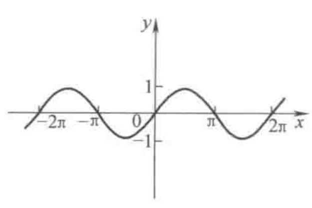
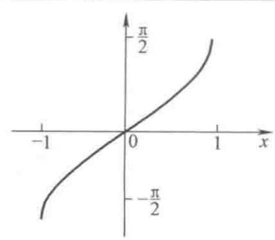
函　数	指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$	对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$(0,+\infty)$
值　域	$(0,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$
图形		
性质	当 $a>1$ 时,$y=a^x$ 单调递增 当 $0<a<1$ 时,$y=a^x$ 单调递减	当 $a>1$ 时,$y=\log_a x$ 单调递增 当 $0<a<1$ 时,$y=\log_a x$ 单调递减

当 $a=\mathrm{e}$ 时，相应的指数函数为 $y=\mathrm{e}^x$，相应的对数函数为 $y=\ln x$，又称为**自然对数**. 其底数 **e=2. 718 281 828 459 045 09…**，它是一个无理数，e^x 和 $\ln x$ 在微积分中使用的频率很高.

3. 三角函数与反三角函数

三角函数与反三角函数的图像与性质见表 1-3 ～ 表 1-6.

表 1-3　正弦函数与反正弦函数

函　数	正弦函数 $y=\sin x$	反正弦函数主值 $y=\arcsin x$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
值　域	$[-1,1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$
图　形		

（续）

奇偶性	$\sin x$ 为奇函数，图形关于原点对称	$\arcsin x$ 为奇函数，图形关于原点对称
周期性	最小正周期 2π	非周期函数
单调性	在 $\left(-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增 在 $\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递减	单调递增

表 1-4　余弦函数与反余弦函数

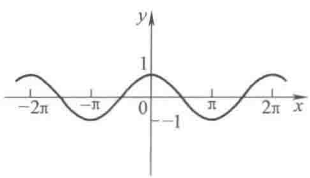
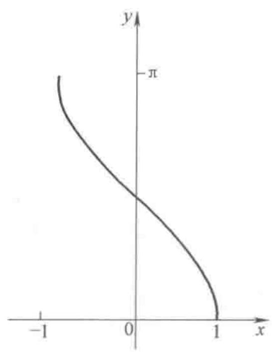
函　数	余弦函数 $y=\cos x$	反余弦函数主值 $y=\arccos x$
定义域	$(-\infty,+\infty)$	$[-1,1]$
值　域	$[-1,1]$	$[0,\pi]$
图　形		
奇偶性	$\cos x$ 为偶函数，图形关于 y 轴对称	$\arccos x$ 非奇非偶
周期性	最小正周期 2π	非周期函数
单调性	在 $(2k\pi,\pi+2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递减 在 $(-\pi+2k\pi,2k\pi)$，$k\in\mathbf{Z}$ 上单调递增	单调递减

表 1-5　正切函数与反正切函数

函　数	正切函数　$y=\tan x$	反正切函数主值　$y=\arctan x$
定义域	$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}$	$(-\infty,+\infty)$
值　域	$(-\infty,+\infty)$	$\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$

（续）

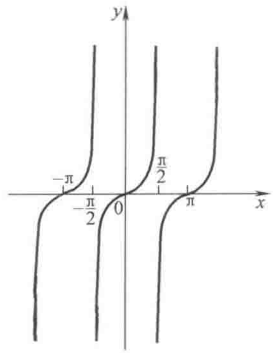
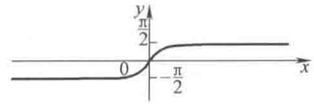
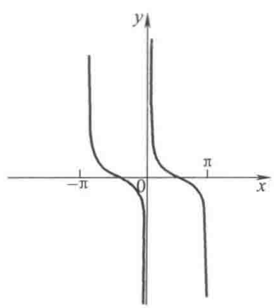
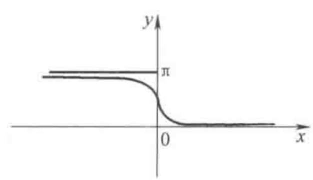
图　形		
奇偶性	$\tan x$ 为奇函数，图形关于原点对称	$\arctan x$ 为奇函数，图形关于原点对称
周期性	最小正周期 π	非周期函数
单调性	在每个周期内都单调递增	单调递增

表 1-6　余切函数与反余切函数

函　数	余切函数 $y=\cot x$	反余切函数主值 $y=\operatorname{arccot} x$
定义域	$x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}$	$(-\infty,+\infty)$
值　域	$(-\infty,+\infty)$	$(0,\pi)$
图　形		
奇偶性	$\cot x$ 为奇函数，图形关于原点对称	$\operatorname{arccot} x$ 非奇非偶
周期性	最小正周期 π	非周期函数
单调性	在每个周期中都单调递减	单调递减

下列函数也属于常用函数.

正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}, x\neq k\pi+\dfrac{\pi}{2}, k\in\mathbf{Z}.$

余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}, x\neq k\pi, k\in\mathbf{Z}.$

初等数学中,最重要的三角函数公式有两个,即

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y\pm\cos x\sin y,$$
$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\sin x\sin y.$$

微积分中需要用到的三角函数公式都可以由这两个公式推导出来.

例如,令 $y=x$,由 $\cos(x-y)=\cos x\cos y+\sin x\sin y$,得到

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1,$$

等式两边同时除以 $\cos^2 x$,得到

$$\tan^2 x+1=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,$$

等式两边同时除以 $\sin^2 x$,得到

$$\cot^2 x+1=\frac{1}{\sin^2 x}=\csc^2 x.$$

令 $y=x$,由 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$,得到

$$\cos 2x=\cos^2 x-\sin^2 x=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 x.$$

令 $y=x$,由 $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$,得到

$$\sin 2x=2\sin x\cos x.$$

另外有:

和差化积公式

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\sin x-\sin y=2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},$$
$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}.$$

积化和差公式

$$\sin x\cos y=\frac{1}{2}\sin(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y),$$
$$\cos x\sin y=\frac{1}{2}\sin(x+y)-\frac{1}{2}\sin(x-y),$$
$$\cos x\cos y=\frac{1}{2}\cos(x+y)+\frac{1}{2}\cos(x-y),$$