应用数学物理方程

谢鸿政　主编

清华大学出版社

应用数学物理方程

谢鸿政　主　编

清华大学出版社
北　京

内容简介

本书包括数学物理方程与偏微分方程有关的基本概念；典型数学模型的建立与定解问题；两个自变量的线性二阶偏微分方程的分类与化简；解双曲型方程定解问题的特征线积分法；解有界区域上定解问题的分离变量法；本征值问题与常微分方程边值问题；特殊函数与奇异本征值问题；调和函数的性质及其对拉普拉斯方程等边值问题的应用；格林函数及其对解偏微分方程定解问题的应用；基本解、广义函数与广义解相关理论；解无界区域上偏微分方程等定解问题的积分变换法；能量积分、椭圆型与抛物型方程的极值原理及其对定解问题解的唯一性等的应用。书中包含100余应用例题与含参考答案的270余习题。

本书可作为大学理工类本科生专业基础课“数学物理方程”和“偏微分方程”的教材，也可作为非基础数学专业研究生学位课程的教材，还可作为广大科学技术工作者的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

应用数学物理方程/谢鸿政主编. --北京：清华大学出版社，2014（2015.2 重印）
ISBN 978-7-302-38017-7

Ⅰ. ①应…　Ⅱ. ①谢…　Ⅲ. ①数学物理方程　Ⅳ. ①O175.24

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 215998 号

责任编辑：章忆文　孟　攀
装帧设计：杨玉兰
责任校对：周剑云
责任印制：杨　艳

出版发行：清华大学出版社
网　　址：http://www.tup.com.cn，http://www.wqbook.com
地　　址：北京清华大学学研大厦A座　　**邮　　编**：100084
社 总 机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544
投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn
质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn
课 件 下 载：http://www.tup.com.cn,010-62791865
印 装 者：北京密云胶印厂
经　　销：全国新华书店
开　　本：185mm×260mm　　**印　　张**：16　　**字　　数**：389 千字
版　　次：2014 年 10 月第 1 版　　**印　　次**：2015 年 2 月第2 次印刷
印　　数：2001～3500
定　　价：32.00 元

产品编号：059090-01

前　言

作为理论和应用数学的十分重要的分支，数学物理方程在现代物理学、力学、天文学、化学和生物学等自然科学；以及在能源和其他资源的勘探开发与应用、大型建筑与水利工程、航天工程、通信工程、金属加工冶炼工程、遥感控制技术、医疗诊断、气象预报、新材料的研究与应用以及遗传工程等科学技术领域，发挥着重要的作用.

为了更好地适应新世纪培养现代科技人才的需要，笔者依据长期的教学经验，并吸取国内外相关文献的一些长处，新编写了这本《应用数学物理方程》教材.

本书内容主要按照各种基本数学物理方程定解问题的求解方法及相关问题展开讨论. 在介绍有关基本概念、原理的同时，重点阐述求解偏微分方程定解问题的重要方法和技巧. 全书共分七章：第 1 章介绍了偏微分方程有关的基本概念和定义，论述了相应一些物理现象的典型数学物理方程的建立及其相应基本定解问题的提法，讨论了关于两个自变量的二阶线性偏微分方程的分类、化简与标准型；第 2 章详细论述了主要用于求解双曲型方程有关定解问题的特征线积分法及其应用实例；第 3 章详细论述了应用广泛的求解有界区域上定解问题的分离变量法及其应用实例；第 4 章讨论与前一章密切相关的本征值问题、求解常微分方程边值问题的格林函数法，以及特殊函数与相应的奇异斯图姆-刘维尔问题；第 5 章讨论与偏微分方程带有边界条件的定解问题相关的调和函数、格林函数及其应用，并介绍了涉及非古典意义的基本解，广义函数与广义解等相关理论；第 6 章讨论主要用于求解无界区域上偏微分方程等定解问题的傅里叶和拉普拉斯及汉克尔积分变换法；第 7 章讨论相关双曲型和抛物型方程的能量积分，椭圆型与抛物型方程的极值原理等有关解的定性方面的内容，并应用它们讨论了相关定解问题解的唯一性和稳定性.

本书在附录中列出了应用中常涉及的伽马、贝塔和误差函数，在笛卡儿坐标、柱坐标及球坐标下的梯度、散度、旋度及拉普拉斯算子的表达式，以及傅里叶与拉普拉斯积分变换函数的对照表. 最后列出了很多相关的重要参考文献.

本书主要作为大学理工科本科生的“数学物理方程”或“偏微分方程”的专业或技术基础课教材，也可作为非基础数学专业研究生的学位课教材，所包含的内容可供不超过 60 课时的选材.

本书在第 1～6 章编配了难易程度不同的 100 余解题范例和含参考答案的 270 余练习题，正文中有关问题的论证或推导较为详细，其中也包含一些新的讨论方法. 这些有利于同学深入和准确地理解、掌握这门较难的课程，也突显出本书的应用性.

对于从事有关应用理论研究的科学技术工作者，本书也是一本有益的参考书.

书中难免有不妥之处，敬请读者指正.

编　者

符 号 说 明

$\forall$：对于任意或所有的……，某命题或式成立

$\exists$：存在某元素(数)……，使……为真

$\in$：属于 ……

$\notin$：不属于……

$\leftrightarrow$或$\Leftrightarrow$：等价或充分必要

$\rightarrow$或$\Rightarrow$：由……推得

$\subset$：属于内部(真子集，与包含它的集合的边界有正的距离)

$\supset$：包含(被包含的集合与包含集合的边界有正的距离)

$\supseteq$：包含

$\subseteq$：包含于

$\not\subset$：不包含于

$\varnothing$：空集

N：正整数集

Z：整数集

$\mathbf{Z}_+$：非负整数集

Q：有理数集

R：实数集 ；$\mathbf{R}^+$：正实数集

C：复数集

$\bigcup$：并或和集

$\bigcup\limits_{i=1}^{n}$：诸并集(n 可为$+\infty$)

$\bigcap$：交集；$\bigcap\limits_{i=1}^{n}$：诸交集

$<\ ,\ >$：有序偶，偶；$<,\ \cdots,\ >$：有序元组

$\times$：笛卡儿积

R^n：n 维 Euclid (欧几里得)空间，或n 个实直线R 的积

$X=(x_1,\ \cdots,\ x_n)$：R^n 中的变量

$X\cdot Y=<X,Y>=x_1y_1+\cdots+x_ny_n$：$R^n$ 中的向量X 与Y 的纯量积(内积)

Z^n：n 个Z 的积 ；Z_+^n：n 个Z_+ 的积，

$\mathbb{C}^n$：n 个复平面的积

$Z=(Z_1,\cdots,Z_n)$：$\mathbb{C}^n$ 中的复变量

$\mathrm{Re}\,Z=(\mathrm{Re}\,Z_1,\cdots,\mathrm{Re}\,Z_n)$：复向量$Z$ 的实部

$\mathrm{Im}\,Z=(\mathrm{Im}\,Z_1,\cdots,\mathrm{Im}\,Z_n)$：复向量$Z$ 的虚部

$Z \cdot W = \langle Z, W \rangle = Z_1 W_1 + \cdots + Z_n W_n$： $\mathbb{C}^n$ 中的复向量 Z 与 W 的纯量积

$|X| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$： R^n 中的 Euclid 范数(模)

$|Z| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}[(\mathrm{Re} Z_i)^2 + (\mathrm{Im} Z_i)^2]}$： $\mathbb{C}^n$ 中的 Euclid 范数(模)

$|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$： n 数组 $\alpha \in Z_+^n$ 的长度 ； $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_n!$

$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \beta_1\end{pmatrix} \cdots \begin{pmatrix}\alpha_n\\ \beta_n\end{pmatrix}$ ， $\begin{pmatrix}\alpha_j\\ \beta_j\end{pmatrix} = \dfrac{\alpha_j!}{\beta_j!(\alpha_j - \beta_j)!}$， 其中 $\alpha, \beta \in Z_+^n$， $\alpha_j \geqslant \beta_j$ $j = 1, \cdots, n$

$[X]$ ： X 的整数部分记号

$\{,\cdots,\}$； $\{\cdots|\cdots\}$： 集合号

$\max\{\cdots\}$： 最大数； $\min\{\cdots\}$： 最小数

$\sup\{\cdots\}$： 实数集合的上确界； $\inf\{\cdots\}$： 实数集合的下确界

$\sum\limits_{n \leqslant x}$ 与 $\sum\limits_{n < x}$： 整数求和号

$\sum\limits_{i=k}^{n}$： 总求和号(k, n 为整数，且 $-\infty \leqslant k \leqslant n \leqslant +\infty$)

$\prod\limits_{i=1}^{n}$ ： 连乘号($1 \leqslant n \leqslant +\infty$)

$[a, b]$： $R^1(R)$ 中实直线中一个子闭区间($-\infty < a < b < +\infty$)

$[a, b)$ 或 $(a, b]$： R 中的半闭区间； (a, b)： R 中的开区间

$\lim$： 极限； $\underline{\lim}$： 归纳极限

$\overline{\lim}$： 上极限； $\underline{\lim}$： 下极限

Ω (可用 D 或其他符号)： R^n 中的开子集(域)

$\overline{\Omega}(\overline{D})$： R^n 中的闭子集(域)

$\partial\Omega(\partial D)$： $\Omega(D)$ 的边界

$\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$： 又称 Ω 的闭包

$|\Omega|$： Ω 的体(容)积

$\omega_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{n\Gamma(n/2)}$： R^n 中单位球的体积

$\varpi_n = \dfrac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}$ ： R^n 中单位球的表面积

$d(X, A) = \inf\left\{\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i - y_i)^2\right]^{\frac{1}{2}}, y = (y_1, \cdots, y_n) \in A\right\}$ ： 点 X 到集合 A 的 Euclid 距离

$B_r(X) = \left\{Y \in \mathrm{R}^n \,\middle|\, |Y - X| = \left[\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2\right]^{\frac{1}{2}} < r\right\}$ ： 中心在 X 处，半径为 r 的开球

$\mathrm{Supp}\, u$： u 的支集(support)，在此支集外 $u = 0$ 的最小闭集

Dom： 定义域

$\mathrm{Ran}\, f$ ： (f)值域

$\mathrm{Im}\,f$： f 的像

$f(E\to F)$：定义在集合 E 中，取值在集合 F 中的映射 f

$A_{m\times n}=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$： m 行 n 列的矩阵，m=n 时为方阵

$\boldsymbol{I}$ 或 $\boldsymbol{E}$：单位矩阵

diag $\{\cdots\}$ ：对角矩阵

$\boldsymbol{A}^{-1}$：方阵 $\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵

$\boldsymbol{A}^{T}(\boldsymbol{A}')$：$\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵

rank($\boldsymbol{A}$)：矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩

det $\boldsymbol{A}$：方阵 $\boldsymbol{A}$ 的行列式

$D_i u=\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$, $\quad D_{ij}u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$： u 的关于 x_i 和 x_i,x_j 的偏导数

$Du=(Du_1,\cdots,Du_n)$ ： grad$u$ 梯度

$D^2u=\left[D_{ij}u\right]$：二阶偏导数 $D_{ij}u$ $\quad i,j=1,2,\cdots,n$ 的矩阵

$\Delta=\nabla^2=\sum\limits_{i=1}^{n}\dfrac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ ： n 个变量的拉普拉斯算子

$\square=\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta$： n 个空间变量与一个时间变量 t 的波动算子

$D^{\beta}u=\dfrac{\partial^{|\beta|}u}{\partial x_1^{\beta_1}\cdots\partial x_n^{\beta_n}}$： n 个变量多重指标 $\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$ 相应的 $|\beta|$ 阶导数，其中

$$|\beta|=\sum_{i=1}^{n}\beta_i\ ,\quad \beta_i(i=1,\cdots,n)\ \text{是非负整数}$$

$C^{(0)}(\Omega)=C(\Omega)$ ：在开集 Ω 中定义的连续函数集合

$C^{(0)}(\overline{\Omega})=C(\overline{\Omega})$ ：在 Ω 的闭包上定义的连续函数集合

$C^{(m)}(\Omega)$：在 Ω 中定义并且有 m 次连续导数的函数集合

$C^{(m)}(\overline{\Omega})$：在 $\overline{\Omega}$ 上定义并且有 m 次连续导数的集合

$C^{(\infty)}(\Omega)=C(\Omega)$ ：在开集 Ω 中定义的无穷次连续可微的函数集合

$L^p(\Omega)=\left\{u(x)\,|\,\|u(x)\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_{\Omega}|u(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{1/p}<+\infty,1\leqslant p<+\infty\right\}$：可测函数 $u(x)$ 的勒贝格(Lebesgue)空间，使 $|u(x)|$ 的 $p(1\leqslant p<+\infty)$ 次幂在 Ω 上可积，其中 $\|u(x)\|_{L^p(\Omega)}$ 表示赋予的范数

$L^{\infty}(\Omega)$： Ω 中本质有界的(essentially bounded)可测函数 $u(x)$ 的勒贝格空间，赋予范数 $\|u(x)\|_{L^{\infty}(\Omega)}$，为 $u(x)$ 的本质上确界(essential supremum)

目 录

第1章 引 论

1.1 序 言

近代数学物理方程是指在物理学、力学、天文学、化学、生物学等自然科学各学科，以及工程技术领域所建立的偏微分方程、常微分方程、积分方程以及微分－积分方程．其中偏微分方程通常为主要讨论的内容．

数学物理方程起源于微积分创立之初，早期的重要方程有描述引力场的拉普拉斯方程和泊松方程，在连续介质力学中，有表述守恒定律的流体力学中的欧拉方程组与纳维－斯托克方程组；有在弹性力学中的圣维南方程组等。另外，有分别描述波传播的波动方程和传热与扩散现象的热传导方程．

自19世纪以来，相继建立了大量的新的数学物理方程，其中有著名的描述电磁场变化的麦克斯韦方程组；有描述微观世界中分子、原子及其他基本粒子运动的中子迁移和扩散方程，波尔兹曼方程，薛定谔方程以及热核反应过程中的辐射流体力学方程组；有描述具有扩散现象的化学反应的反应扩散方程；有描述海洋不同生物种群数量动态平衡的伏尔泰拉积分－微分方程组；有在涉及地震与海啸、激光等非线性孤立子波的研究中建立的Kdv(Korteweg-de Vries)方程和正弦－戈登(Sine-Gordon)方程等非线性方程．上述一些方程也出现在工程技术各领域的研究中．此外，还建立了一些诸如钢铁冶炼工程中的移动边界的热传导方程问题；油田开发研究中描述油层的压力、石油的流速、油井的产量及水井的注水量等之间变化的退化抛物型方程组；在海洋深水中研究雷达等相关的带有点源$\sigma-$函数的扩散与波动方程等各专项研究领域中的数学物理方程．

随着新科技时代的发展，数学物理方程将会不断扩大和深化其理论与应用方面的成果更加丰硕，从而在国家的科学技术发展和经济及国防建设方面发挥更大的作用．

在长期的科研教学实践中，对具有广泛应用的作为基础的线性偏微分方程，人们总结出了较完整系统的理论，这些理论构成当今大学《数学物理方程》课程的基本内容．

1.2 偏微分方程的基本概念与定义

包含多元函数偏导数的微分方程称作**偏微分方程**，其典型的形式如下：

$$F(x_1,\cdots,x_i,\cdots,u,\cdots,u_{x_j},\cdots,u_{x_ix_j},\cdots)=g(x_1,\cdots,x_n) \tag{$\star$}$$

其中，$x_1,\cdots x_i,\cdots$ 是自变量，$u=u(x_1,\cdots,x_n)$ 是自变量的未知函数，而 $u_{x_i},\cdots,u_{x_ix_j},\cdots$ 是 u 关于自变量的偏导数．这里，$(x_1,\cdots,x_n)\in D\subseteq R^n$，$(n\geqslant 2)$，$F,g$ 是自变量的已知函数或常数．

如果 $g(x_1,\cdots,x_n)\equiv 0$，$\forall(x_1,\cdots,x_n)\in D$，方程($\star$)称为齐次的，否则称为非齐次的．方程中所包含的最高阶导数的阶称为方程的**阶**．

线性方程．方程中所包含的未知函数及其所有的导数本身都是线性的(一次幂)，并且它们的系数都是已知函数或常数，这样的方程称作**线性方程**．例如：

$u_{xx}+2xyu_{xy}+x^3u_{yy}=\mathrm{e}^y$ 是非齐次二阶线性方程；

$u_{xyz}+3x^2yu_{xx}+5yz^4u_y=0$ 是齐次三阶线性方程；

$a(x,y,z)u_{xxyz}+b(x,y,z)u_{xyy}+c(x,y,z)u_z=g(x,y,z)$ $[a(x,y,z)\cdot g(x,y,z)\neq 0]$ 是非齐次四阶线性方程．

拟线性方程．在非属线性方程中，如果所包含的最高阶导数自身都是线性的，它们的系数不包含最高阶导数，这样的方程称为**拟线性方程**．例如：

$u_x^2u_{xyy}+2xyu_yu_{xy}+u^3=\mathrm{e}^{xy}$ 是非齐次三阶拟线性方程；

$a(x,y,u_y)u_{xx}+b(x,y,u)u_{yy}+u_xu_y=0$ $[a(x,y,u_y)\cdot b(x,y,u)\neq 0]$ 是齐次二阶拟线性方程．

非线性方程．不属于上述两类的偏微分方程是**非线性方程**．例如：

$(x^2+y^2u)u_{xxyy}^{1/2}+7xyu_{xy}^3+xy^3u=\sin(xy)$ 是非齐次四阶非线性方程；

$u_{xyy}\cdot u_{yyy}+5\sqrt{x^3+y^2}u_{xy}+(x+y^3)u^3=\ln(xy)$ 是非齐次三阶非线性方程．

二阶线性偏微分方程是以后讨论的主要对象，其一般形式为：

$$\sum_{i,j=1}^{n}A_{ij}u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}B_iu_{x_i}+Cu=G \tag{$\star\star$}$$

其中，$A_{ij}=A_{ji}(x_1,\cdots,x_n),B_i=B_i(x_1,\cdots,x_n),i,j=1,\cdots n$；而 C,G 是自变量 $(x_1,\cdots,x_n)\in R^n$ 的已知函数或常数．

偏微分方程(⋆)的(经典)解．设(⋆)是 m 阶偏微分方程，如果求得一个函数 $u=u(x_1,\cdots,x_n)$，满足条件：① $u(x_1,\cdots,x_n)\in C(\overline{D})\cap C^{(m)}(D)$；②将 u 及其所求得的在方程中出现的各阶偏导数代入方程(⋆)中相应的位置，使式(⋆)变为恒等式，则称 $u(x_1,\cdots,x_n)$ 为方程(⋆)的在区域 $\overline{D}\subseteq R^n$ 上的**(经典)解**．

例题．解下列方程．

(1) $u_{xy}=x^3y^2\quad(u=u(x,y))\Rightarrow u_x=\dfrac{1}{3}x^3y^3+f_1(x)$

$\Rightarrow\quad u=\dfrac{1}{12}x^4y^3+f(x)+g(y),\quad\forall f,g\in C^{(1)}(R)$

(2) $u_{yy}=6y\ (u=u(x,y,z))\Rightarrow u_y=3y^2+f(x,z)$

$\Rightarrow u=y^3+yf(x,z)+g(x,z)\quad\forall f,g\in C(R^2)$

(3) $u_x-2u_y=0\quad(u=(x,y))$，令 $\xi=2x+y,\ \eta=2x-y$，于是

$u_x-2u_y=(2u_\xi+2u_\eta)-2(u_\xi-u_\eta)=4u_\eta=0$

$\Rightarrow u_\eta=0,\quad u=f(\xi),\quad u(x,y)=f(2x+y),\quad\forall f\in C^{(1)}(R)$

此处，$f(2x+y)$ 包含无穷多线性无关的函数，例如：

$(2x+y)^n,\sin n(2x+y),\cos n(2x+y),\exp\{n(2x+y)\},\quad\forall n\in\mathbf{N}$

从上述可以看出相应于常微分方程通解中的积分常数，在偏微分方程的通解中换成了积分函数(其自变量仅缺少求积分的自变量)．

以下介绍在偏微分方程的讨论中常涉及的线性算子和叠加原理.

算子. 数学运算法则，其作用一个函数结果得到另一个函数. 例如：

$$L=a\frac{\partial^2}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2}{\partial y^2},\qquad L[u]=a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+b\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

其中，L 称作线性二阶偏微分算子.

$$K=\int_a^b F(\xi,y)\cdot \mathrm{d}\xi,\ K[u]=\int_a^b F(\xi,y)u(\xi,y)\mathrm{d}\xi$$

其中，K 称为线性积分算子.

如果算子 A 和 B 作用于某集合中的任意函数，得到同样的结果，则称 A 与 B 是等价算子，记为 $A=B$，且有 $A[u]=B[u]$.

线性算子满足下列运算规则：

$(A+B)[u]=A[u]+B[u]$

$AB[u]=A[B[u]]$

$A+B=B+A$ (加法交换律)

$(A+B)+C=A+(B+C)$ (加法结合律)

$(AB)C=A(BC)$ (乘法结合律)

$A(B+C)=AB+AC$ (乘法对加法的分配律)

其中，u 是某集合中的任意函数，A,B,C 是线性算子.

通常，乘法的交换律不成立，即一般 $AB\neq BA$，例如：令

$A=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+x\dfrac{\partial}{\partial y},\quad B=\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}+y\dfrac{\partial}{\partial y}$ ，可得

$$AB[u]=\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+x\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+y\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+y\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial y}+x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+x\frac{\partial u}{\partial y}$$

$$BA[u]=\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2}+y\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+x\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

$$=\frac{\partial^4 u}{\partial y^2\partial x^2}+x\frac{\partial^3 u}{\partial y^3}+y\frac{\partial^3 u}{\partial y\partial x^2}+xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

显然，$AB\neq BA$. 若线性微分算子的所有系数都是常数，则乘法交换律成立.

线性算子. 如果算子 L 满足：

$L[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i u_i]=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i L[u_i],\ n\in\mathbf{N}$ ，$\forall\alpha_i\in R$ (或 $\mathbb{C}$)，u_i 是被作用的函数，则称 L 为**线性算子**.

叠加原理. 如果 L (表示方程)与 M_i $(i=1,\cdots,n)$ (表示定解条件)都是线性算子，满足：
$L[u]=g$，$M_i[u]=g_i\quad i=1,\cdots,n$

并且，$u=\sum_{i=0}^{n}u_i$，其中，$u_i\ (i=0,1,\cdots n,)$ 满足：

$L[u_0]=g, M_i[u_0]=0,\ i=1,\cdots,n$；$L[u_i]=0,\quad i=1,2,\cdots,n$

$$M_j[u_i]=\begin{cases}0, & i\neq j,\ 1\leqslant i\leqslant n,\\ g_j, & j=i,\quad j=1,2,\cdots,n.\end{cases}$$

如果能求得一个线性无关的函数列 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$，满足：

$$\begin{cases}L[\varphi_k]=0, & k\in\mathbf{N},\\ M_i[\varphi_i]\neq 0;\quad M_i[\varphi_k]=0, & i\neq k\in\mathbf{N},\quad 1\leqslant i\leqslant n.\end{cases}$$

并且可把 $g_i(\ i=1,\cdots,n)$表示成级数：

$$g_i=c_{i1}M_i[\varphi_1]+c_{i2}M_i[\varphi_2]+\cdots$$

而 $u_i\quad(i=1,\cdots,n)$ 可以表示成 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots$ 的线性组合：

$$u_i=c_{i1}\varphi_1+c_{i2}\varphi_2+\cdots,\quad i=1,\cdots,n$$

于是，$u=\sum_{i=0}^{n}u_i$ 就是原问题的解，这一过程和结果称为**叠加原理**．需说明的是，表示 $u_i\quad(i=1,\cdots,n)$ 的级数如果是无穷多项时，要求此级数一致收敛，并且可逐项微分解 u 所应满足的次数，而这微分后得到的无穷级数都一致收敛．

1.3 典型数学模型的建立与定解问题

这一节将讨论描述广泛存在的代表波动、热传导(或扩散)以及引力场的引力势(或静电场的电位)这些现象的典型偏微分方程模型的建立过程，并介绍与方程相配合的基本定解条件及共同组合构成的定解问题．

1.3.1 弦振动方程

考虑两端固定长度为 l 的一条拉紧的弦．问题是要确定它振动过程中的运动方程，用它来描述当给出初始扰动后，在任一时刻 t 的位移 $u(x,t)$．为建立方程，做如下一些符合实际的假设。

(1) 弦是柔软且有弹性的，它不能抵抗弯矩并且弦的张力总是沿着弦的切线方向。

(2) 弦的每一段都不伸长，因此根据胡克(Hooke)定律，张力是常数。

(3) 弦的重量与其张力相比很小(<0.01)。

(4) 弦的位移与其长度相比很小(<0.01)，称微小振动。

(5) 位移后的弦在任一点处的斜率的绝对值小于 0.1。

(6) 弦只有横振动。

考察弦上一微小元素．设 T 是如图 1-1 所示的两端点上的张力．作用在弦的这一微小元素上的垂直方向的力是：

$$T\sin\beta-T\sin\alpha$$

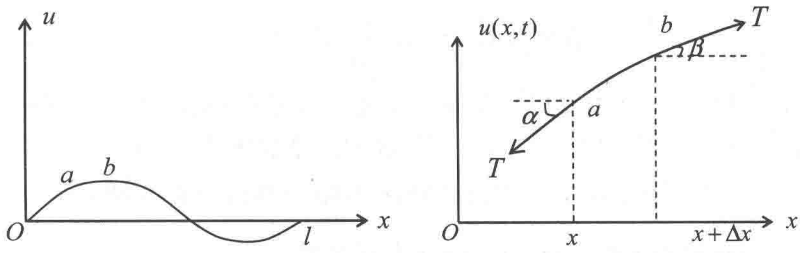

图 1-1

根据牛顿第二运动定律，合力等于质量乘以加速度，于是：

$$T\sin\beta - T\sin\alpha = \rho\Delta s u_{tt} \tag{1.3.1}$$

其中，$\rho > 0$ 是弦的密度，Δs 是这一小段弦位移后的弧长．由斜率很小的假设，可得

$$\Delta s \approx \Delta x\text{，}\quad \sin\alpha \approx \tan\alpha,\quad \sin\beta \approx \tan\beta$$

从而，由 (1.3.1) 得到：

$$\tan\beta - \tan\alpha = \frac{\rho\Delta x}{T}u_{tt} \tag{1.3.2}$$

由微积分学理论可知，在时刻 t 有：$\tan\alpha \approx (u_x)|_x$，$\tan\beta \approx (u_x)|_{x+\Delta x}$，

于是等式(1.3.2)可以写成：$\dfrac{1}{\Delta x}[(u_x)|_{x+\Delta x} - (u_x)|_x] = \dfrac{\rho}{T}u_{tt}$.

令 Δx 趋于零取极限，得到：

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \tag{1.3.3}$$

其中，$c^2 = \dfrac{T}{\rho}$，方程(1.3.3)称为一维**波动方程**.

如果在弦的每单位长度上有外力 F 的作用，则方程(1.3.3)取下列形式：

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} + f \tag{1.3.4}$$

其中，$f = \dfrac{F}{\rho}$，方程(1.3.4)称为受迫振动方程.

1.3.2 热传导方程

考查一个热传导问题．设 $D \subset R^3$ 是任一个被光滑封闭的曲面 $S \in C^{(1)}(R^3)$ 所包围的区域，$[t_1,t_2] \subset [0,+\infty)$ 是任一时间段．令 $u(x,y,z,t)$ 表示在时刻 $t \in [t_1,t_2]$ 于点 $P(x,y,z) \in D$ 处的温度．根据傅里叶(Fourier)定律可知，在微小时段 $\mathrm{d}t$ 沿着曲面 S 的外法线 $\vec{n}$ 流出小曲面元 $\mathrm{d}\vec{S}$ 的热量 $\mathrm{d}q$ (热流率)与法线方向的偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}$ (温度梯度)成正比，并且满足下列关系：

$$\mathrm{d}q = -k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}\vec{S}\mathrm{d}t \tag{1.3.5}$$

其中，正数 $k(x,y,z)$ 是热传导系数，而式中的负号表示热流的方向与梯度方向相反.

于是在时间段 $[t_1,t_2]$ 内，通过曲面 S 流入 D 内的总热量 Q 可表示为：

$$Q=\int_{t_1}^{t_2}\left\{\iint_S k(x,y,z)\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}\mathrm{d}\vec{S}\right\}\mathrm{d}t \tag{1.3.6}$$

另一方面，根据能量守恒定律，在没有转换其他能量的情况下，D 内的温度由 t_1 时刻的 $u(x,y,z,t_1)$ 变成 t_2 时刻的 $u(x,y,z,t_2)$ 所吸收的总热量应是同一 Q 值，它表示为：

$$Q=\iiint_D\{\rho(x,y,z)c(x,y,z)[u(x,y,z,t_2)-u(x,y,z,t_1)]\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \tag{1.3.7}$$

其中，$\rho(x,y,z)>0$ 表示密度，$c(x,y,z)>0$ 表示比热.

假设 $u(x,y,z,t)\in C(\overline{D})\cap C^2(D)$，根据高斯(Gauss)散度定理，(1.3.6) 式可写成：

$$Q=\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

而式(1.3.7)可以表为：

$$Q=\iiint_D\rho(x,y,z)c(x,y,z)\left\{\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}t\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

综上得到：

$$\int_{t_1}^{t_2}\iiint_D\left\{\rho c\frac{\partial u}{\partial t}-\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}t=0 \tag{1.3.8}$$

因为上述积分的区域和时间区间都是任意的，而被积函数是连续的，因此积分号可以去掉，从而得到下列所需求的**热传导方程**：

$$\rho c\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k\frac{\partial u}{\partial z}\right) \tag{1.3.9}$$

如果 ρ,c,k 都是正常数，而令 $a^2=\dfrac{k}{\rho c}$，则得典型的形式：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \tag{1.3.10}$$

如果在 D 内有热源，其在单位时间单位体积放出的热量为 $F(x,y,z,t)$，那么可得到如下形式的方程：

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+f(x,y,z,t) \tag{1.3.11}$$

其中，$f(x,y,z,t)=\dfrac{F(x,y,z,t)}{\rho c}$.

1.3.3 拉普拉斯方程

如果在热传导方程 (1.3.9) 中，$\dfrac{\partial u}{\partial t}\equiv 0$，即温度不再随时间变化，此时就得到如下的**拉普拉斯方程**：

$$\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \tag{1.3.12}$$

其中，$u=u(x,y,z)$.此方程也可通过在引力场引力对运动的质点做功而推得，此时方程也称为**势方程**．而非齐次方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}+f(x,y,z)=0 \tag{1.3.13}$$

称为**泊松(Poisson)方程**.

1.3.4 典型方程和定解问题

前述三种不同的模型方程分别反映了广泛存在的波动(振动)，热传导(或扩散)这两类与时间和空间变量都有关系的非定常现象，以及仅随空间变量变化的定常稳态现象(引力势等)，而它们对含有三个空间变量可称为代表性的典型方程是：

波动方程：
$$u_{tt}=c^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) \tag{1.3.14}$$

热传导方程：
$$u_t=c^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}) \tag{1.3.15}$$

拉普拉斯方程：
$$u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0 \tag{1.3.16}$$

上述典型方程都是反映一般的物理规律，通常称为**泛定方程**．然而，要确定所考查的物理量在某个确定位置(及非定常现象的确定时刻)的具体量值，仅有泛定方程是不够的，必须还要给出所考查区域的边界条件(如弦振动的两端点的约束条件等)和随时间变化的初始条件，这些条件统称为**定解条件**．由泛定方程和适当的定解条件按着一定规则配合而构成的能确定解的问题称作**定解问题**，它是我们以后讨论的对象．现将相应于典型方程构成的基本定解问题列举如下.

1) 初值问题或柯西(Cauchy)问题

(1) 波动方程的柯西问题(1.3.17)～(1.3.19)：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \quad -\infty<x,y,z<+\infty, \quad t>0 & (1.3.17)\\ u|_{t=0}\equiv u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), \quad -\infty<x,y,z<+\infty, & (1.3.18)\\ u_t|_{t=0}\equiv u_t(x,y,z,0)=\psi(x,y,z), \quad -\infty<x,y,z<+\infty. & (1.3.19)\end{cases}$$

(2) 热传导方程的柯西问题(1.3.20)～(1.3.21)：

$$\begin{cases} u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), \quad -\infty<x,y,z<+\infty, \quad t>0 & (1.3.20)\\ u|_{t=0}\equiv u(x,y,z,0)=\varphi(x,y,z), \quad -\infty<x,y,z<+\infty. & (1.3.21)\end{cases}$$

2) 拉普拉斯方程的边值问题(1.3.22)～(1.3.23)

$$\begin{cases} \Delta\equiv u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}=0, \quad (x,y,z)\in D\subset R^3, & (1.3.22)\\ \left(\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial \vec{n}}\right)\Big|_{\partial D}=h(x,y,z), \quad \alpha,\beta\geqslant 0;\alpha+\beta>0, \quad (x,y,z)\subset\partial D. & (1.3.23)\end{cases}$$

其中，D 是一有界区域，∂D 是其边界，而 $\vec{n}$ 是 ∂D 的外法线．①当 $\alpha>0$, $\beta=0$ 时，称为第一边值问题，也称为狄里克莱(Dirichlet)问题；②当 $\alpha=0$, $\beta>0$ 时，称为第二边值问题，也称为牛曼(Neumann)问题；③当 $\alpha\beta>0$ 时，称为第三边值问题，也称为洛比或洛平(Robin)问题.

3) 初值边值混合问题

(1) 波动方程的混合问题(1.3.24)～(1.3.27)：

$$\begin{cases} u_{tt}=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & (x,y,z)\in D\subset R^3, t>0, & (1.3.24)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in D, & (1.3.25)\\ u_t|_{t=0}=\psi(x,y,z), & (x,y,z)\in D, & (1.3.26)\\ \left(\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial D}=g(x,y,z,t), & (x,y,z)\in\partial D,\quad t\geqslant 0. & (1.3.27)\end{cases}$$

① 当 $\alpha>0$, $\beta=0$ 时，称为第一初值边值混合问题；②当 $\alpha=0$, $\beta>0$ 时，称为第二初值边值混合问题；③当 $\alpha>0$, $\beta>0$ 时，称为第三初值边值混合问题.

(2) 热传导方程的混合问题(1.3.28)～(1.3.30)：

$$\begin{cases} u_t=a^2(u_{xx}+u_{yy}+u_{zz}), & (x,y,z)\in D,\quad t>0, & (1.3.28)\\ u|_{t=0}=\varphi(x,y,z), & (x,y,z)\in D, & (1.3.29)\\ \left(\alpha u+\beta\dfrac{\partial u}{\partial n}\right)\Big|_{\partial D}=g(x,y,z,t), & (x,y,z)\in\partial D,\quad t\geqslant 0. & (1.3.30)\end{cases}$$

余下初值边值问题的三种分类说明同上述波动方程混合问题(1).

需要强调指出的是出现在定解条件中的最高阶导数的阶数必须低于方程中关于同一自变量的最高阶导数项的阶数．另外，已知函数应满足适当的光滑性(连续可微性)，对于给定的定解问题，主要讨论下列三方面的内容：①**解的存在性**；②**解的唯一性**；③**解的稳定性**(解对定解条件的连续依赖性).

如果一个定解问题的解存在、唯一并且是稳定的，那么这样的定解问题称作**适定的问题**．而这也是以后讨论的问题.

1.4　两个自变量的线性二阶偏微分方程的分类和化简

在讨论定解问题之前，还需要做如下的准备，即讨论线性二阶偏微分方程的分类、化简及标准型．为简单起见，我们考查只有两个自变量 (x,y) 的线性二阶偏微分方程：

$$Au_{xx}+Bu_{xy}+Cu_{yy}+Du_x+Eu_y+Fu=G \tag{1.4.1}$$

其中， $A,B,C\ (A^2+B^2+C^2>0),D,E,F,G$ 是自变量的已知连续函数.

令 $\Delta=B^2-4AC$ 表示方程(1.4.1)的**类型判别式**，那么方程(1.4.1)有如下分类：① $\Delta>0$，称双曲型；② $\Delta=0$，称抛物型；③ $\Delta<0$，称椭圆型.

因为同一个数学表达式在不同的坐标系下有不同的表达形式，我们希望寻求一个称为较佳的坐标系，使得在此坐标系下表达式比较简单(项数较少)、较方便讨论相关解的问题，这就是讨论方程化简并求出其标准型的原因．为此考查不同坐标系下，随着自变量的转换而导致函数及其导数之间的转换关系：

令 $$\xi=\xi(x,y),\ \eta=\eta(x,y),\quad (\xi,\eta)\in C^{(2)}(D)$$

假设相应的(Jacobi)函数行列式为：

$$J=\begin{vmatrix}\xi_x & \xi_y\\ \eta_x & \eta_y\end{vmatrix}\neq 0,\quad (x,y)\in D$$