大学数学系列课程

复变函数

学习指导与练习

湖南大学数学与计量经济学院 组编

周金华 李丹衡 孟纯军 主编

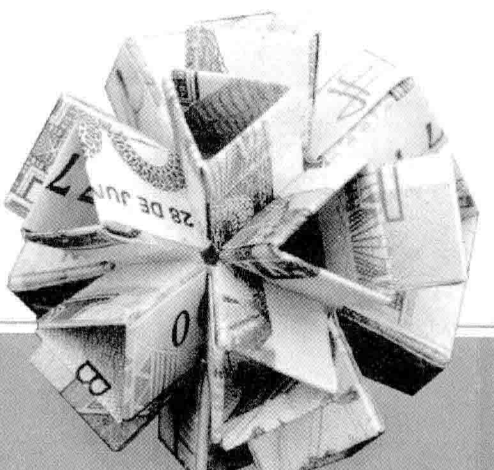
湖南大学出版社

大学数学系列课程

复变函数

学习指导与练习

湖南大学数学与计量经济学院 组 编
周金华 李丹衡 孟纯军 主 编



湖南大学出版社

内容简介

本书是湖南大学数学与计量经济学院组编的大学数学系列教材中的《大学数学5》的配套学习辅导教材。本书编写的顺序与教材顺序大致相同，内容紧密联系原教材，并且又具有相对的独立性。内容包括复数，复数函数，复变函数的积分，解析函数的级数展开，留数，共形映射等。书中每章包括内容要点与教学基本要求，释疑解难，典型例题分析和问题讨论，课内练习及参考答案，教材同步习题及参考答案。书末附有课后练习和综合测试。

本书旨在帮助学生归纳、总结并掌握知识要点，领会分析问题和解决问题的方法技巧，提高学习能力。本书可作为理工类和经济类复变函数课程的学习辅导与教学参考，也适合考研学生在基础阶段的复习时使用。

图书在版编目（CIP）数据

复变函数学习指导与练习/周金华，李丹衡，孟纯军主编．—长沙：湖南大学出版社，2015.7

（大学数学系列课程）

ISBN 978-7-5667-0940-0

Ⅰ.①复…　Ⅱ.①周…　②李…　③孟…　Ⅲ.①复变函数—高等学校—教学参考资料　Ⅳ.①O174.5

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第190555号

复变函数学习指导与练习

FUBIAN HANSHU XUEXI ZHIDAO YU LIANXI

主　　编：周金华　李丹衡　孟纯军
责任编辑：陈建华　金红艳　**责任校对**：全　健　**责任印制**：陈　燕
印　　装：长沙市雅捷印务有限公司
开　　本：787×1092　16开　**印张**：8.75　**字数**：208千
版　　次：2015年8月第1版　**印次**：2015年8月第1次印刷
书　　号：ISBN 978-7-5667-0940-0/O·106
定　　价：21.00元

出 版 人：雷　鸣
出版发行：湖南大学出版社
社　　址：湖南·长沙·岳麓山　　**邮　　编**：410082
电　　话：0731-88822559(发行部),88821327(编辑室),88821006(出版部)
传　　真：0731-88649312(发行部),88822264(总编室)
网　　址：http://www.hnupress.com
电子邮箱：presschenjh@hnu.edu.cn

大学数学系列课程

《高等数学(上)学习指导与练习》(第二版)	主　编	刘开宇　孟益民　胡合兴
《高等数学(下)学习指导与练习》(第二版)	主　编	肖　萍　李永群　全志勇
《概率论与数理统计学习指导与练习》(第二版)	主　编	彭国强　刘先霞
《线性代数学习指导与练习》(第二版)	主　编	邓远北　彭亚新　马传秀
《复变函数学习指导与练习》	主　编	周金华　李丹衡　孟纯军

编写说明

大学数学系列课程(包括高等数学(微积分)、线性代数、概率论与数理统计和复变函数等)是高等学校主要的基础理论课。熟练掌握大学数学的基本概念、基本理论和基本方法,不仅对学生们学好后续的课程是十分必要的,而且对于他们今后的提高和发展也具有重要的影响和作用。

目前我国的高等教育已经逐渐从以往的精英教育转变为大众化教育,为提高学校的教学质量,诸多高校纷纷提出"大班授课,小班辅导"的教学模式,并加强"过程"教学和教学助理(TA)制度。为了适应高等学校教学形式的变化,我们尝试编写了这套大学数学系列课程学习指导与练习丛书,一方面能为TA及小班辅导课提供教学的参考材料,另一方面能对学生们的课程学习提供辅导和帮助。

本套丛书在"学习指导"这一部分,通过内容要点与教学基本要求、释疑解难、典型例题分析和问题讨论、课内练习和课内练习解答与提示等内容,使学生们能不断加深对基本概念和基本理论的理解,掌握数学的思维和方法,提高分析问题和解决问题的能力;在"练习"这一部分则提供课后的习题作业(活页)和综合测试及其答案,便于师生们使用。

这套丛书针对高等本科院校非数学类专业的高等数学、线性代数、概率论与数理统计和复变函数等大学数学系列课程,在章节的编排上与我院目前组编的两套大学数学系列教材大致配合,以便能与课堂教学的需求保持同步,同时为让更多的读者使用起来方便,编写时也注意了本丛书相对的独立性。它可作为上述课程的学习辅导和教学参考用书,同时也适合考研学生在基础阶段的复习使用。

为了编好这套丛书,我们组织了一些具有丰富教学经验的教师组成编写团队,并就本书的内容体系和结构进行了反复讨论,湖南大学出版社的领导和编辑也提出了许多宝贵的建议。尽管如此,由于我们编写此类书的经验不足,又限于作者水平,书中疏漏不当之处在所难免,还望读者们批评指正。

本册《复变函数学习指导与练习》由周金华、李丹衡和孟纯军主编。我们对支持本书出版的湖南大学数学与计量经济学院各位老师、湖南大学教务处和湖南大学出版社表示衷心的感谢!

湖南大学数学与计量经济学院

2015 年 8 月

目　次

1 复 数

1.1 内容要点与教学基本要求

一、内容要点

1. 复数和复数的运算

(1)形如 $z=x+\mathrm{i}y(x,y\in\mathbf{R},\mathrm{i}=\sqrt{-1})$ 的数称为复数.

(2)两个复数相等指对应的实部和对应的虚部分别相等.

(3) $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1, z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,

$$z_1+z_2=(x_1+x_2)+\mathrm{i}(y_1+y_2),$$

$$z_1z_2=x_1x_2-y_1y_2+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq0).$$

2. 辐角与模长

(1)复数的表示形式.

$z=x+\mathrm{i}y$ 称为解析式;

$z=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta$ 称为三角式;

$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 称为指数式.

(2)辐角与主辐角.

$$\mathrm{Arg}\,z=\arg z+2k\pi\quad(k\in\mathbf{Z})$$

称为辐角,其中 $\arg z\in(-\pi,\pi]$ 称为主辐角,可以按下表计算:

$$\arg z=\begin{cases}\arctan\dfrac{y}{x}, & x>0,\\ \dfrac{\pi}{2}, & x=0,y>0,\\ -\dfrac{\pi}{2}, & x=0,y<0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}+\pi, & x<0,y>0,\\ \arctan\dfrac{y}{x}-\pi, & x<0,y<0,\\ \pi, & x<0,y=0.\end{cases}$$

(3)模长：$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$.

(4)乘法的几何意义：

$$|z_1z_2|=|z_1||z_2|,\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2.$$

(5)乘幂：$z^n=\underbrace{z\cdot z\cdots z}_{n个},\mathrm{Arg}z^n=n\mathrm{Arg}z$.

(6)开方：$w=\sqrt[n]{z}=\sqrt[n]{|z|}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\arg z+2k\pi}{n}}\quad(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

3. 约当曲线(简单曲线),光滑曲线

(1)约当曲线：自身不相交的曲线.

(2)光滑曲线：曲线 $\Gamma=\{z|z=z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t),t\in(\alpha,\beta),t$ 为实数$\}$上的任一点 z 都有 $x'(t),y'(t)$在$[\alpha,\beta]$上存在且连续，且满足$x'(t)^2+y'(t)^2\neq0,t\in[\alpha,\beta]$，称 Γ 为光滑曲线.

4. 单连通区域与多连通区域

(1)复平面上的区域 E，如果 E 中的任意简单闭曲线包含的内部全含在 E 中，则称 E 为单连通区域. 简单地说内部无洞的区域即是单连通区域.

(2)不是单连通的区域就叫多连通区域，也称复连通区域.

二、教学基本要求

(1)熟练掌握复数的各种表示形式，复数的运算规律.

(2)了解复数的几何意义，区域和约当曲线的相关概念.

1.2 释疑解难

1. 复数有三种表示形式，使用时如何确定选用哪种表示？

答 复数有解析表示 $z=x+\mathrm{i}y$，三角表示 $z=r\cos\theta+\mathrm{i}r\sin\theta$，指数表示 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$. 我们可以自由选用。一般来说，若要用到复数的实部和虚部的时候，就选用复数的解析形式，若要用到模与辐角的时候，借用极坐标与直角坐标的关系，将解析式转化为三角形式，当要进行乘法和除法运算的时候，就借用欧拉公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 将三角形式转化为指数形式. 因此，三种可以互相转化的形式可以方便我们根据情况选用.

2. 辐角的作用.

答 辐角指实轴正向到原点与复数所形成的向径的夹角. 因此这是一个多值的量. 我们常常考虑$(-\pi,\pi]$范围的角度，即主辐角. 由于用角度去描述一个范围很方便，因此当我们不必具体知道一个复数，而只要描述其所在的范围时，可以借助辐角来描述.

3. $\arg z=\theta$ 表示的几何图形是什么？

答 只有辐角没有模长不能刻画一个复数的位置. $\arg z=\theta$ 表示模长可以任意长，主辐角为 θ 的复数集合，从几何上看，它表示一条去掉原点从原点出发的射线. 由于原点 $z=0$ 时，$\arg z$ 没有定义，因此 z 不能取到原点.

4. 关于主辐角 $\arg z$ 的范围 $(-\pi,\pi]$，$[0,2\pi)$ 两种方式都可以，比较而言 $(-\pi,\pi]$ 更好.

答 主辐角 $\arg z$ 的范围取为 $(-\pi,\pi]$ 时，z 平面割开负实轴，当主辐角 $\arg z$ 的范围取为 $[0,2\pi)$ 时，z 平面割开正实轴. 两种取值范围的方式都可以结合模长准确定位复平面上任一个复数的准确位置. 只是两种取值方式对多值函数划分其单值区域的影响不一样.

1.3 典型例题分析和问题讨论

例 1 将下列复数化为三角表示式：

(1) $\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}$；　　　　(2) $1+\sin 1+i\cos 1$.

(1)**解　方法一**　$\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$；

方法二　由于 $\arg\left(\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}\right)=\arctan\left(\dfrac{-\cos\frac{\pi}{6}}{\sin\frac{\pi}{6}}\right)=\arctan(-\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}$，

故 $\sin\frac{\pi}{6}-i\cos\frac{\pi}{6}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

(2) 由于 $(1+\sin 1)^2+(\cos 1)^2=2(1+\sin 1)=2\left[1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\right]=4\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$，

又 $\dfrac{\cos 1}{1+\sin 1}=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}=\dfrac{\sin\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}{\cos\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}-1\right)}=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)$.

由于 $\cos 1>0$，$1+\sin 1>0$，因此 $\arg(1+\sin 1+i\cos 1)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$.

故 $1+\sin 1+i\cos 1=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\right)\right]$.

例 2 设 z_1,z_2,z_3 三点符合条件：

$$z_1+z_2+z_3=0 \text{ 及 } |z_1|=|z_2|=|z_3|=1,$$

求证：z_1,z_2,z_3 是内接于单位圆周 $|z|=1$ 的一个正三角形的顶点.

证　方法一　由 $z_1+z_2+z_3=0$ 知

$$z_3=-(z_1+z_2),\ |z_3|=|z_1+z_2|.$$

又 $|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，且

$$|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)-|z_1+z_2|^2=2(1+1)-1=3,$$

故
$$|z_1-z_2|=\sqrt{3}.$$

同理可得 $|z_2-z_3|=\sqrt{3}$，$|z_3-z_1|=\sqrt{3}$.

由正三角形的特征知 z_1,z_2,z_3 是单位圆内接正三角形的三个顶点.

方法二　由 $z_1+z_2+z_3=0$ 得 $z_1=-(z_2+z_3)$，即 z_1 所对应的向量与 z_2+z_3 所对应

的向量共线，大小相同，方向相反（见图 1-1）。故由$|z_1|=1$可知$|z_2+z_3|=1$.

又$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，在图 1-1 中，以O, z_2, z_2+z_3为顶点的三角形里，$|z_2|=|z_3|=|z_2+z_3|=|z_1|=1$. 因此$z_2$与$z_2+z_3$之间的夹角为$\frac{\pi}{3}$，由$z_1$和$z_2+z_3$共线知$z_1$与$z_2$之间的夹角为$\frac{2}{3}\pi$.

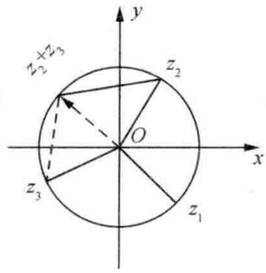


图 1-1

同理可知z_2与z_3，z_3与z_1之间的夹角均为$\frac{2}{3}\pi$. 因此z_1, z_2, z_3均匀分布在单位圆周上，即z_1, z_2, z_3是一内接于单位圆的正三角形的三顶点.

方法三 记$z_j=x_j+\mathrm{i}x_j, j=1,2,3$. 因为$z_1+z_2+z_3=0$，

所以
$$x_1+x_2+x_3=0, y_1+y_2+y_3=0.$$
即有
$$x_1=-(x_2+x_3), y_1=-(y_2+y_3). \quad ①$$
又$|z_2|=|z_3|=1$，故$|z_2|^2=|z_3|^2=1$.

即
$$x_2^3-x_3^2=y_3^2-y_2^2 \Leftrightarrow (x_2+x_3)(x_2-x_3)=(y_3+y_2)(y_3-y_2). \quad ②$$
由①②得
$$-x_1(x_2-x_3)=-y_1(y_3-y_2),$$
即
$$x_1x_2+y_1y_2=x_1x_3+y_1y_3. \quad ③$$
另外由$|z_1|^2+|z_2|^2=|z_1|^2+|z_3|^2$，得
$$x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2=x_1^2+y_1^2+x_3^2+y_3^2. \quad ④$$
由$(-2)\times③+④$得
$$(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2,$$
即
$$|z_1-z_2|=|z_1-z_3|.$$
同理可证 $|z_1-z_2|=|z_3-z_2|$.

因此z_1, z_2, z_3是一个正三角形的三个顶点，又由于$|z_1|=|z_2|=|z_3|=1$，故此三点在单位圆周上（见图 1-2）.

综上可得此正三角形内接于单位圆.

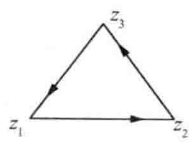


图 1-2

例 3 找出满足关系式
$$0<\arg\frac{z-1}{z+1}<\frac{\pi}{6}$$
的z的全体所组成的图形.

解 **方法一** 记$z=x+\mathrm{i}y$，则
$$\frac{z-1}{z+1}=\frac{x^2+y^2-1+2y\mathrm{i}}{(x+1)^2+y^2}.$$
由$0<\arg\frac{z-1}{z+1}<\frac{\pi}{6}$知，$x^2+y^2-1>0, 2y>0$，
$$0<\frac{2y}{x^2+y-1}<\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3},$$

故 $\begin{cases} x^2+y^2>1, y>0, \\ x^2+(y-\sqrt{3})^2>4. \end{cases}$

故所求图形是上半平面内圆周 $x^2+(y-\sqrt{3})^2=4$ 的外部区域，见图 1-3.

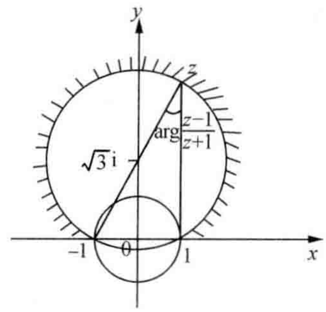


图 1-3

方法二 由于 $\arg\frac{z-1}{z+1}$表示从 $z+1$ 所对应的向量到 $z-1$ 所对应的向量所转过的角在$\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$之间，故点 z 必在上半平面. 而 $\arg\frac{z-1}{z+1}=\frac{\pi}{6}$表示以 -1 与 1 两点连线为弦且张角等于$\frac{\pi}{6}$的位于上半平面的圆弧. 故满足不等式 $0<\arg\frac{z-1}{z+1}<\frac{\pi}{6}$的 z 落在圆周 $x^2+(y-\sqrt{3})^2=4$ 的外部，且 $\mathrm{Im}z>0$，如图 1-3 所示.

例 4 设 z_1,z_2,z_3,z_4 为互不相同的复数，试证明：当且仅当$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$为实数时，$z_1,z_2,z_3,z_4$ 四点共圆或共线.

证 若其中有三个点共线，不妨设 z_1,z_2,z_3 共线，则有 z_1-z_2 与 z_1-z_3 为同向或反向向量，即 $\arg\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}=0$ 或 $\arg\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}=\pi$，因此$\frac{z_1-z_3}{z_1-z_2}$为实数；反之亦然. 因此若$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$与$\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$中有一个为实数，则$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$为实数的充要条件是 z_1,z_2,z_3,z_4 四点共线.

设$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$与$\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$都不是实数，即 z_3,z_4 都不在过 z_1,z_2 的直线上. 从而 $\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$与 $\arg\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$都不取 0 与 π. 由复数四则运算的几何意义可知$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$的辐角是从点 z_3 到点 z_2 的向量，即 z_2-z_3 所对应的向量，转到从点 z_3 到 z_1 的向量，即 z_1-z_3 所对应的向量的旋转角 α；同样$\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$的辐角是从点 z_4 到点 z_2 的向量，即 z_2-z_4 所对应的向量，转到从点 z_4 到点 z_1 的向量，即 z_1-z_4 所对应的向量的旋转角 β，如图 1-4 所示.

如果$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}>0$，则 $\mathrm{Arg}\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}\right)=2k\pi(k\in\mathbf{Z})$，即 $\alpha-\beta=2k\pi$，此时 z_3,z_4 必在过点 z_1 与 z_2 所在直线的同侧，且 z_1,z_2,z_3,z_4 四点共圆.

如果$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}<0$，则 $\alpha-\beta=(2l+1)\pi(l\in\mathbf{Z})$. 此时 z_3 和 z_4 必在过 z_1,z_2 所在直线的异侧，且 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆，如图 1-5 所示.

反之，若四点 z_1,z_2,z_3,z_4 共圆，且 z_3,z_4 在过直线 z_1,z_2 所在直线的同侧(异侧)，则

$\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z-z_4}{z_2-z_4}>0\left(\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\frac{z_1-z_4}{z_2-z_4}<0\right)$.

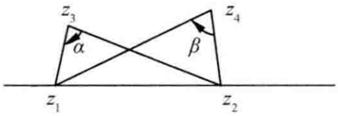


图 1-4

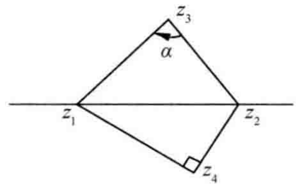


图 1-5

1.4 课内练习及参考答案

课内练习

1. 设 $z=6-8\mathrm{i}$,求 $|z|$ 及 $\mathrm{Arg}z$.

2. 求下列根式所有的值,并用图在 z 平面上标出每个值的位置.

(1)$\sqrt[3]{-\mathrm{i}}$;　　(2)$\sqrt[8]{-1}$;　　(3)$\sqrt[4]{16\mathrm{i}}$;　　(4)$\sqrt[3]{27}$.

3. 试证明:以 z_1,z_2,z_3 为顶点的三角形的面积 S 为

$$\frac{1}{2}\mid z_2-z_3\mid^2\mathrm{Im}\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$$

的绝对值.

4. 复平面上的四点 $z_1=1,z_2=-1,z_3=\mathrm{i},z_4=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$ 在单位复球面上的象点是什么? 试从几何上来描述.

课内练习参考答案

1. 略.

2. 略.

3. 提示:三角形的面积计算公式.

4. z_k 对应到 M_k, $k=1,2,3,4$. 其中 $M_1=\left(\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$, $M_2=\left(-\frac{1}{2},0,\frac{1}{2}\right)$, $M_3=\left(0,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$, $M_4=\left(\frac{\sqrt{2}}{4},-\frac{\sqrt{2}}{4},\frac{1}{2}\right)$

1.5 教材同步习题及参考答案

习题 1-1

1. 将下列复数表示成代数形式:

(1) $\left(\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\right)^2$；　　(2) $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n$；

(3) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}+\dfrac{3}{1+\mathrm{i}}$.

2. 设 $z=x+\mathrm{i}y$（x,y 为实数），求下列各复数的实部和虚部：

(1) $\dfrac{z-a}{z+a}(a\in\mathbf{R})$；　　(2) $\dfrac{1}{z^2}$；

(3) z^3.

3. 设 z_1,z_2,z 为复数，证明：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z}_1\pm\overline{z}_2$；　　(2) $\overline{z_1z_2}=\overline{z}_1\ \overline{z}_2$；

(3) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\overline{z}_1}{\overline{z}_2}(z_2\neq 0)$；　　(4) $\overline{\overline{z}}=z$；

(5) $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}z$；　　(6) $z-\overline{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}z$.

4. 已知 $(1+2i)\overline{z}=4+3\mathrm{i}$，求复数 z.

5. 证明：所有形如 $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ -\beta & \alpha\end{pmatrix}$ 的矩阵经过用矩阵加法与矩阵乘法组合起来以后所成的集合与复数域同构.

习题 1-1 参考答案

1. (1) $\left(\dfrac{2+\mathrm{i}}{3-2\mathrm{i}}\right)^2=\left[\dfrac{(2+\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}{(3-2\mathrm{i})(3+2\mathrm{i})}\right]^2=\dfrac{(4+7\mathrm{i})^2}{13^2}=-\dfrac{33}{169}+\dfrac{56}{169}\mathrm{i}$；

(2) $(1+\mathrm{i})^n+(1-\mathrm{i})^n=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n}{4}\pi}+(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{n}{4}\pi)}=2^{\frac{n+2}{2}}\cos\dfrac{n}{4}\pi$；

(3) $\dfrac{1}{\mathrm{i}}+\dfrac{3}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{\overline{\mathrm{i}}}{\mathrm{i}\,\overline{\mathrm{i}}}+\dfrac{3(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\mathrm{i}+\dfrac{3-3\mathrm{i}}{2}=\dfrac{3}{2}-\dfrac{5}{2}\mathrm{i}$.

2. (1) $\dfrac{z-a}{z+a}=\dfrac{(z-a)(\overline{a+z})}{(z+a)(\overline{a+z})}=\dfrac{|z|^2-a^2+a(z-\overline{z})}{|a+z|^2}=\dfrac{x^2+y^2-a^2+2a\mathrm{i}y}{(x+a)^2+y^2}$,

故 $$\mathrm{Re}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)=\frac{x^2+y^2-a^2}{(x+a)^2+y^2},\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)=\frac{2ay}{(x+a)^2+y^2}.$$

(2) $\dfrac{1}{z^2}=\left(\dfrac{1}{z}\right)^2=\left(\dfrac{\overline{z}}{z\,\overline{z}}\right)^2=\dfrac{\overline{z}^2}{|z|^4}=\dfrac{(x-\mathrm{i}y)^2}{(x^2+y^2)^2}=\dfrac{x^2-y^2-2\mathrm{i}xy}{(x^2+y^2)^2}$,

故 $$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z^2}\right)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2},\mathrm{Im}\left(\frac{1}{z^2}\right)=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

(3) $z^3=(x+\mathrm{i}y)^2(x+\mathrm{i}y)=x^3-3-xy^2+\mathrm{i}(3x^2y-y^3)$,

故 $$\mathrm{Re}z^3=x^3-3xy^2,\mathrm{Im}z^3=3x^2y-y^3.$$

3. 略.

4. 由 $(1+2\mathrm{i})\overline{z}=4+3\mathrm{i}$，得 $(\overline{1+2\mathrm{i}})z=\overline{4+3\mathrm{i}}$.

故 $$z=\frac{4-3\mathrm{i}}{1-2\mathrm{i}}=\frac{10+5\mathrm{i}}{5}=2+\mathrm{i}.$$

5. 同构：在抽象代数中，一个保持结构的双射是在复数对象之间定义的一类映射. 它

能揭示出这些对象的属性或操作之间存在的关系.若两个数学结构之间存在同构映射,则称这两个结构是同构的.在复数域 $\mathbf{C}$ 中,我们曾规定 $i^2=-1$,当复数与向量建立对应关系后,我们可以从几何上来解释 $i^2=-1$,由于 -1 乘以一个非零向量上得到的向量可以理解为将原向量逆时针旋转 $180°$,也就是连续逆时针旋转 $90°$.因此我们将 i 乘在一个非零矩阵上定义为将该向量逆时针旋转 $90°$,从而 i^2 乘在该向量上即是将它逆时针旋转 $180°$.如果我们将此 i 用矩阵 $\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$ 表示即得 $\boldsymbol{J}^2=-\boldsymbol{I}=-\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

因此,由复数 $a+ib$ 到 $a\cdot 1+b\cdot i$ 再到 $a\boldsymbol{I}+b\boldsymbol{J}=\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ 的线性变换关系的对应可知,它保持加、减、乘运算,也保持矩阵的求逆运算.因此我们可以理解复数有不同表示形式,即几何形式(由线交换组成)和矩阵形式(由矩阵组成).因此复数域 $\mathbf{C}$ 与 $\begin{pmatrix}a & b\\ -b & a\end{pmatrix}$ 的二阶矩阵集合是同构的.

习题 1-2

1. 设 z_1 及 z_2 为任意两个复数,证明:

(1) $|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-2\mathrm{Re}\,z_1\overline{z_2}$;

(2) $|z_1+z_2|^2\leqslant(|z_1|+|z_2|)^2$;

(3) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2(|z_1|^2+|z_2|^2)$.

2. 求下列复数的实部、虚部、模、辐角以及共轭复数.

(1) $\dfrac{1}{3+2i}$; (2) $\dfrac{1}{i}-\dfrac{3i}{1-i}$; (3) $\dfrac{(3+4i)(2-5i)}{2i}$; (4) $i^8-4i^{21}+i$.

3. 将下列复数表示为指数形式.

(1) $\dfrac{3+5i}{7i+1}$; (2) -1; (3) i; (4) $-8\pi(1+\sqrt{3}i)$;

(5) $\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}+i\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)^3$; (6) $1+\cos\theta+i\sin\theta$.

4. 计算:

(1) i 的 3 次方根; (2) -1 的 4 次方根;

(3) $\sqrt{3}+\sqrt{3}i$ 的平方根.

5. 问 n 取何值时,有 $(1+i)^n=(1-i)^n$?

6. 设 $z=e^{i\frac{2\pi}{n}}$, $n\geqslant 2$,证明: $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$.

习题 1-2 参考答案

1. 略.

2. 略.

3. (1) $\dfrac{\sqrt{17}}{5}e^{i\theta}$, $\theta=\pi-\arctan\dfrac{8}{19}$; (2) $e^{i\pi}$; (3) $e^{i\frac{\pi}{2}}$; (4) $16\pi e^{-\frac{2}{3}\pi i}$; (5) $e^{i\frac{2}{3}\pi}$;

(6) $1+\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta=2\cos^2\dfrac{\theta}{2}+2\mathrm{i}\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$=2\cos\frac{\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\theta}{2}\right)=2\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta}{2}}.$$

4. (1) $\sqrt[3]{\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}$，其中 $\mathrm{i}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}$，$k=0,1,2$；

(2) $\sqrt[4]{-1}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{4}(\pi+2k\pi)}$，其中 $-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}$，$k=0,1,2,3$.

(3) $\sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}}=\sqrt[4]{6}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+k\pi\right)}$，$k=0,1$

5. 由于 $1-\mathrm{i}\neq 0$，故 $(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$ 可以化成

$$(\sqrt{2}\mathrm{e}_{\mathrm{i}}^{\frac{\pi}{4}})^n=(\sqrt{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}})^n\Rightarrow 2\varepsilon\sin\frac{n}{4}\pi=0,$$

故 $n=4k\quad(k\in\mathbf{Z})$.

6. 由于 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{n}}\ (n\geqslant 2)$ 不等于 1. 因此

$$(z-1)(1+z+z^2+\cdots+z^{n-1})=z^n-1=(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{n}\pi})^n-1=0,$$

故
$$1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0.$$

习题 1-3

1. 指出下列各式中点 z 所确定的平面图形，并作出草图.

(1) $|z-2\mathrm{i}|=|z+2|$；

(2) $|z-a|+|z+a|=b$ (a,b 为正实常数)；

(3) $(1+2\mathrm{i})\bar{z}+(1-2\mathrm{i})z-5=0$；

(4) $1<|z+\mathrm{i}|<2$；

(5) $\mathrm{Re}z>\mathrm{Im}z$；

(6) $\mathrm{Im}z>1$ 且 $|z|<2$.

2. * 证明：若复数 z_1,z_2,z_3 满足等式 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$，则有

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|,$$

并作出几何解释.

3. * 设 Γ 是圆周 $\{z:|z-c|=r\}$，$r>0$，$a=c+r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$，令

$$L_\beta=\left\{z:\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0\right\},$$

其中 $b=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}$. 求出 L_β 在 a 切于圆周 Γ 的关于 β 的充要条件.

习题 1-3 参考答案

1. (1) $y=-x$； (2) $b>2a$ 时，为椭圆；$b=2a$ 时，为点 $z=0$； (3) $2x-2y=5$；
(4) $1<x^2+(y+1)^2<4$； (5) $x>y$； (6) 由 $y>1$ 和 $x^2+y^2<4$ 围成.

2. * **方法一** 由于 $\dfrac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$，由比例的性质 $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$，易得

$$\frac{z_2-z_1+(z_1-z_3)}{z_3-z_1+(z_2-z_3)}=\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3},$$

故 $$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\frac{z_2-z_3}{z_2-z_1}.$$

从而

$$|z_2-z_1|^2=|z_3-z_1||z_2-z_3|, \tag{①}$$

$$|z_3-z_1|^2=|z_2-z_1||z_2-z_3|. \tag{②}$$

①/②得 $$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|, \tag{③}$$

同理可得 $$|z_1-z_2|=|z_2-z_3|, \tag{④}$$

由③④得 $$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|.$$

方法二 由于$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\Leftrightarrow z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2\cdot z_3$ 且 $z_1\neq z_2\neq z_3$.

另外等边三角形的特征是三边相等,三内角相等(见图 1-6).即

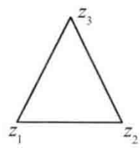


图 1-6

$$z_1-z_2=|z_2-z_3|e^{i\left(\arg(z_2-z_3)\pm\frac{\pi}{3}\right)}=(z_2-z_3)\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

$$z_1-z_3=|z_2-z_3|e^{i\left(\arg(z_2-z_3)\mp\frac{\pi}{3}\right)}=(z_2-z_3)\left(\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i\right),$$

故 $(z_1-z_2)^2+(z_2-z_3)^2=(z_2-z_3)^2\left(\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2+(z_2-z_3)^2\left(\frac{1}{2}\mp\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)z_1.$

展开整理得 $$z_1^2+z_2^2+z_3^2=z_1z_2+z_1z_3+z_2z_3,$$

所以满足等式的点为正三角形的顶点,从而有

$$|z_2-z_1|=|z_3-z_1|=|z_2-z_3|.$$

方法三 若复数 z_1,z_2,z_3 满足等式 $\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$,则有 ①

$$|z_3-z_1|^2=|z_1-z_2||z_2-z_3|. \tag{②}$$

$$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}-1=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}-1,\text{即}\quad \frac{z_2-z_3}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_2}{z_2-z_3}. \tag{③}$$

在③式两边取模长得

$$|z_2-z_3|^2=|z_1-z_2||z_3-z_1|, \tag{④}$$

联立②和④得 $$|z_3-z_1|=|z_2-z_3|, \tag{⑤}$$

将⑤代入②得 $$|z_3-z_1|=|z_1-z_2|, \tag{⑥}$$

由⑤和⑥得$|z_3-z_1|=|z_2-z_3|=|z_1-z_3|$,即 z_1,z_2,z_3 为一等边三角形的顶点.

反之,若 $\Delta z_1z_2z_3$ 为等边三角形,则

$$\left|\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}\right|=\left|\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}\right|=1,$$

且 $$\arg\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\arg(z_2-z_1)-\arg(z_3-z_1)=\pm\frac{\pi}{3},$$

$$\arg\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}=\arg(z_1-z_3)-\arg(z_2-z_3)=\pm\frac{\pi}{3},$$

正负号取法相同.故有 $$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}.$$

综上所述,$\frac{z_2-z_1}{z_3-z_1}=\frac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$是复数 z_1,z_2,z_3 构成等边三角形的充要条件.