概率论与数理统计

Gailvlun Yu Shuli Tongji

第2版

冯予 陈萍 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

概率论与数理统计

（第2版）

冯 予 陈 萍 编著

国防工业出版社

·北京·

内容简介

本书内容主要包括事件与概率，随机变量，数学期望，特征函数，极限定理，抽样分布，参数估计，假设检验，线性回归等第9章。内容精炼，由浅入深，论述严谨。本书是集作者多年教学经验、结合理工科“概率统计”课程的教学需要而编写的。适合高等院校“数学与应用数学”“信息与计算科学”“统计学”等专业的理工科本科生作为教材使用，也可供科技工作者阅读和参考。

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/冯予，陈萍编著．—2版．—北京：国防工业出版社，2015.8
ISBN 978-7-118-10366-3

Ⅰ．①概...　Ⅱ．①冯...②陈...　Ⅲ．①概率论②数理统计　Ⅳ．①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第191120号

※

国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100048）
三河市腾飞印务有限公司印刷
新华书店经售
*
开本 787×1092　1/16　**印张** 16　**字数** 371千字
2015年8月第2版第1次印刷　**印数** 1—4000册　**定价** 36.00元

国防书店：(010)88540777　　发行邮购：(010)88540776
发行传真：(010)88540755　　发行业务：(010)88540717

前　言

“概率论与数理统计”是研究随机现象的数量规律性的学科，在工农业生产、医药卫生、国防科技、金融经济等领域都有广泛的应用。

本书是高等院校“信息与计算科学”和“数学与应用数学"专业及相关专业本科生的教材，是集作者多年的教学与科研经验，在该课程的授课讲稿基础上编写的。内容编排上，在满足理论的完整性与严谨性的前提下，着重介绍工程技术中常用的、基础性的概率统计概念、方法。在讲述基本概念和方法时，力求给出它们的实际背景、基本思想以及结果的解释，体现由浅入深、启发诱导的教学法，并通过精选的实例加深对概念的理解。本书的内容，对于没有学过实变函数，仅具有初等微积分基础的读者来说，也是可以理解掌握的。

本书参考学时为 80 学时。全书共分 9 章，依次为随机事件与概率，随机变量及其分布函数，随机变量的数字特征，特征函数，极限定理，抽样分布，参数估计，假设检验，线性回归与方差分析等。其中第 1 ~6 章由冯予执笔，第 7 ~9 章由陈萍执笔。全书由冯予统稿。书稿虽经多次修改，但限于作者水平仍会有缺点和错误，恳请读者批评指正。

目　录

第 1 章　随机事件与概率

1.1　随机事件及其运算规律

在自然界和人类社会中，普遍存在着两类不同的现象。一类可称为确定性现象。例如，在标准大气压下，水加热到 100℃时必然会沸腾。又如，同性电荷相斥，异性电荷相互吸引等。与此同时，还有另一类现象可称为随机现象。例如，掷一枚硬币，观察正面、反面出现的情况。又如，一门炮固定好位置，向同一目标发射多发炮弹，弹着点是不一样的。另外，从某生产线上，用同一种工艺、材料、生产出来的灯泡，其寿命也是有差异的。

这里所说的随机现象是指试验之前不能确定试验结果的现象。一次随机试验，其结果有偶然性。然而，随着试验次数的增加，随机现象也会呈现出一定的规律性。例如，在大量重复掷硬币中，正面、反面出现的次数都约占总试验次数的一半。这样的规律，称为统计规律性。

概率与统计就是研究随机现象的统计规律性的一门理论。它是数学的一个分支，而且是最接近实际、应用面最广的一个分支。其应用几乎遍及自然科学的各分支、工农业生产各部门。特别是在当前一些最具活力的行业中，如信息科学（模式识别，人工智能）与通信科学（移动互联，大数据分析）、金融（汇率与期权的定价问题）与保险（寿险与财险领域中，保单的定价问题）等。"概率论与数理统计"为这些学科的发展起到了重要的、推动性的作用。

概率论最初起源在 17 世纪中叶的法国。当时，在贵族中流行用掷骰子来赌博，做游戏。例如，掷两个骰子一次，比较一下"点数之和为 9"与"点数之和为 10"的可能性的大小。又如，掷两骰子 20 次，考虑"至少得到一个双六"这个事件与"一次双六也不出现"事件发生可能性的大小。赌徒们主要靠反复实践来做出判断。后来，一些人又想从理论上解释这种现象，就请教于当时著名的数学家帕斯卡（B. Pascal）和拉普拉斯（P. S. Laplace）。两位数学家研究了这些问题，提出了用以度量事件发生可能性大小的量——概率（Probability）。他们是基于排列组合方法，研究了一些较复杂的赌博问题，如"分赌注问题""赌徒输光问题"等。随着 19 世纪自然科学和社会科学的快速发展，人们注意到，在生物、医药、物理和人类社会现象中，存在着许多与机会游戏之间相似的情况。从机会游戏起源的概率论被应用到这些领域中。反过来，对这些领域中的随机问题的研究也大大推动了概率论本身的发展。

如何定义概率，如何把概率论建立在严格的逻辑基础上，是历史上概率论发展的困难所在。直到 1933 年，苏联数学家柯尔莫哥洛夫在其《概率论基础》一书中，第一次给出概率的测度论式的定义和一套严密的公理体系，才使概率论成为严谨的数学分支。柯尔莫哥洛夫的工作对近几十年概率论的迅速发展起到了奠基性的作用。

以下,我们就从随机试验出发,引出概率论的一些基本概念。

1. 样本空间

随机现象广泛存在于自然界与人类社会,对随机现象的观测与考察称为随机试验。由于本门课程从始至终是对随机现象的研究,以后把随机试验又简称为试验(Experiment)。随机试验具备以下3点性质:

(1)试验能在相同条件下重复进行。

(2)试验前明了所有可能出现的结果。

(3)试验前不能确切地预料具体出现哪个试验结果。

将随机试验中,所有可能出现的基本结果所组成的集合,称为试验的样本空间,记为Ω。

样本空间中的每个元素,即随机试验中每个基本的、不可再分的结果,称为样本点,记为ω。

对下列试验建立相应的样本空间。

例1.1.1 掷一个骰子一次,观察出现的点数情况。

则$\Omega_1=\{1,2,3,4,5,6\}$,这里"$\omega=k$"表示"掷出k点",此时,样本空间含有6个样本点。

例1.1.2 掷一对骰子一次,观察出现的点数情况。

则$\Omega_2=\begin{Bmatrix}(1,1),(1,2),\cdots,(1,6)\\(2,1),(2,2),\cdots,(2,6)\\(6,1),(6,2),\cdots,6,6)\end{Bmatrix}$。这里"$\omega=(i,j)$"表示"第一个骰子掷出$i$点,第二个骰子掷出$j$点",此时,样本空间含有36个样本点。

例1.1.3 在单位时间内,观测一高速公路上汽车的流量。则$\Omega_3=\{0,1,2,\cdots\}$,此时,样本空间含有可数个样本点。

例1.1.4 从一批灯泡中任取一个,测试其寿命。则$\Omega_4=\{t\,|\,t\geqslant 0\}$,这里$t$表示灯泡寿命。此处,样本空间含有不可数无穷多个样本点。

2. 随机事件(简称事件)

在对随机现象的考察过程中,人们往往对试验中可能出现的某种或几种情况特别感兴趣。我们把试验中可能出现的一种情况就叫做一个**事件**,用一个大写英文字母表示。由单个样本点组成的事件称为基本事件。如在例1.1.2中,如果我们感兴趣的事件为"出现双六",为方便起见,可以记为A。则A发生必须且只须样本点(6,6)出现,记为A:"出现双六"$=\{(6,6)\}$。若感兴趣的事件为"两骰子点数之和为9",可记为B,则B发生必须且只须样本点(4,5),(5,4),(3,6),(6,3)之一出现,记为B:"两骰点数之和为9"$=\{(4,5),(5,4),(3,6),(6,3)\}$。

从集合论的观点来看,事件可表示为样本点的某个集合,即样本空间的某个子集合。称事件A发生当且仅当A包含的某个样本点出现。

此外,还需考虑两种极端情况。在试验中必然出现的情况称为必然事件,用Ω表示;在试验中不可能出现的情况称为不可能事件,用ϕ表示。

事件间的关系及运算规律类似于集合间的关系及运算规律。不过要注意事件在概率论中的含义。先讨论两个事件A,B的关系及运算。

(1) 若 $A \subset B$,称事件 B 包含事件 A,表示事件 A 发生必导致事件 B 的发生。特别地,若 $A \subset B$,且 $B \subset A$,则 $A = B$,称事件 A,B 相等。

(2) 事件 $A \cup B = \{\omega \mid \omega \in A$或 $\omega \in B\}$ 称为 A 与 B 的并事件(和事件)。当且仅当 A,B 中至少有一个发生时,事件 $A \cup B$ 发生。

(3) 事件 $A \cap B = \{\omega \mid \omega \in A$且 $\omega \in B\}$ 称为事件 A 与 B 的交(积)事件。当且仅当 A,B 同时发生时,事件 $A \cap B = AB$ 发生。

(4) 事件 $A - B = \{\omega \mid \omega \in A$或 $\omega \notin B\}$ 称为事件 A 与 B 的差事件。当且仅当事件 A 发生且事件 B 不发生时,事件 $A - B$ 发生。

(5) 若 $A \cap B = \phi$,则称事件 A 与 B 互不相容或互斥,表示事件 A 与 B 不可能同时发生。

(6) 若 $A \cup B = \Omega$,且 $A \cap B = \phi$,则称事件 A 与 B 互为对立事件,或互逆事件。表示每次试验,事件 A,B 必须有一个发生且仅有一个发生。A 的对立事件记为 $\overline{A}$,$\overline{A} = \Omega - A$,这里 $B = \overline{A}$。

图 1.1 可直观地表示以上事件的关系。

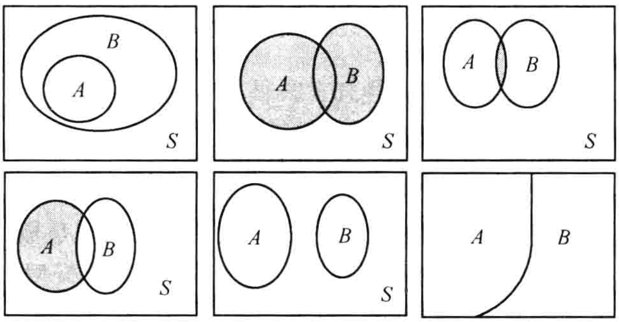

图 1.1　事件关系与运算

事件的运算规律如下。

(1) 交换律:

$$A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$$

(2) 结合律:

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

(3) 分配律:

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

(4) 德·摩根律:

$$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$$

以上定义及结论,可推广至多个事件及可列多个事件。

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$,表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中至少有一个发生。

$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \bigcap_{i=1}^{n} A_i = \prod_{i=1}^{n} A_i$,表示 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 同时发生。

又，$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \bigcup_{i=1}^{n} A_i$，$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \lim_{n\to\infty} \bigcap_{i=1}^{n} A_i$。

下面练习一下事件间的关系及运算规律。

例 1.1.5 设 A,B,C 为三事件,用 A,B,C 的运算关系表示下列事件。

(1) A 与 B 都发生,而 C 不发生。可以表示为:$\overline{ABC}$

(2) A,B,C 都发生。可以表示为:ABC

(3) A,B,C 中不多于一个发生。可以表示为:

$$\overline{ABC} \cup A\overline{BC} \cup \bar{A}B\bar{C} \cup \overline{AB}C = \overline{AB} \cup \overline{BC} \cup \overline{AC}$$

(4) A,B,C 中不多于两个发生。可以表示为:

$$\overline{ABC} = \bar{A} \cup \bar{B} \cup \bar{C}$$

(5) A,B,C 中恰好发生两个。可以表示为:

$$AB\bar{C} \cup A\bar{B}C \cup \bar{A}BC$$

1.2 古典概型与几何概型

1. 模型与计算公式

若随机现象(试验)具有以下特征:

(1) 在试验中,全部可能的基本结果只有有限个。

(2) 每个基本结果是等可能发生的。

我们把这类随机现象对应的数学模型称为古典概型。古典概型是概率论早期研究对象,对它的讨论有助于直观理解概率论的许多基本概念;另外,古典概型中概率的计算在产品质量抽样检查等实际问题及理论物理的研究中也有重要应用。

首先,对古典概型中的事件定义其概率。

设样本空间 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$,其中任一事件 A,可表示为 $A=\{w_{i_1},w_{i_2},\cdots,w_{i_k}\}$。则定义 A 的概率

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{A\text{ 中样本点数}}{\text{样本点总数}}$$

此定义由 Laplace 于 1812 年给出,它只适用于古典概型。

显然

$$P(\{w_1\}) = P(\{w_2\}) = \cdots = P(\{w_n\}) = \frac{1}{n}$$

从古典概率的定义,可以得到下面性质:

(1) 设 A 为任一事件,则 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

(2) 对必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$。

(3) 设事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

例 1.2.1 掷一个骰子一次,则“出现六点”,“出现单数”的概率分别为$\frac{1}{6}$,及$\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$。

例 1.2.2 掷两个骰子一次,则“出观双六”,“至少有一个六点”的概率分别为 $\frac{1}{36}$,$\frac{11}{36}$。

在计算样本空间中样本点总数及事件 A 中样本点数的时候,经常用到一些排列、组合公式。为此,我们进行一些简要的复习。

(1) 全部排列、组合公式的推导均基于下列两条原理。

加法原理:若进行 A_1 过程有 n_1 种方法,进行 A_2 过程有 n_2 种方法,则并列地进行 A_1,A_2 过程共有 n_1+n_2 种方法。

乘法原理:若进行 A_1 过程有 n_1 种方法,进行 A_2 过程有 n_2 种方法,则进行 A_1 过程后再接着进行 A_2 过程共有 $n_1 \times n_2$ 种方法。

(2) 排列:从 n 个元素中取出 r 个来进行排列,这时既要考虑到取出的元素又要顾及取出顺序。则有下面两种情况:

① 有重复排列:从 n 个元素中取 r 次,每次取一个,取后放回,将所取结果排成一列,称为有重复的排列,其排列总数为 n^r 个。

② 无重复排列:从 n 个元素中取出 r 个进行排列,共有排列方式 $A_n^r=n\times(n-1)\times\cdots\times(n-r+1)$ 种。

特别地,当 $r=n$ 时,称为全排列,其排列方式数为 $n\times(n-1)\times\cdots\times 2\times 1=n!$。

(3) 组合。从 n 个元素中取出 r 个,不考虑其顺序,称为组合($0<r\leqslant n$)。其结果总数记为 C_n^r;由于 $C_n^r \cdot r! =A_n^r$,故

$$C_n^r=\binom{n}{r}=\frac{A_n^r}{r!}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$$

另外易证 $C_n^r=C_n^{n-r}$。

练习 设在北京、天津、南京、上海、杭州五个车站之间有普快客车运行,问铁路局应制作几种车票?有几种票价?注意到车票由起点和终点构成,与顺序有关。而票价仅与起点和终点间的距离有关,与顺序无关。故

车票有 $A_5^2=5\times 4=20$ 种。票价有 $C_5^2=\frac{A_5^2}{2!}=10$ 种。

我们把古典概型的常见类型大体归纳为以下三类问题。

1) 摸球问题

例 1.2.3 设盒中有 8 只灯泡,其中有 2 只次品,6 只正品。从中任取两次,每次取一只。不放回选取。求:(1)所取两只都是正品的概率?(2)取到两只至少一只是正品的概率?

解 :以 A,B 分别表示事件“取到两只都是正品”,“取到两只中至少有一只正品”。首先考虑用排列来计数。(此题也可用组合计数,留做练习。)

此时样本空间中元素总数:$8\times 7=56$

A 中基本事件数:$6\times 5=30$

故

$$P(A)=\frac{30}{56}=\frac{15}{28}$$

B 中基本事件数:$6\times2+2\times6+6\times5=54$
故

$$P(B)=\frac{54}{56}=\frac{27}{28}$$

另一种方法是考虑 $\overline{B}$ 中的基本事件数。则 $\overline{B}$ =“取到两只次品”
故 $\overline{B}$ 中基本事件数:$2\times1=2$
故

$$P(\overline{B})=\frac{2}{56}=\frac{1}{28};P(B)=1-P(\overline{B})=\frac{27}{28}$$

另外,若是有放回地选取,则

$$P(A)=\frac{6\times6}{8\times8}=\frac{9}{16}$$

$$P(\overline{B})=\frac{2\times2}{8\times8}=\frac{1}{16},P(B)=\frac{15}{16}$$

一般地,设盒中有 N 个球,其中有 M 个白球,现从中任抽 n 个球,则这 n 个球中恰有 k 个白球的概率是

$$p=\frac{C_M^k C_{N=M}^{n-k}}{C_N^n}$$

在实际中,产品的检验、疾病的抽查、农作物的选种等问题均可化为摸球问题。我们选择摸球模型的目的在于使问题的数学意义更加突出,而不必过多地交代实际背景。

2) 分房问题

例 1.2.4 设有 n 个球,随机放入 N 个盒子中($n\leqslant N$)。求如下事件的概率?

(1) 某指定的 n 个盒中恰各有一球。

(2) 任何 n 个盒子中各有一球。

(3) 某一指定的盒子中恰有 m 个球。($m\leqslant n$)

解:将 n 个球随机地放入 N 个盒子中,每个球均有 N 个选择,故基本事件总数为 N^n。

(1) 设 A 为“某指定的 n 个盒中恰各有一球”。
则 A 中基本事件数,$n\times(n-1)\times\cdots\times2\times1=n!$
故

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

(2) 设 B 为“任何 n 个盒中各有一球”。
则 B 中基本事件数:$C_N^n\times n! =A_N^n$
故

$$P(B)=\frac{A_N^n}{N^n}$$

(3) 设 C 为“某一指定的盒子中恰有 m 个球”。
则 C 中基本事件数:$C_n^m\times(N-1)^{n-m}$

故

$$P(C)=\frac{C_n^m\times(N-1)^{n-m}}{N^n}$$

附注:求任选 20,40,50 人中,至少有两人生日相同的概率? 结果分别如下:

$$1-\frac{A_{365}^{20}}{365^{20}}=0.411,\qquad 1-\frac{A_{365}^{40}}{365^{40}}=0.891,\qquad 1-\frac{A_{365}^{50}}{365^{50}}=0.970$$

3) 随机取数问题

例 1.2.5 把 1,2,3,4,5,各写在一张纸片上,(无放回地)任取其三,排成自左而右的次序。问:(1)所得三位数是偶数的概率?

(2) 所得三位数不少于 200 的概率?

解:从以上 5 个数中,任取 3 个,不管如何排列都是一个三位数,故基本事件总数为

$$A_5^3=5\times4\times3=60$$

(1) 设 A 为"所得三位数是偶数",则"个位"必是 2 或 4,"十位"有 4 种选择,"百位"有 3 种选择。故 A 中基本事件数:$2\times4\times3=24$

故

$$P(A)=\frac{24}{60}=\frac{2}{5}=0.4$$

(2) 设 B 为"不少于 200 的三位数",则 $\overline{B}$ 为"小于 200 的三位数",故

$$P(\overline{B})=\frac{1\times4\times3}{60}=\frac{1}{5}$$

$$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}$$

若条件改为从 0,1,2,3,4,5 诸数选取,则结果变为

(1) $P(A)=\dfrac{3\times A_5^2-2\times A_4^1}{5\times A_5^2}=\dfrac{26}{50}$

(2) $P(B)=\dfrac{4\times A_5^2}{5\times A_5^2}=\dfrac{4}{5}$

例 1.2.6 设袋中有 a 只黑球,b 只红球,它们除颜色不同外,其他方面没有差别。现在把球随机地一只只摸出,求第 k 次摸出的一只球是黑球的概率? ($1\leqslant k\leqslant a+b$)。

解:设想将$(a+b)$只球都看作不同的(可以设想将球进行编号)。把摸出的球依次放在一直线上的 $a+b$ 个位置上,则可能的排列方法就为样本点总数,为 $(a+b)!$。

有利场合数为:$a\times(a+b-1)!$

故所求的概率为

$$P_k=\frac{a\times(a+b-1)!}{(a+b)!}=\frac{a}{a+b}$$

或者,把 a 只黑球看作没有区别,b 只白球也无区别。仍把球放在这 $a+b$ 个位置上。所有可能的放法即为样本点总数 C_{a+b}^a;其中有利场合数 C_{a+b-1}^{a-1}。则

$$P_k = \frac{C_{a+b-1}^{a-1}}{C_{a+b}^{a}} = \frac{a}{a+b}$$

从古典概率的定义,可以得到下面性质。

(1) 设 A 为任一事件,则 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$。

(2) 对必然事件 Ω,有 $P(\Omega) = 1$。

(3) 设事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 两两互不相容,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

2. 频率

下面考虑频率的基本性质,这将有助于引出概率的公理化定义:

设 n 次重复试验中事件 A 发生了 n_A 次,则事件 A 的频率定义为 $f_n(A) = \frac{n_A}{n}$,它表示了事件 A 发生的频繁程度。显然频率具有以下性质:

(1) 对任一事件 A,有 $0 \leqslant f_n(A) \leqslant 1$。

(2) 对必然事件 Ω, $f_n(\Omega) = 1$。

(3) 对两两互不相容事件 $A_1, A_2, \cdots, A_N$, 有 $f_n\left(\bigcup_{i=1}^{N} A_i\right) = \sum_{i=1}^{N} f_n(A_i)$。

频率的这三条性质依次被称为非负性、归一性和有限可加性。就频率的意义而言,频率在某种程度上可以反映出一个事件发生的可能性大小。那么是否可以把频率就当作概率呢? 答案是否定的。经验告诉我们,频率会随试验次数 n 的变化而发生波动。即使是在试验次数相同的条件下,两组试验得到的频率也不尽相同。频率的随机波动使得它失去了作为可能性大小度量的客观性。然而经验还告诉我们,随着试验次数的增加,频率的随机波动性有逐渐减小的趋势。历史上曾有人做过试验,试图证明抛掷匀质硬币时,出现正反面的机会均等。

试验者	n	国徽向上的次数	国徽向上的频率
De Morgan	2048	1061	0.5181
Buffon	4040	2048	0.5069
K. Pearson	12000	6019	0.5016
K. Pearson	24000	12012	0.5005

从抛硬币的试验中可以看出,当 n 固定时,“国徽向上”的频率是有波动性的。当 $n \to \infty$ 时,“国徽向上”频率又趋近一固定的数 0.5。也就是说,当试验次数趋于无穷大时频率将趋于一个稳定的值。可以想象出,这个稳定的值就是频率的波动中心。波动中心的客观性使得人们非常自然地把它同相应事件发生的概率相联系,从而就将频率所趋于的稳定值看作事件 A 发生的概率。

3. 几何概率模型

设某一随机现象的样本空间,可用欧氏空间的某一有限区域 S 表示,其样本点具有所谓“均匀分布”的性质。

设任一事件 A(也可表示为一区域),$A\subset S$。它的量度(测度)记为 $\mu(A)$,考虑到"均匀分布"性,定义:

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}$$

称这样的模型为几何概率模型。

例 1.2.7 两人相约 7 点到 8 点在某地会面,先到者等候另一人 20min,超出就可离去,试求两人能会面的概率?

解:以 x,y 分别表示两人到达时刻,则能会面的充要条件为:$|x-y|\leqslant 20$,见图 1.2。

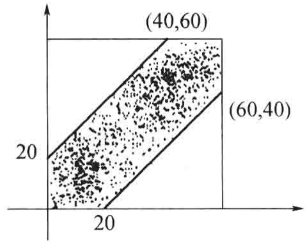

图 1.2

这时,$S=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 60,0\leqslant y\leqslant 60\}$

$A=\{(x,y)\mid |x-y|\leqslant 20,0\leqslant x,y\leqslant 60\}$

则

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}=\frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}}=\frac{60\times 60-40\times 40}{60\times 60}=\frac{5}{9}$$

例 1.2.8 蒲丰(Buffon)问题。设平面上画有等距离为 $a(a>0)$ 的一些平行线,向平面上随意投掷一长为 $l(0<l<a)$ 的针,求针与平面上一条平行线相交的概率?

解:设 x 表示针的中点到最近的一平行线的距离,φ 表示针与平行线的夹角。设 A 为针与一平行线相交的事件。见图 1.3。

这里

$$S=\left\{(x,\varphi)\,\middle|\,0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\varphi\leqslant\pi\right\}$$

$$A=\left\{(x,\varphi)\,\middle|\,x\leqslant\frac{l}{2}\sin\varphi,0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},0\leqslant\varphi\leqslant\pi\right\}$$

S,A 的形状如图 1.4 所示。

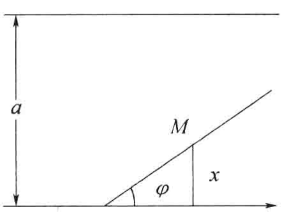

图 1.3

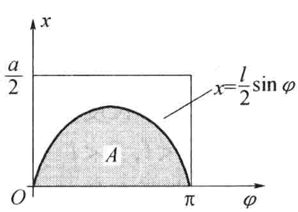

图 1.4

则

$$P(A)=\frac{\mu(A)}{\mu(S)}=\frac{\int_0^{\pi}\frac{l}{2}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi}{\frac{a}{2}\times\pi}=\frac{2l}{a\pi}$$

从上式可得到

$$\pi=\frac{2l}{aP(A)}$$

当 n 较大时,此处 $P(A)$ 可用 $f_n(A)=\frac{n_A}{n}$ 近似代替。例如 Lazzenini(1901)的试验,取针长 0.83,线距为 1(cm),掷 3408 次,其中相交次数为 1808 次。则

$$\pi=\frac{2\times 0.83}{1\times\frac{1808}{3408}}=3.1415929$$

通过上面的例子,可以得到这样的启示:为得到某个固定的量,我们建立一个概率模型,它与某些我们感兴趣的量有关(这里是 π)。然后设计适当的随机试验,并通过这个试验的结果来确定这些量。随着计算机技术的发展已按照上述思路建立了一类新的方法,称为蒙特卡洛方法(Monte - Carlo)。在 Mathematica 的概率统计软件包中,就有 π 的一种求法。

显然几何概率有如下性质:

(1) 对任意事件 A,有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$。

(2) 对必然事件 Ω,有 $P(\Omega)=1$。

(3) 设 $A_1,A_2,\cdots$,为可列无穷多个互不相容事件,则

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

这是因为

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\frac{\mu(\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i)}{\mu(S)}=\frac{\sum_{i=1}^{\infty}\mu(A_i)}{\mu(S)}=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\mu(A_i)}{\mu(S)}=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$
$$=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)$$

例 1.2.9 把长度为 l 的棒任意拆成三段,求它们可以构成一个三角形的概率。

解:设其中两段的长度为 x,y,则第三段的长度为 $l-x-y$,则 $0<x<l,0<y<l,\ 0<l-x-y<l$。把 (x,y) 看作平面上一点的直角坐标,则所有的基本事件可以表示为

$$S=\{(x,y)\mid 0<x<l,0<y<l,0<l-x-y<l\}$$

则设 A 为"拆成的三段能构成一个三角形"。

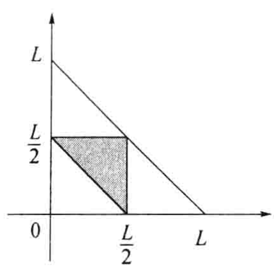

图 1.5

则 x,y 需满足：$\begin{cases} y+(L-x-y)>x \\ x+(L-x-y)>y \\ x+y>L-x-y \end{cases} \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{L}{2},0<y<\dfrac{L}{2},x+y>\dfrac{L}{2}$

则 A 中基本事件可表示为

$$A = \left\{(x,y)\,|0 < x < \frac{L}{2},0 < y < \frac{L}{2},x + y > \frac{L}{2}\right\}$$

故

$$P(A) = \frac{A\text{ 的面积}}{S\text{ 的面积}} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{L}{2}\right)^2}{\frac{1}{2}L^2} = \frac{1}{4}$$

1.3 概率的公理化定义及其性质

注意到不论是在古典概型中对概率的定义，还是频率定义方式，作为事件的概率，都应具有 3 条基本性质。在数学上，我们就可以从这些性质出发，给出概率的公理化定义。在给出概率的公理化定义时，一般并不把 Ω 的一切子集都作为事件，因为这将对定义概率带来困难。例如在几何概率中，若把不可测集也作为事件，将带来不可克服的困难。另一方面，又必须把问题中感兴趣的事件都包括进来。比方说若 A 为一事件，则应要求 $\overline{A}$ 也是一事件。若 A 与 B 是事件，则 $A\cup B$ 及 $A\cap B$ 也应为一事件。当样本点有无穷多个时，显然还得考虑可列个事件的交与并。首先引入以下定义。

定义 1.3.1 设 Ω 为一样本空间，$\mathscr{F}$是由 Ω 的一些子集所组成的集合族。如果$\mathscr{F}$满足以下条件：

(1) $\Omega\in\mathscr{F}$。

(2) 若 $A\in\mathscr{F}$，则 $\overline{A}\in\mathscr{F}$。(即对补运算封闭)

(3) 若 $A_i\in\mathscr{F},(i=1,2,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i\in\mathscr{F}$。(即对可列并运算封闭)

则称$\mathscr{F}$为 σ 代数，或 σ 事件域(体)；$\mathscr{F}$中的元素称为事件，Ω 称为必然事件，ϕ 称为不可能事件。称$(\Omega,\mathscr{F})$为可测空间。

按照上述定义，样本点不一定是事件。对同一样本空间可以构造多个事件域。

例 1.3.1 $\mathscr{F}=\{\phi,\Omega\}$ 为一 σ 域，只有 ϕ,Ω 两事件。

例 1.3.2 $\mathscr{F}=\{\phi,A,\overline{A},\Omega\}$ 为一 σ 域，只有 $\phi,A,\overline{A},\Omega$ 四个事件，A 为 Ω 的一子集合。

例 1.3.3 设 $\Omega=\{w_1,w_2,\cdots,w_n\}$，$\mathscr{F}$由 Ω 的一切子集构成。这时 $\mathscr{F}$是一个有限集合；共有 $C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$ 个元素，$\mathscr{F}$是一个 σ 域。

例 1.3.4 对一般的 Ω，若$\mathscr{F}$由 Ω 的一切子集构成，则$\mathscr{F}$是一个 σ 域。

由以上例子看出，事件域可以很简单，也可以选得很复杂。要根据问题的不同要求来选择适当的事件域。

例 1.3.5 一维 Borel 点集。以 $\Omega=R^1$；一切形如$[a,b)$的有界左闭，右开区间构成的集类所产生的 σ 域称为一维 Borel σ 域，记为 $\mathscr{B}^1$。称 $\mathscr{B}^1$ 中的集为一维 Borel 点集。