同济数学系列丛书
TONGJI SHUXUE XILIECONGSHU

硕士研究生入学考试
数学复习与解题指南

⊙ 同济大学数学系 编著

同济大学数学系倾力打造

精选最新考研真题，总结学科命题特点
典型例题深度剖析，方法技巧全面归纳
学以致用轻松备考，循序渐进稳步提升

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

同济数学系列丛书
TONGJI SHUXUE XILIE CONGSHU

硕士研究生入学考试
数学复习与解题指南

⊙ 同济大学数学系 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内容提要

本书主要是为报考工科类和经管类硕士研究生的考生编写的，全书由高等数学、线性代数和概率统计三部分组成. 其中前两部分与同济大学数学教研室编写、高等教育出版社出版的《高等数学》上、下册和《线性代数》教材紧密配合，同时增加部分国内外数学竞赛的典型题目. 书中对各部分的重要概念和基本理论(定理和公式)作了系统的概括，着重讨论基本题型与解题方法，必要时对例题进行了详尽的分析和总结，以扩大学生思路，提高分析问题和解决问题的能力.

全书突出一个宗旨：力求使考生用较少的时间复习掌握好研究生考试大纲所规定的内容，获得较多的解题方法，以便取得更好成绩. 本书从历届考题和竞赛试题中筛选了近 1 200 道典型例题，选辑了 363 道习题并附有习题简答，书末还收集了 2015 年工科类和经管类硕士入学考试数学试题参考解答.

本书也可作为各类工科大学生、工程技术人员和教师的参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学复习与解题指南 / 同济大学数学系编著. -- 上海：同济大学出版社，2015.4

ISBN 978-7-5608-5808-1

Ⅰ. ①硕… Ⅱ. ①同… Ⅲ. ①高等数学—研究生—入学考试—解题 Ⅳ. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 067790 号

硕士研究生入学考试数学复习与解题指南

同济大学数学系 编著

丛书策划 姚建中 责任编辑 李小敏 张 莉 助理编辑 亓福军 责任校对 徐春莲 封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(地址：上海市四平路 1239 号 邮编：200092 电话：021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 同济大学印刷厂

开 本 880 mm×1230 mm 1/16

印 张 30.75

字 数 984 000

版 次 2015 年 4 月第 1 版 2015 年 4 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5808-1

定 价 59.00 元

编　委　会

主　编　徐建平　李少华

副主编　蒋凤瑛　殷俊锋

编　委（以拼音字母为序）

贺金陵　花　虹　刘庆生

钱伟民　项家樑　杨筱菡

前　言

随着我国高等教育事业的迅速发展，越来越多的人接受了高等教育，他们中的许多人希望获得更高的学历，而我国四个现代化事业的蓬勃发展也需要更多更高层次的人才，正是因为个人的追求与国家的需要相一致，所以近年来报考硕士研究生的人数平均都是在170万以上.对每一个报考研究生的人来讲，最关心的问题便是怎样按照考试大纲进行复习，提高复习效果，从而取得理想的考试成绩.要达到这一点，首先必须了解考试大纲中所规定的内容，分清哪些是主要的，哪些是次要的，这些内容在深度和广度上要求达到什么程度，其次要熟悉试卷中经常出现的题型，一些典型的甚至比较特殊的解题方法，这样，才能通过复习，深刻理解概念，牢固掌握解题方法，并在考试中付诸应用，从而取得好成绩.

我们认真总结了多年来教学和考研复习辅导的经验和资料，深入研究了历年的考试题型，认真筛选收集的资料，共同努力，编写了这本书.它不仅对报考研究生的人员是一本有用的辅导材料，对正在本科阶段学习高等数学、线性代数和概率统计的学生以及准备参加全国数学竞赛的学生同样也是一本有价值的参考书.这不仅是因为本书的内容与所选的例题、习题与在普通高校中使用很广的由同济大学数学教研组编写、高等教育出版社出版的《高等数学》和《线性代数》有很好的衔接，而且因为本书所总结的题型和解题方法对本科生学好高等数学和线性代数以及概论统计也大有裨益.

本书的编写突出一个宗旨：应试针对性强，力求使考生通过较短时间的复习，能达到考试大纲所规定的要求，并掌握一整套常用的基本解题方法.

本书具有以下几个特色：(1)吸收了历届试卷中经常出现的典型考题，并进行分析解答；(2)许多章节对基本题型和解题方法作了总结和归纳，便于学生总结提高；(3)指出解题中容易出错的地方，了解命题意图或考生容易误入的“陷阱”；(4) 高等数学、线性代数包含一部分精心筛选的国内外数学竞赛试题，便于学生备战全国数学竞赛；(5)各章均包含一定数量的习题及简答，做好这些习题，有利于提高考生解题的基本功.此外，各部分最后都安排了一些综合练习题，并附有简答，旨在提高考生的综合解题能力；每章开头有复习要求、基本概念和理论，目的是帮助考生掌握好各章的内容.

本书的复习要求中对理论部分的要求分“知道”和“理解”两档，理解高于知道；对运算部分的要求分“掌握”和“熟练掌握”两档.书末收集了中华人民共和国国家教育委员会最新制定的全国工学、经济学硕士研究生入学考试大纲以及研究生数学入学考题参考答案.一批富有教学经验的教师参加了本书的编写，其中，高等数学部分项家樑编写了第1，2，3，4章，刘庆生编写了第5，6，10章，贺金陵编写了第7，8章，李少华编写了第9章；线性代数部分殷俊锋编写了第1，2，3章，贺金陵编写了第4，5章；概率统计部分花虹编写了第1，2章，蒋凤瑛编写了第3，4，5章，杨筱菡编写了最后的第6，7，8章.贺金陵对全文进行了总纂.

在编写本书过程中，得到了同济大学数学系领导的大力协助，富有教学与考研辅导经验的徐建平教授从本书策划开始，就非常关心，提出了许多宝贵的意见.同济大学出版社的张莉同志在本书的出版过程中给予了极大的支持，使我们较为顺利地出版了这本书，在此一并表示诚挚的感谢.

由于编者水平有限，书中难免有错误和不妥之处，恳请同行批评指正.

编者

2015年4月20日

目　录

第一篇　高等数学

第一章　极限与连续 …… 3
一、复习与考试要求 …… 3
二、基本概念与理论 …… 3
三、典型例题与解题方法 …… 8
四、自测题一 …… 35
五、答案与提示 …… 36

第二章　一元函数微分学 …… 37
一、复习与考试要求 …… 37
二、基本概念与理论 …… 37
三、典型题型与解题方法 …… 41
四、自测题二 …… 74
五、答案与提示 …… 75

第三章　不定积分 …… 77
一、复习与考试要求 …… 77
二、基本概念和理论 …… 77
三、典型例题与求解方法 …… 79
四、自测题三 …… 90
五、答案与提示 …… 90

第四章　定积分及应用 …… 92
一、复习与考试要求 …… 92
二、基本概念和理论 …… 92
三、典型例题与求解方法 …… 96
四、自测题四 …… 120
五、答案与提示 …… 121

第五章　空间解析几何与向量代数 …… 122
一、复习与考试要求 …… 122
二、基本概念与理论 …… 122
三、典型题型与解题方法 …… 126
四、自测题五 …… 143
五、答案与提示 …… 144

第六章　多元函数微分学及其应用 …… 147
一、复习与考试要求 …… 147
二、基本概念与理论 …… 147

三、基本题型与解题方法 …… 150
四、自测题六 …… 180
五、答案与提示 …… 181

第七章 重积分 …… 184
一、复习与考试要求 …… 184
二、基本概念和理论 …… 184
三、典型题型与解题方法 …… 187
四、自测题七 …… 211
五、答案与提示 …… 213

第八章 曲线积分与曲面积分 …… 215
一、复习与考试要求 …… 215
二、基本概念和理论 …… 215
三、典型题型与解题方法 …… 219
四、自测题八 …… 249
五、答案与提示 …… 250

第九章 无穷级数 …… 252
一、复习与考试要求 …… 252
二、基本概念和理论 …… 252
三、典型题型与解题方法 …… 255
四、自测题九 …… 273
五、答案与提示 …… 274

第十章 微分方程及其应用 …… 277
一、复习与考试要求 …… 277
二、基本概念与理论 …… 277
三、基本题型与解题方法 …… 279
四、自测题十 …… 307
五、答案与提示 …… 309

第二篇 线性代数

第一章 行列式 …… 315
一、复习与考试要求 …… 315
二、基本概念和理论 …… 315
三、典型题型与解题方法 …… 316
四、自测题一 …… 320
五、答案与提示 …… 321

第二章 矩阵 …… 322
一、复习与考试要求 …… 322
二、基本概念和理论 …… 322
三、典型题型与解题方法 …… 324
四、自测题二 …… 332
五、答案与提示 …… 333

第三章　向量 …… 334
一、复习与考试要求 …… 334
二、基本概念和理论 …… 334
三、典型题型与解题方法 …… 336
四、自测题三 …… 346
五、答案与提示 …… 347

第四章　线性方程组 …… 348
一、复习与考试要求 …… 348
二、基本概念和理论 …… 348
三、典型题型与解题方法 …… 350
四、自测题四 …… 362
五、答案与提示 …… 365

第五章　相似矩阵以及二次型 …… 366
一、复习与考试要求 …… 366
二、基本概念和理论 …… 366
三、　典型题型与解题方法 …… 369
四、自测题五 …… 387
五、答案与提示 …… 389

第三篇　概率统计

第一章　随机事件和概率 …… 393
一、复习与考试要求 …… 393
二、基本概念和理论 …… 393
三、典型题型与解题方法 …… 395
四、自测题一 …… 399
五、答案与提示 …… 400

第二章　随机变量及其分布 …… 401
一、复习与考试要求 …… 401
二、基本概念和理论 …… 401
三、典型题型与解题方法 …… 404
四、自测题二 …… 411
五、答案与提示 …… 412

第三章　多维随机变量及其分布 …… 414
一、复习与考试要求 …… 414
二、基本概念和理论 …… 414
三、典型题型与解题方法 …… 417
四、自测题三 …… 428
五、答案与提示 …… 429

第四章　随机变量的数字特征 …… 430
一、复习与考试要求 …… 430
二、基本概念和理论 …… 430

三、典型题型与解题方法 …… 433
四、自测题四 …… 442
五、答案与提示 …… 443

第五章　随机变量序列的极限 …… 444
一、复习与考试要求 …… 444
二、基本概念和理论 …… 444
三、典型题型与解题方法 …… 445
四、自测题五 …… 447
五、答案与提示 …… 447

第六章　数理统计的基本概念 …… 448
一、复习与考试要求 …… 448
二、基本概念和理论 …… 448
三、典型题型与解题方法 …… 450
四、自测题六 …… 452
五、答案与提示 …… 453

第七章　参数估计 …… 454
一、复习与考试要求 …… 454
二、基本概念和理论 …… 454
三、典型题型与解题方法 …… 456
四、自测题七 …… 460
五、答案与提示 …… 460

第八章　假设检验 …… 461
一、复习与考试要求 …… 461
二、基本概念和理论 …… 461
三、典型题型与解题方法 …… 464
四、自测题八 …… 465
五、答案与提示 …… 466

附　录

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(一)试题 …… 469

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题 …… 472

2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学(三)试题 …… 474

参考答案 …… 477

第一篇　高等数学

根据教育部最新的全国硕士研究生入学数学考试大纲，高等数学在数学一、三中约占56%，有三种题型，即4道选择题，4道填充题以及5道解答题；在数学二中约占78%，同样有三种题型，即6道选择题，5道填充题以及7道解答题。因此，对于每个考生来说，只有全面系统地、有针对性地加以复习，才能在考研数学中取得优异的成绩。

由于考研高等数学部分知识点多，内容繁杂，为了使得本书能够对考生起到有力的指导作用，我们在认真研究考试大纲、全面分析近年来考试真题的基础上，结合多年来在考研辅导过程中积累的经验和资料，编写了这部分内容。

读者在使用本书时，应当考虑到数学一、二以及三的区别，以同济六版高等数学为例，数学一考试范围最广，欧拉方程以及伯努利方程都要求掌握；数学二不考查向量代数与空间解析几何、二重积分、三重积分、线面积分以及无穷级数；数学三除了不考察以上内容外，也不考察与物理相关的应用，但是会考察差分方程。

在这部分内容中，我们精选归纳了较多数量的经典例题，也增加了近几年考研数学中的真题，这些例题充分反映了最近几年来研究生入学数学考试的水平以及动向，考生只要认真学习这部分内容，从根本上加强对基本概念和理论的理解，拓宽解题思路，通过对例题习题的思考，相信一定可以提高分析问题、解决问题的能力。

第一章　极限与连续

函数是高等数学的主要研究对象，而极限理论则是微积分的基础. 无论是微分还是积分，都始终伴随着极限的身影. 尽管在考研试题中，单一的极限考题并不多，但极限是讨论其他问题的重要工具.

我们把以后各章中出现的极限形式和求解方法合并在本章中，这对于初次接触极限的学生来说会带来一定的困难，但这样的讨论则更加全面。对于初学者来说，可以先跳过有关内容，等学完相关章节后，再来看这些内容.

一、复习与考试要求

(1) 了解函数的四个基本性质：单调性、奇偶性、有界性和周期性.

(2) 掌握基本初等函数的性质及图形.

(3) 理解数列极限、函数极限的定义，理解单侧极限的定义及极限存在与单侧极限的关系.

(4) 理解极限的性质，并理解性质的几何意义，掌握极限的四则运算法则和复合运算法则.

(5) 理解极限存在的两个重要法则，掌握用这些法则求一些基本极限的方法；熟悉两个重要极限形式及相应的变形，并会用这两个重要极限去求复杂形式的极限.

(6) 理解无穷小与无穷大的概念，理解无穷小的阶的概念，掌握无穷小阶的比较方法及利用等价无穷小来求一些复杂极限.

(7) 掌握用洛必达法则求极限的方法.

(8) 掌握用带佩亚诺(Piano)型余项的泰勒多项式求极限的方法.

(9) 掌握用定积分定义求极限的方法.

(10) 理解函数连续性的概念，掌握间断点分类的方法；了解初等函数连续性的有关结论.

(11) 熟悉闭区间上连续函数的基本性质，掌握用基本性质讨论函数特性的方法.

二、基本概念与理论

1. 一元函数

(1) 一元函数

设 $\mathbf{R}$ 是实数集. 一个实数集 $D(D\subset\mathbf{R})$ 到实数集的映射称为数集 D 上的**函数**，即，对每个 $x\in D$，有唯一的实数 y 与之对应.

(2) 函数的单调性、奇偶性、有界性与周期性

① 单调性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，区间 $I\subset D$，如果对于区间 I 上任意两点 x_1 和 x_2，当 $x_1<x_2$ 时，总有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad (f(x_1)>f(x_2)),$$

称函数 $f(x)$ 是区间 I 上的单调增加(减少)函数. 单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

注　函数单调与否既和表达式有关又与所给的区间有关.

② 奇偶性　设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称. 若对于 D 中任意的 x，总有

$$f(-x)=-f(x)\quad (f(-x)=f(x)),$$

则称函数 $f(x)$ 是定义域 D 上的**奇(偶)函数**.

注　奇(偶)函数的图形关于原点(y 轴)对称.

③ 有界性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，集合 $D'\subset D$. 若存在正数 M，使得对于 D' 中的任意数 x，都有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称 $f(x)$ 为 D' 上的**有界函数**，否则称 $f(x)$ 为 D' 上的**无界函数**.

注　无界函数的特征：对任意正数 $M>0$，一定存在 $x'\in D'$，使得

$$|f(x')|>M.$$

④ 周期性　设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,若存在正数 T,使得对任意的 $x\in D$,有 $x\pm T\in D$,且有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**周期函数**,T 是函数 $f(x)$ 的**周期**.

注　函数的周期通常指的是**最小正周期**.按此定义,一个周期函数可能不存在最小正周期!

(3) 基本初等函数

基本初等函数包括幂函数、指数函数、对数函数、三角函数与反三角函数.

(4) 反函数与复合函数

① 反函数　设函数 $f(x)$ 是 D 到 $f(D)$ 的 1—1 映射,即对于任意的 $y\in f(D)$,存在唯一的 $x\in D$,使得 $y=f(x)$,由此建立了数集 $f(D)$ 到 D 的函数 $x=g(y)$ 满足 $y=f(x)$.这样的函数称为函数 $y=f(x)$ 的**反函数**,记为 $x=f^{-1}(y)$.

注　习惯上总是将因变量记为 y,而以 x 表示自变量,相应的反函数写成 $y=f^{-1}(x)$.此时,函数 $y=f(x)$ 的图像与其反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像关于 $y=x$ 对称.

② 复合函数　设函数 $u=f(x)$ 是数集 D_1 到数集 D_2 的函数,而函数 $y=g(u)$ 是数集 D_3 到 D_4 的函数,又 $D_2\subset D_3$,通过变量 u(u 称为中间变量)确定了数集 D_1 到数集 D_4 的函数,该函数简记为

$$y=g[f(x)].$$

称此函数为由函数 $u=f(x)$ 与函数 $y=g(u)$ 构成的**复合函数**.

(5) 初等函数

把常数和基本初等函数经过有限次四则运算和有限次复合步骤所构成的并可以用一个算式表示的函数称为**初等函数**.

(6) 由参数方程所确定的函数、由方程所确定的隐函数

(7) 分段函数

2. 极限

(1) 数列的极限

设数列 $\{x_n\}$,若有常数 a,使得对于任意的正数 ε,存在正整数 N,当 $n>N$ 时,有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 以 a 为**极限**,或称数列 $\{x_n\}$ **收敛**到常数 a,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a;$$

若这样的常数 a 不存在,则称数列 $\{x_n\}$ 是**发散**的.

注　按定义证明数列 $\{x_n\}$ 以 a 为极限的基本方法是:对于给定的正数 ε,去寻找 N,使得当 $n>N$ 时,有 $|x_n-a|<\varepsilon$.

(2) 函数的极限

① 函数在有限点处的极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某一去心邻域内有定义,如果存在常数 A,使得对于任意的正数 ε,存在正数 δ,当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时,有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称**常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的极限**,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A.$$

② 自变量趋于无穷大时函数的极限

设函数 $f(x)$ 当 $|x|$ 大于某一正数时有定义,如果存在常数 A,使得对于任意的正数 ε,存在正数 X,使得当 $|x|>X$ 时,对应的函数值 $f(x)$ 都满足

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称**常数 A 为函数 $f(x)$ 当 $x\to\infty$ 时的极限**，记为

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=A.$$

(3) 单侧极限

① 自变量趋于有限值时的单侧极限

在极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 定义中，$x\to x_0$ 的要求改为当 $x\to x_0$ 且 $x<x_0$ 时，所得到的极限称为函数 $y=f(x)$ 在 x_0 处的**左极限**，记为

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x)=A.$$

平行定义函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**右极限** $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

② 自变量趋于无穷大时函数的单侧极限

在极限 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A$ 定义中，将 $x\to\infty$ 的要求改为当 $x\to\infty$ 且 $x<0$ 时，所得到的极限称为函数 $y=f(x)$ 当 $x\to-\infty$ 时的**单侧极限**，记为

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=A.$$

平行定义函数 $y=f(x)$ 当 $x\to+\infty$ 时函数 $y=f(x)$ 的单侧极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$.

③ 关系

结论　$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A\Leftrightarrow\left(\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=A\right)$；

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=A\Leftrightarrow\left(\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=A\right)$.

(4) 函数极限性质

① 极限的唯一性　若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处极限存在，则极限唯一.

② 局部有界性　若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处极限存在，则存在点 x_0 的某个去心邻域，使函数在该邻域内有界.

③ 局部保号性　若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在，且 $A>0$，则存在点 x_0 的某个去心邻域，使函数在该邻域内总有 $f(x)>0$.

④ 归并性　若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 存在，则对于任一收敛到点 x_0 且异于 x_0 的数列 $\{x_n\}$，总有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=A$.

注意这些性质在数列极限中的表现形式.

3. 极限的四则运算法则

(1) 函数的极限运算法则

设 $\lim\limits_{x} f(x)=A$，$\lim\limits_{x} g(x)=B$，则

① $\lim\limits_{x}\left[f(x)\pm g(x)\right]=A\pm B$；

② $\lim\limits_{x}\left[f(x)g(x)\right]=AB$；

③ $\lim\limits_{x}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{A}{B}$　$(B\neq 0)$.

(2) 复合函数的极限运算法则

设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=u_0$，且存在 x_0 的某个去心邻域 $\mathring{U}(x_0,\delta)$ 内有 $f(x)\neq u_0$；又 $\lim\limits_{u\to u_0} g(u)=A$，则

$$\lim_{x\to x_0} g[f(x)]=A.$$

结论　设 $f(x)=\dfrac{a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}{b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m}$，则

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\begin{cases}\infty, & n>m,\\ \dfrac{a_0}{b_0}, & n=m,\\ 0, & n<m.\end{cases}$$

4. 两个重要法则与两个重要极限

(1) 夹逼准则

设函数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ 在点 x_0 的某去心邻域中满足：

① $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$；

② $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} h(x) = A$，

则 $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = A$.

注意该准则在数列中的表现形式.

重要极限 1 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$. 变形 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin kx}{x} = k$.

(2) 单调有界准则

设数列 $\{x_n\}$ 单调有界，则 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n$ 存在.

重要极限 2 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{1}{x}\right)^x = \lim\limits_{x \to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$.

变形 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1 + \dfrac{k}{x+a}\right)^x = \mathrm{e}^k$.

针对类型 $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x+a}{x+b}\right)^{cx+d}$；$1^\infty$.

熟记下列极限：

① $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^k} = 1$ (k 为任意常数)；

② $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ $(a > 0)$；

③ $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x = 1$；

④ $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln^\alpha x = 0$ $(\alpha > 0)$；

⑤ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln^\alpha x}{x} = 0$；

⑥ $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^a}{\mathrm{e}^x} = 0$；

⑦ $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$.

5. 无穷小与无穷小的阶

(1) 无穷小与无穷大

若 $\lim f(x) = 0$，则称变量 $f(x)$ 是自变量 x 在某个变化过程中的无穷小量；若 $\lim f(x) = \infty$，则称变量 $f(x)$ 是自变量 x 在某个变化过程中的无穷大量.

(2) 无穷小的阶

设 α，β 为自变量 x 在某个变化过程中的无穷小，若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 0$，则称 α 是 β 的**高阶无穷小**，记为 $\alpha = o(\beta)$；若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = k(\neq 0)$，则称 α 是 β 的**同阶无穷小**，同阶无穷小常常又记为 $\alpha = O(\beta)$；若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = 1$，则称 α 与 β 是**等价无穷小**，记为 $\alpha \sim \beta$.

注 无穷小阶的比较是考试中的重要内容之一.

(3) 等价无穷小

等价无穷小有下列基本性质：

设 α，β，γ 均为自变量在某个变化过程中的无穷小量，则

① 自身性 $\alpha \sim \alpha$；

② 对称性 若 $\alpha \sim \beta \Rightarrow \beta \sim \alpha$；

③ 传递性 若 $\alpha \sim \beta$ 且 $\beta \sim \gamma \Rightarrow \alpha \sim \gamma$；

④ 等价无穷小替换准则 若 $\alpha \sim \alpha'$，$\beta \sim \beta'$，且 $\lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$ 存在，则 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}$ 也存在，且 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta} = \lim \dfrac{\alpha'}{\beta'}$.

强调 等价无穷小代换只能用于乘法与除法，在加减法过程中不能轻易使用等价无穷小替换.

熟记下列几组基本等价无穷小形式：

当 $x \to 0$ 时，

$$x \sim \sin x \sim \tan x \sim \arcsin x \sim \arctan x \sim \mathrm{e}^x - 1 \sim \ln(1+x);$$

$$1-\cos x\sim\frac{1}{2}x^2;\ a^x-1\sim x\ln a;\ (1+x)^\alpha-1\sim\alpha x;$$

$$\tan x-\sin x\sim\frac{1}{2}x^3;\ x-\sin x\sim\frac{1}{6}x^3;\ \tan x-x\sim\frac{1}{3}x^3.$$

注　上面极限中,可以将 x 改为任意的无穷小.

要点　使用等价无穷小简化极限计算.

(4) 无穷大与无界函数的关系及无穷大的运算性质.

6. 利用洛必达法则求极限

(1) 基本形式　$\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$:

法则　$\lim\limits_{x}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

注　该法则是充分条件.

(2) 变形　$0\cdot\infty$; $\infty-\infty$; 1^∞; ∞^0; 0^0(对于幂指函数类型,常用的方法是取对数后再求极限,最后还原).

尤其要注意 1^∞ 形式的极限及基本解法.

7. 利用带 Piano 型余项的泰勒多项式求极限

设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有 n 阶的连续导数,则

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o[(x-x_0)^n].$$

注　在使用带 Piano 型余项的泰勒展开式中,要根据表达式确定展开式的阶数.

8. 利用定积分求极限

连续函数 $f(x)$ 在区间$[a, b]$上的定积分表现为和式的极限

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\left(a+\frac{i}{n}(b-a)\right),$$

此时,可以用定积分来求和式的极限.用此方法求极限的要点是寻找相应的函数.

9. 连续函数与间断点的分类

(1) 连续性

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$,称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处连续;若函数 $f(x)$ 在定义域 D 中点点连续,称函数 $f(x)$ 是 D 上的**连续函数**.

结论　初等函数在定义区间内为连续函数.

(2) 间断点与间断点的分类

若函数 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续,则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的**间断点**.

(3) 间断点类型

设 x_0 是函数 $f(x)$ 的间断点,若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在,则称 x_0 为函数 $f(x)$ 的可去间断点;若$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,则称 x_0 是函数 $f(x)$ 的跳跃间断点,可去间断点与跳跃间断点构成函数 $f(x)$ 的第一类间断点,其他间断点称为函数 $f(x)$ 的第二类间断点.

10. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性定理

设 $f(x)$ 是闭区间$[a, b]$上的连续函数,则 $f(x)$ 在$[a, b]$上有界.

(2) 最大值最小值定理

设 $f(x)$ 是闭区间$[a, b]$上的连续函数,则 $f(x)$ 可在区间$[a, b]$上取得相应的最大值与最小值,即存在 x' 和 x''(x', $x''\in[a, b]$),使得

$$f(x')=\max_{x\in[a, b]}\{f(x)\}$$

及

$$f(x'') = \min_{x\in[a,b]}\{f(x)\}.$$

(3) 零点定理

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，且 $f(a)f(b) < 0$，则存在 $\xi \in (a, b)$，使得

$$f(\xi) = 0.$$

(4) 介值定理

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数，M 和 m 分别是函数 $f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上的最大值和最小值，任取 μ 且 $m \leqslant \mu \leqslant M$，则存在 $\xi \in [a, b]$，使得

$$f(\xi) = \mu.$$

三、典型例题与解题方法

例 1-1　函数 $f(x) = \dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列(　　)区间有界.(2004 年数学三第 7 题)

(A) $(-1, 0)$　　(B) $(0, 1)$　　(C) $(1, 2)$　　(D) $(2, 3)$

解　因 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty$，$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2} = \infty$，所以 $x = 1$，$x = 2$ 都为函数 $f(x)$ 的瑕点，所以函数 $f(x)$ 仅在区间 $(-1, 0)$ 内有界，因此正确答案为 (A).

例 1-2　设 $f(x) = \ln^{10}x$，$g(x) = x$，$h(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{10}}$，则当 x 充分大时有(　　).

(A) $g(x) < h(x) < f(x)$　　(B) $h(x) < g(x) < f(x)$

(C) $f(x) < g(x) < h(x)$　　(D) $g(x) < f(x) < h(x)$

解　因 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^\alpha}{\mathrm{e}^x} = 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^\alpha x}{x} = 0\ (\forall\alpha > 0)$，即当 x 充分大时，有 $\mathrm{e}^x > x > \ln^{10}x$，由此得正确答案为(C).

例 1-3　极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x =$(　　).(2010 年数学一第 1 题)

(A) 1　　(B) e　　(C) e^{a-b}　　(D) e^{b-a}

解　$\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x = \lim\limits_{x\to\infty}\left[1+\dfrac{(a-b)x+ab}{x^2-(a-b)x-ab}\right]^x$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left[1+\frac{(a-b)x+ab}{x^2-(a-b)x-ab}\right]^{\frac{x^2-(a-b)x-ab}{(a-b)x+ab}}\right]^{\frac{(a-b)x^2+abx}{x^2-(a-b)x-ab}} = \mathrm{e}^{a-b}.$$ 由此得正确答案为(C).

例 1-4　设 $0 < a < b$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}} =$(　　).(2008 年数学四第 1 题)

(A) a　　(B) a^{-1}　　(C) b　　(D) b^{-1}

解　因 $0 < a < b \Rightarrow 0 < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{a}$，所以 $\dfrac{1}{a} < \left(\dfrac{1}{a^n}+\dfrac{1}{b^n}\right)^{\frac{1}{n}} < \left(\dfrac{2}{a^n}\right)^{\frac{1}{n}} \to \dfrac{1}{a}$，由夹逼定理得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a^{-n}+b^{-n})^{\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{a}$. 即正确答案为(B).

例 1-5　设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ 均为非负数列，且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = 1$，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n = \infty$，则(　　).(2003 年数学二第 1 题)

(A) $a_n < b_n$ 对任意 n 都成立　　(B) $b_n < c_n$ 对任意 n 都成立

(C) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nc_n$ 不存在　　(D) 极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n$ 不存在

解　由 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n = \infty$ 容易得到 $\lim\limits_{n\to\infty}b_nc_n = \infty$. 对于其他答案容易找到相应的反例. 例如对(A)，令 $a_n = \dfrac{2}{n}$，$b_n = \dfrac{n-1}{n}$，则有 $a_1 > b_1$，但 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n = 1$.

所以正确答案为(D).