



· 高等学校辅导教材 ·

高等数学习题全解

同济·第七版
(上下合订本)

主编 陶 伟

- 讲解基本内容
- 解惑易错易混淆点
- 提炼典型题型
- 诠释重难点
- 归纳重要结论
- 总结解题方法与技巧



中国政法大学出版社



高等数学习题全解

同济·第七版

(上下合订本)

主编 陶 伟



中国政法大学出版社

2014·北京

- 声 明
1. 版权所有, 侵权必究。
 2. 如有缺页、倒装问题, 由出版社负责退换。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解/陶伟主编. —北京:中国政法大学出版社, 2014. 8
ISBN 978-7-5620-5611-9

I. ①高… II. ①陶… III. ①高等数学-高等学校-题解 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 205804 号

出 版 者	中国政法大学出版社
地 址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱 邮编 100088
网 址	http://www.cuplpress.com (网络实名:中国政法大学出版社)
电 话	010-58908285(总编室) 58908433(编辑部) 58908334(邮购部)
承 印	北京旺都印务有限公司
开 本	787mm × 960mm 1/16
印 张	34.75
字 数	795 千字
版 次	2014 年 8 月第 1 版
印 次	2014 年 8 月第 1 次印刷
定 价	32.00 元

前 言

高等数学是近代数学的基础，也是当代大学生的重要基础课和硕士研究生入学考试的重要科目。为了帮助广大读者全面系统地学习、掌握高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和技巧，我们组织清华大学、北京大学、中国人民大学、北京航空航天大学、北京理工大学、北京交通大学等院校一批具有丰富教学经验的青年教师编写了这本习题集。

本书是教材《高等数学》（同济·第七版）的习题全解。

本书旨在帮助读者提高分析问题的能力和掌握解题方法和技巧，加深对教材基本内容的理解和掌握，提高学习效率。

我们希望读者先自行思考，自己亲自动手解题，然后与本书题解进行对照。如果自己不动手去做题，而只是为了完成老师布置的作业照抄本书题解，是有害无益的。

本书编写结构：

本书严格按教材各章节习题顺序编排，与教材的题号一致，部分题目有一题多解。在有些题解中给出了评注，旨在指出读者易犯的错误和应当注意的事项。

本书各章按以下两项进行编写：

一、教材《高等数学》（同济·第七版）的试题及题解。

二、考研试题选解。我们按考研试题所考查的知识点，将其编排在教材相应的章节，以便读者了解硕士研究生入学考试命题方向和难易程度。

本书具有以下特点：

1. 题材丰富，题量大，可读性强。本书不仅包含了同济·第七版中所有习题，而且还选编了历年全国硕士研究生入学考试试题（含解答）。

2. 题型多样，方法典型、新颖，解答简捷，论证严谨，富有启发性。对备考硕士研究生的考生和正在学习《高等数学》的广大在校学生，把握课程重点，扩大视野，启迪思维，提高分析问题和解决问题的能力，都会有指导作用。

本书不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编者

目 录

第一章 函数与极限	1
习题 1-1 映射与函数	1
习题 1-2 数列的极限	8
习题 1-3 函数的极限	11
习题 1-4 无穷小与无穷大	14
习题 1-5 极限运算法则	17
习题 1-6 极限存在准则 两个重要极限	19
习题 1-7 无穷小的比较	22
习题 1-8 函数的连续性与间断点	23
习题 1-9 连续函数的运算与初等函数的连续性	26
习题 1-10 闭区间上连续函数的性质	29
总习题一	30
考研试题选解	35
第二章 导数与微分	43
习题 2-1 导数概念	43
习题 2-2 函数的求导法则	47
习题 2-3 高阶导数	53
习题 2-4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数 相关变化率	56
习题 2-5 函数的微分	60
总习题二	65
考研试题选解	70
第三章 微分中值定理与导数的应用	78
习题 3-1 微分中值定理	78
习题 3-2 洛必达法则	81
习题 3-3 泰勒公式	84
习题 3-4 函数的单调性与曲线的凹凸性	87
习题 3-5 函数的极值与最大值最小值	93
习题 3-6 函数图形的描绘	99
习题 3-7 曲 率	101
习题 3-8 方程的近似解	104
总习题三	105
考研试题选解	111

第四章 不定积分	135
习题 4-1 不定积分的概念与性质	135
习题 4-2 换元积分法	138
习题 4-3 分部积分法	144
习题 4-4 有理函数的积分	146
习题 4-5 积分表的使用	151
总习题四	153
考研试题选解	160
第五章 定积分	165
习题 5-1 定积分的概念与性质	165
习题 5-2 微积分基本公式	171
习题 5-3 定积分的换元法和分部积分法	175
习题 5-4 反常积分	181
习题 5-5 反常积分的审敛法 Γ 函数	183
总习题五	185
考研试题选解	194
第六章 定积分的应用	215
习题 6-2 定积分在几何学上的应用	215
习题 6-3 定积分在物理学上的应用	225
总习题六	229
考研试题选解	235
第七章 微分方程	245
习题 7-1 微分方程的基本概念	245
习题 7-2 可分离变量的微分方程	247
习题 7-3 齐次方程	250
习题 7-4 一阶线性微分方程	254
习题 7-5 可降阶的高阶微分方程	259
习题 7-6 高阶线性微分方程	264
习题 7-7 常系数齐次线性微分方程	269
习题 7-8 常系数非齐次线性微分方程	272
习题 7-9 欧拉方程	277
习题 7-10 常系数线性微分方程组解法举例	279
总习题七	283
考研试题选解	292

第八章 向量代数与空间解析几何	308
习题 8-1 向量及其线性运算	308
习题 8-2 数量积 向量积 混合积	311
习题 8-3 平面及其方程	313
习题 8-4 空间直线及其方程	316
习题 8-5 曲面及其方程	321
习题 8-6 空间曲线及其方程	324
总习题八	327
考研试题选解	333
第九章 多元函数微分法及其应用	336
习题 9-1 多元函数的基本概念	336
习题 9-2 偏导数	338
习题 9-3 全微分	341
习题 9-4 多元复合函数的求导法则	344
习题 9-5 隐函数的求导公式	349
习题 9-6 多元函数微分学的几何应用	353
习题 9-7 方向导数与梯度	357
习题 9-8 多元函数的极值及其求法	360
习题 9-9 二元函数的泰勒公式	364
习题 9-10 最小二乘法	367
总习题九	368
考研试题选解	375
第十章 重积分	393
习题 10-1 二重积分的概念与性质	393
习题 10-2 二重积分的计算法	395
习题 10-3 三重积分	408
习题 10-4 重积分的应用	415
习题 10-5 含参变量的积分	421
总习题十	424
考研试题选解	433
第十一章 曲线积分与曲面积分	446
习题 11-1 对弧长的曲线积分	446
习题 11-2 对坐标的曲线积分	449
习题 11-3 格林公式及其应用	453
习题 11-4 对面积的曲面积分	461
习题 11-5 对坐标的曲面积分	464

习题 11-6 高斯公式 通量与散度	466
习题 11-7 斯托克斯公式 环流量与旋度	469
总习题十一	472
考研试题选解	478
第十二章 无穷级数	490
习题 12-1 常数项级数的概念和性质	490
习题 12-2 常数项级数的审敛法	493
习题 12-3 幂级数	495
习题 12-4 函数展开成幂级数	497
习题 12-5 函数的幂级数展开式的应用	500
习题 12-6 函数项级数的一致收敛性及一致收敛级数的基本性质	505
习题 12-7 傅里叶级数	508
习题 12-8 一般周期函数的傅里叶级数	513
总习题十二	516
考研试题选解	523

第一章 函数与极限

习题 1-1 映射与函数

1 求下列函数的自然定义域:

$$(1) y = \sqrt{3x+2};$$

$$(2) y = \frac{1}{1-x^2};$$

$$(3) y = \frac{1}{x} - \sqrt{1-x^2};$$

$$(4) y = \frac{1}{\sqrt{4-x^2}};$$

$$(5) y = \sin\sqrt{x};$$

$$(6) y = \tan(x+1);$$

$$(7) y = \arcsin(x-3);$$

$$(8) y = \sqrt{3-x} + \arctan \frac{1}{x};$$

$$(9) y = \ln(x+1);$$

$$(10) y = e^{\frac{1}{x}}.$$

【解】 (1) 因 $3x+2 \geq 0$, 即 $x \geq -\frac{2}{3}$, 故函数的定义域为 $[-\frac{2}{3}, +\infty)$.

(2) 因 $1-x^2 \neq 0$, 即 $x \neq \pm 1$, 故函数的定义域为
 $(-\infty, -1) \cup (-1, 1) \cup (1, +\infty)$.

(3) 因 $\begin{cases} 1-x^2 \geq 0, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 即 $-1 \leq x \leq 1$ 且 $x \neq 0$, 故函数的定义域为 $[-1, 0) \cup (0, 1]$.

(4) 由 $4-x^2 > 0$, 得 $-2 < x < 2$, 故函数的定义域为 $(-2, 2)$.

(5) 要使函数有意义, 必须 $x \geq 0$, 故定义域为 $[0, +\infty)$.

(6) 要使函数有意义, 必须 $x+1 \neq k\pi + \frac{\pi}{2}$, 即 $x \neq k\pi + \frac{\pi}{2} - 1, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

(7) 要使函数有意义, 必须 $|x-3| \leq 1$, 即 $-1 \leq x-3 \leq 1$, 亦即 $2 \leq x \leq 4$, 故定义域为 $[2, 4]$.

(8) 由 $\begin{cases} 3-x \geq 0, \\ x \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x \leq 3, \\ x \neq 0, \end{cases}$ 故定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, 3)$.

(9) 由 $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$, 故定义域为 $(-1, +\infty)$.

(10) 由 $x \neq 0 \Rightarrow$ 定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

2 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

$$(1) f(x) = \lg x^2, \quad g(x) = 2\lg x;$$

$$(2) f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x^2};$$

$$(3) f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}, \quad g(x) = x \sqrt[3]{x-1}; \quad (4) f(x) = 1, \quad g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x.$$

【解】 两函数相同, 必须定义域相同, 对应法则也相同.

(1) 不同. 因为定义域不同, $f(x)$ 的定义域是 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 而 $g(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

(2) 不同. 因为对应法则不同, $f(x) = x$, 而 $g(x) = -x$ (当 $x < 0$ 时).

(3) 相同. 因为定义域、对应法则均相同.

(4) 不同. 因为 $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x = \frac{1 - \sin^2 x}{\cos^2 x}$, 分母不能为零, 即 $x \neq k\pi + \frac{1}{2}\pi$, 故 $f(x)$

与 $g(x)$ 的定义域不同.

③ 设 $\varphi(x) = \begin{cases} |\sin x|, & |x| < \frac{\pi}{3}, \\ 0, & |x| \geq \frac{\pi}{3}, \end{cases}$ 求 $\varphi(\frac{\pi}{6}), \varphi(\frac{\pi}{4}), \varphi(-\frac{\pi}{4}), \varphi(-2)$, 并作函数

$y = \varphi(x)$ 的图形.

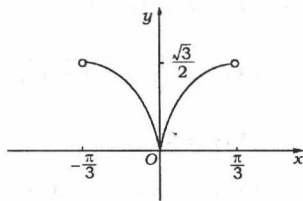
【解】 $\varphi(\frac{\pi}{6}) = |\sin \frac{\pi}{6}| = \frac{1}{2},$

$$\varphi(\frac{\pi}{4}) = |\sin \frac{\pi}{4}| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi(-\frac{\pi}{4}) = |\sin(-\frac{\pi}{4})| = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$\varphi(-2) = 0.$$

$y = \varphi(x)$ 图像如右.



第3题图

④ 试证下列函数在指定区间内的单调性:

(1) $y = \frac{x}{1-x}, (-\infty, 1);$

(2) $y = x + \ln x, (0, +\infty).$

【证】 (1) 设 $x_1 < x_2$, 且 $x_1, x_2 \in (-\infty, 1)$, 由于

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{x_1}{1-x_1} - \frac{x_2}{1-x_2} = \frac{x_1 - x_1x_2 - x_2 + x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \\ &= \frac{x_1 - x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} < 0, \end{aligned}$$

即 $f(x_1) < f(x_2)$, 故 $y = \frac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty, 1)$ 单调增加.

(2) 设 $x_1 < x_2$, 且 $x_1, x_2 \in (0, +\infty)$, 则有

$$f(x_1) - f(x_2) = (x_1 + \ln x_1) - (x_2 + \ln x_2) = (x_1 - x_2) + (\ln x_1 - \ln x_2).$$

由于 $y = \ln x$ 为单调增加函数, 所以 $(\ln x_1 - \ln x_2) < 0$.

又 $(x_1 - x_2) < 0$, 所以 $(x_1 - x_2) + (\ln x_1 - \ln x_2) < 0$.

故 $f(x_1) - f(x_2) < 0$, 即 $f(x_1) < f(x_2)$.

⑤ 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l, l)$ 内的奇函数, 若 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 证明: $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内也单调增加.

【证】 因 $f(x)$ 在 $(-l, l)$ 上为奇函数, 所以对任意 $x \in (-l, l)$, 有 $f(-x) = -f(x)$.

对任意 $x_1, x_2 \in (-l, 0)$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 即 $-x_1 > -x_2$, 且 $-x_1, -x_2 \in (0, l)$, 由于 $f(x)$ 在 $(0, l)$ 内单调增加, 所以 $f(-x_1) > f(-x_2)$, 即 $-f(x_1) > -f(x_2)$, 亦即 $f(x_1) < f(x_2)$. 故 $f(x)$ 在 $(-l, 0)$ 内单调增加.

⑥ 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间 $(-l, l)$ 上的, 证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数, 两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数, 两个奇函数的乘积是偶函数, 奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

【证】 (1) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数, 令 $F(x) = f_1(x) + f_2(x)$, 因

$$F(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数, 令 $G(x) = g_1(x) + g_2(x)$, 因

$$G(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = -g_1(x) - g_2(x) = -G(x),$$

故 $G(x)$ 为奇函数.

(2) 设 $f_1(x), f_2(x)$ 均为偶函数, 令 $F(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$, 因

$$F(-x) = f_1(-x) \cdot f_2(-x) = f_1(x) \cdot f_2(x) = F(x),$$

故 $F(x)$ 为偶函数.

设 $g_1(x), g_2(x)$ 均为奇函数, 令 $G(x) = g_1(x) \cdot g_2(x)$, 因

$$\begin{aligned} G(-x) &= g_1(-x) \cdot g_2(-x) = [-g_1(x)] \cdot [-g_2(x)] \\ &= g_1(x) \cdot g_2(x) = G(x), \end{aligned}$$

故 $G(x)$ 为偶函数.

设 $f(x)$ 为偶函数, $g(x)$ 为奇函数, 令 $H(x) = f(x) \cdot g(x)$, 因

$$H(-x) = f(-x) \cdot g(-x) = f(x) \cdot [-g(x)] = -f(x)g(x) = -H(x),$$

故 $H(x)$ 为奇函数.

⑦ 下列函数中哪些是偶函数, 哪些是奇函数, 哪些既非奇函数又非偶函数?

$$(1) y = x^2(1 - x^2);$$

$$(2) y = 3x^2 - x^3;$$

$$(3) y = \frac{1 - x^2}{1 + x^2};$$

$$(4) y = x(x - 1)(x + 1);$$

$$(5) y = \sin x - \cos x + 1;$$

$$(6) y = \frac{a^x + a^{-x}}{2}.$$

【解】 由奇、偶函数的定义来判断.

(1) $f(-x) = (-x)^2[1 - (-x^2)] = x^2(1 - x^2) = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数;

(2) $f(-x) = 3(-x)^2 - (-x)^3 = 3x^2 + x^3 \neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$, 故 $f(x)$ 既非奇函数又非偶函数;

(3) $f(-x) = \frac{1 - (-x)^2}{1 + (-x)^2} = \frac{1 - x^2}{1 + x^2} = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数;

(4) $f(-x) = (-x)[(-x) - 1][(-x) + 1] = -x(x - 1)(x + 1) = -f(x)$, 故 $f(x)$ 为奇函数;

(5) $f(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) + 1 = -\sin x - \cos x + 1 \neq f(x)$ 且 $\neq -f(x)$, 故 $f(x)$ 即非奇函数又非偶函数;

(6) $f(-x) = \frac{a^{(-x)} + a^{-(-x)}}{2} = \frac{a^x + a^{-x}}{2} = f(x)$, 故 $f(x)$ 为偶函数.

⑧ 下列各函数中哪些是周期函数? 对于周期函数, 指出其周期:

$$(1)y = \cos(x-2); \quad (2)y = \cos 4x; \quad (3)y = 1 + \sin \pi x;$$

$$(4)y = x \cos x; \quad (5)y = \sin^2 x.$$

【解】 (1) $y = \cos(x-2)$ 是周期函数, 周期 $l = 2\pi$;

(2) $y = \cos 4x$ 是周期函数, 周期 $l = \frac{\pi}{2}$;

(3) $y = 1 + \sin \pi x$ 是周期函数, 周期 $l = 2$;

(4) $y = x \cos x$ 不是周期函数;

(5) $y = \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$ 是周期函数, 周期 $l = \pi$.

9 求下列函数的反函数:

$$(1)y = \sqrt[3]{x+1};$$

$$(2)y = \frac{1-x}{1+x};$$

$$(3)y = \frac{ax+b}{cx+d} \quad (ad-bc \neq 0);$$

$$(4)y = 2\sin 3x \left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right);$$

$$(5)y = 1 + \ln(x+2);$$

$$(6)y = \frac{2^x}{2^x+1}.$$

【解】 (1) 由 $y = \sqrt[3]{x+1}$ 解出 $x = y^3 - 1$, 故所求反函数为 $y = x^3 - 1$.

(2) 由 $y = \frac{1-x}{1+x}$ 解出 $x = \frac{1-y}{1+y}$, 故所求反函数为 $y = \frac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y = \frac{ax+b}{cx+d}$ 解出 $x = \frac{b-dy}{cy-a}$, 故所求反函数为 $y = \frac{b-dx}{cx-a} \left(x \neq \frac{a}{c} \right)$.

(4) 由 $y = 2\sin 3x \left(-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{\pi}{6} \right)$ 解得 $x = \frac{1}{3}\arcsin \frac{y}{2}$, 即反函数为 $y = \frac{1}{3}\arcsin \frac{x}{2}$;

(5) 由 $y = 1 + \ln(x+2)$ 解得 $x = e^{y-1} - 2$, 即反函数为 $y = e^{x-1} - 2$;

(6) 由 $y = \frac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $x = \log_2 \frac{y}{1-y}$, 即反函数 $y = \log_2 \frac{x}{1-x}$.

10 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义, 试证: 函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【证】 充分性. 已知 $M_1 \leq f(x) \leq M_2$, 对任意 $x \in X$, 取 $M = \max\{|M_1|, |M_2|\}$, 则 $|f(x)| \leq M$, 对任意 $x \in X$, 有界.

必要性. 已知 $f(x)$ 有界, 即对任意 $x \in X$, 有 $|f(x)| \leq M$, 则 $-M \leq f(x) \leq M$, 故既有上界 $M_1 = M$, 也有下界 $M_2 = -M$, 得证.

11 在下列各题中, 求由所给函数构成的复合函数, 并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

$$(1)y = u^2, \quad u = \sin x, \quad x_1 = \frac{\pi}{6}, \quad x_2 = \frac{\pi}{3};$$

$$(2)y = \sin u, \quad u = 2x, \quad x_1 = \frac{\pi}{8}, \quad x_2 = \frac{\pi}{4};$$

$$(3)y = \sqrt{u}, \quad u = 1 + x^2, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = 2;$$

$$(4) y = e^u, \quad u = x^2, \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 1;$$

$$(5) y = u^2, \quad u = e^x, \quad x_1 = 1, \quad x_2 = -1.$$

【解】 (1) 复合函数为 $y = \sin^2 x$. 当 $x_1 = \frac{\pi}{6}$ 时, $y = \frac{1}{4}$; 当 $x_2 = \frac{\pi}{3}$ 时, $y = \frac{3}{4}$.

(2) 复合函数为 $y = \sin 2x$. 当 $x_1 = \frac{\pi}{8}$ 时, $y = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 当 $x_2 = \frac{\pi}{4}$ 时, $y = 1$.

(3) 复合函数为 $y = \sqrt{1+x^2}$. 当 $x_1 = 1$ 时, $y = \sqrt{2}$; 当 $x_2 = 2$ 时, $y = \sqrt{5}$.

(4) 复合函数为 $y = e^{x^2}$. 当 $x_1 = 0$ 时, $y = 1$; 当 $x_2 = 1$ 时, $y = e$.

(5) 复合函数为 $y = e^{2x}$. 当 $x_1 = 1$ 时, $y = e^2$; 当 $x_2 = -1$ 时, $y = e^{-2}$.

12 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0, 1]$, 求下列各函数的定义域:

$$(1) f(x^2); \quad (2) f(\sin x);$$

$$(3) f(x+a) (a > 0); \quad (4) f(x+a) + f(x-a) (a > 0).$$

【解】 (1) 由 $0 \leq x^2 \leq 1$, 得 $-1 \leq x \leq 1$, 故 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1, 1]$.

(2) 由 $0 \leq \sin x \leq 1$, 得 $2k\pi \leq x \leq (2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). 故 $f(\sin x)$ 的定义域是 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ (k 为整数).

(3) 由 $0 \leq x+a \leq 1$, 得 $-a \leq x \leq 1-a$, 故 $f(x+a)$ 的定义域是 $[-a, 1-a]$.

(4) 由 $\begin{cases} 0 \leq x+a \leq 1, \\ 0 \leq x-a \leq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \leq x \leq 1-a, \\ a \leq x \leq 1+a, \end{cases}$ 注意到 $a > 0$, 只可能有两种情形:

当 $1-a < a$ 时, 即 $a > \frac{1}{2}$ 时, 上面不等式组无解;

当 $1-a \geq a$ 时, 即 $a \leq \frac{1}{2}$ 时, 上面不等式组的解为 $a \leq x \leq 1-a$.

故 $f(x+a) + f(x-a)$ 的定义域是 $[a, 1-a] \left(0 < a \leq \frac{1}{2} \right)$.

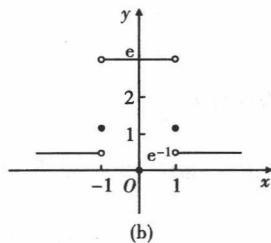
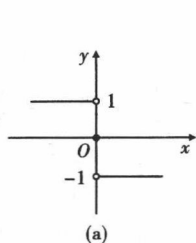
$$\textbf{13} \text{ 设 } f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases} g(x) = e^x, \text{ 求 } f[g(x)] \text{ 与 } g[f(x)], \text{ 并作出这两个函数}$$

的图形.

$$\textbf{【解】} f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1, \\ 0, & |e^x| = 1, \\ -1, & |e^x| > 1, \end{cases}$$

$$\text{即 } f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases} g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1 = e, & |x| < 1, \\ e^0 = 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$$

$f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的图形依次如图(a)与(b)所示.



第 13 题图

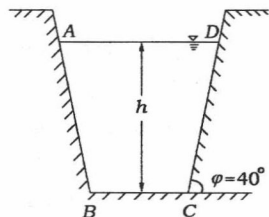
14 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi = 40^\circ$. 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 l ($l = AB + BC + CD$) 与水深 h 之间的函数关系式,并说明定义域.

【解】 $AB = DC = \frac{h}{\sin 40^\circ}$, 由 $S_0 = \frac{1}{2}h(2BC + 2\cot 40^\circ \cdot h)$, 得

$$BC = \frac{S_0}{h} - \cot 40^\circ \cdot h.$$

故
$$l = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40^\circ}{\sin 40^\circ} \cdot h.$$

由于自变量 h 的取值由不等式组 $\begin{cases} h > 0, \\ \frac{S_0}{h} - \cot 40^\circ \cdot h > 0 \end{cases}$ 确定,



第 14 题图

故湿周函数的定义域 $D = \{h \mid 0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40^\circ}\}$, 即 $(0, \sqrt{S_0 \tan 40^\circ})$.

15 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 及直线 $l: x + y = t$ ($t \geq 0$). 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积, 试求 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系.

【解】 当 $0 \leq t \leq 1$ 时, $S(t) = \frac{1}{2}t^2$,

当 $1 < t \leq 2$ 时, $S(t) = 1 - \frac{1}{2}(2 - t)^2 = -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1$,

当 $t > 2$ 时, $S(t) = 1$.

故

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t^2, & 0 \leq t \leq 1, \\ -\frac{1}{2}t^2 + 2t - 1, & 1 < t \leq 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

16 求联系华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式,并求

(1) 90°F 的等价摄氏温度和 -5°C 的等价华氏温度;

(2) 是否存在一个温度值,使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的?如果存在,那么该温度值是多少?

【解】 设 $F = mC + b$, 其中 m, b 均为常数.

因为 $F = 32^\circ$ 相当于 $C = 0^\circ$, $F = 212^\circ$ 相当于 $C = 100^\circ$, 所以

$$b = 32, m = \frac{212 - 32}{100} = 1.8.$$

故 $F = 1.8C + 32$ 或 $C = \frac{5}{9}(F - 32).$

(1) $F = 90^\circ, C = \frac{5}{9}(90 - 32) \approx 32.2^\circ; C = -5^\circ, F = 1.8 \times (-5) + 32 = 23^\circ.$

(2) 设温度值 t 符合题意, 则有 $t = 1.8t + 32, t = -40$. 即华氏 -40° 恰好也是摄氏 -40° .

17 已知 $Rt\triangle ABC$ 中, 直角边 AC, BC 的长度分别为 20、15, 动点 P 从 C 出发, 沿三角形边界按 $C \rightarrow B \rightarrow A$ 方向移动; 动点 Q 从 C 出发, 沿三角形边界按 $C \rightarrow A \rightarrow B$ 方向移动, 移动到两动点相遇时为止, 且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的 2 倍. 设动点 P 移动的距离为 x , $\triangle CPQ$ 的面积为 y , 试求 y 与 x 之间的函数关系.

【解】 因为 $AC = 20, BC = 15$, 所以 $AB = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

由 $20 < 2 \cdot 15 < 20 + 25$ 可知, 点 P, Q 在斜边 AB 上相遇.

令 $x + 2x = 15 + 20 + 25$, 得 $x = 20$. 即当 $x = 20$ 时, 点 P, Q 相遇. 因此, 所求函数的定义域为 $(0, 20)$.

(1) 当 $0 < x < 10$ 时, 点 P 在 CB 上, 点 Q 在 CA 上 (图 17-1).

由 $|CP| = x, |CQ| = 2x$, 得

$$y = x^2.$$

(2) 当 $10 \leq x \leq 15$ 时, 点 P 在 CB 上, 点 Q 在 AB 上 (图 17-2).

$$|CP| = x, |AQ| = 2x - 20.$$

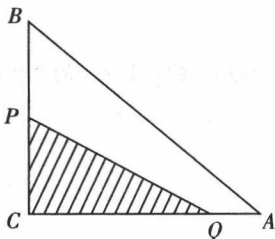
设点 Q 到 BC 的距离为 h , 则

$$\frac{h}{20} = \frac{|BQ|}{25} = \frac{45 - 2x}{25},$$

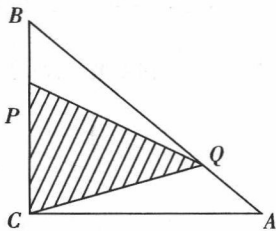
得 $h = \frac{4}{5}(45 - 2x)$. 故

$$y = \frac{1}{2}xh = \frac{2}{5}x(45 - 2x) = -\frac{4}{5}x^2 + 18x.$$

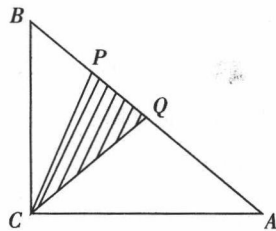
(3) 当 $15 < x < 20$ 时, 点 P, Q 都在 AB 上 (图 3).



(1)



(2)



(3)

第 17 题图

$$|BP| = x - 15, |AQ| = 2x - 20, |PQ| = 60 - 3x.$$

设点 C 到 AB 的距离为 h' , 则

$$h' = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12,$$

得

$$y = \frac{1}{2} |PQ| \cdot h' = -18x + 360.$$

综上可得

$$y = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 10, \\ -\frac{4}{5}x^2 + 18x, & 10 \leq x \leq 13 \\ -18x + 360, & 15 < x < 20. \end{cases}$$

18 利用以下美国人口普查局提供的世界人口数据①以及指数模型来推测 2020 年的世界人口.

年 份	人口数(百万)	年增长率(%)
2008	6708.2	1.166
2009	6786.4	1.140
2010	6863.8	1.121
2011	6940.7	1.107
2012	7017.5	1.107
2013	7095.2	

【解】 由表中第 3 列, 猜想 2008 年后世界人口的年增长率是 1.1%. 于是, 在 2008 年后的第 t 年, 世界人口将是

$$p(t) = 6708.2 \times (1.011)^t \text{ (百万)}.$$

2020 年对应 $t = 12$, 于是

$$p(12) = 6708.2 \times (1.011)^{12} \approx 7649.3 \text{ (百万)} \approx 76 \text{ (亿)}.$$

即推测 2020 年的世界人口约为 76 亿.

习题 1-2 数列的极限

1 下列各题中, 哪些数列收敛, 哪些数列发散? 对收敛数列, 通过观察数列 $\{x_n\}$ 的变化趋势, 写出它们的极限:

$$(1) x_n = \frac{1}{2^n};$$

$$(2) x_n = (-1)^n \frac{1}{n};$$

$$(3) x_n = 2 + \frac{1}{n^2};$$

$$(4) x_n = \frac{n-1}{n+1};$$

$$(5) x_n = n(-1)^n;$$

$$(6) x_n = \frac{2^n - 1}{3^n};$$

① 这里世界人口数据是指每年年中的人口数.