北大燕园

·高等学校辅导教材·

高等数学习题全解

同济·第七版
（上下合订本）

主编　陶　伟

· 讲解基本内容
· 解惑易错易混淆点
· 提炼典型题型
· 诠释重难点
· 归纳重要结论
· 总结解题方法与技巧

中国政法大学出版社

北大燕园

高等数学习题全解

同济·第七版

（上下合订本）

主编　陶　伟

中国政法大学出版社
2014·北京

图书在版编目(CIP)数据

高等数学习题全解/陶伟主编．—北京:中国政法大学出版社,2014. 8
ISBN 978-7-5620-5611-9

Ⅰ.①高…　Ⅱ.①陶…　Ⅲ.①高等数学-高等学校-题解　Ⅳ.①O13－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 205804 号

出版者	中国政法大学出版社
地　址	北京市海淀区西土城路 25 号
邮寄地址	北京 100088 信箱 8034 分箱　邮编 100088
网　址	http://www.cuplpress.com（网络实名:中国政法大学出版社）
电　话	010－58908285(总编室)　58908433(编辑部)　58908334(邮购部)
承　印	北京旺都印务有限公司
开　本	787mm×960mm　1/16
印　张	34.75
字　数	795 千字
版　次	2014 年 8 月第 1 版
印　次	2014 年 8 月第 1 次印刷
定　价	32.00 元

前　言

高等数学是近代数学的基础，也是当代大学生的重要基础课和硕士研究生入学考试的重要科目。为了帮助广大读者全面系统地学习、掌握高等数学的基本概念、基本理论、基本方法和技巧，我们组织**清华大学、北京大学、中国人民大学、北京航空航天大学、北京理工大学、北京交通大学**等院校一批具有丰富教学经验的青年教师编写了这本习题集。

本书是教材《高等数学》（**同济·第七版**）的习题全解。

本书旨在帮助读者提高分析问题的能力和掌握解题方法和技巧，加深对教材基本内容的理解和掌握，提高学习效率。

我们希望读者先自行思考，自己亲自动手解题，然后与本书题解进行对照。如果自己不动手去做题，而只是为了完成老师布置的作业照抄本书题解，是有害无益的。

本书编写结构：

本书严格按教材各章节习题顺序编排，与教材的题号一致，部分题目有一题多解。在有些题解中给出了评注，旨在指出读者易犯的错误和应当注意的事项。

本书各章按以下两项进行编写：

一、教材《高等数学》（**同济·第七版**）的试题及题解。

二、考研试题选解。我们按考研试题所考查的知识点，将其编排在教材相应的章节，以便读者了解硕士研究生入学考试命题方向和难易程度。

本书具有以下特点：

1. 题材丰富，题量大，可读性强。本书不仅包含了**同济·第七版**中所有习题，而且还选编了历年全国硕士研究生入学考试试题（含解答）。

2. 题型多样，方法典型、新颖，解答简捷，论证严谨，富有启发性。对备考硕士研究生的考生和正在学习《高等数学》的广大在校学生，把握课程重点，扩大视野，启迪思维，提高分析问题和解决问题的能力，都会有指导作用。

本书不足之处，诚恳地希望读者批评指正。

编者

目　录

第一章　函数与极限

习题 1－1　映射与函数

1 求下列函数的自然定义域:

(1) $y = \sqrt{3x+2}$;　　(2) $y = \dfrac{1}{1-x^2}$;

(3) $y = \dfrac{1}{x} - \sqrt{1-x^2}$;　　(4) $y = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2}}$;

(5) $y = \sin\sqrt{x}$;　　(6) $y = \tan(x+1)$;

(7) $y = \arcsin(x-3)$;　　(8) $y = \sqrt{3-x} + \arctan\dfrac{1}{x}$;

(9) $y = \ln(x+1)$;　　(10) $y = e^{\frac{1}{x}}$.

【解】 (1) 因 $3x+2 \geqslant 0$,即 $x \geqslant -\dfrac{2}{3}$,故函数的定义域为$\left[-\dfrac{2}{3}, +\infty\right)$.

(2) 因 $1-x^2 \neq 0$,即 $x \neq \pm 1$,故函数的定义域为

$$(-\infty, -1) \cup (-1,1) \cup (1, +\infty).$$

(3) 因$\begin{cases}1-x^2 \geqslant 0,\\ x \neq 0,\end{cases}$ 即 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 且 $x \neq 0$,故函数的定义域为$[-1,0) \cup (0,1]$.

(4) 由 $4-x^2 > 0$,得 $-2 < x < 2$,故函数的定义域为$(-2,2)$.

(5) 要使函数有意义,必须 $x \geqslant 0$,故定义域为$[0, +\infty)$.

(6) 要使函数有意义,必须 $x+1 \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2}$,即 $x \neq k\pi + \dfrac{\pi}{2} - 1, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$.

(7) 要使函数有意义,必须 $|x-3| \leqslant 1$,即 $-1 \leqslant x-3 \leqslant 1$,亦即 $2 \leqslant x \leqslant 4$,故定义域为$[2,4]$.

(8) 由$\begin{cases}3-x \geqslant 0,\\ x \neq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x \leqslant 3,\\ x \neq 0,\end{cases}$ 故定义域为$(-\infty,0) \cup (0,3)$.

(9) 由 $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$,故定义域为$(-1, +\infty)$.

(10) 由 $x \neq 0 \Rightarrow$ 定义域为$(-\infty,0) \cup (0, +\infty)$.

2 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \lg x^2$, $g(x) = 2\lg x$;　　(2) $f(x) = x$, $g(x) = \sqrt{x^2}$;

(3) $f(x) = \sqrt[3]{x^4 - x^3}$, $g(x) = x\sqrt[3]{x-1}$;　　(4) $f(x) = 1$, $g(x) = \sec^2 x - \tan^2 x$.

【解】 两函数相同,必须定义域相同,对应法则也相同.

(1) 不同. 因为定义域不同,$f(x)$ 的定义域是$(-\infty,0) \cup (0, +\infty)$,而 $g(x)$ 的定义域为$(0, +\infty)$.

(2) 不同．因为对应法则不同，$f(x)=x$，而 $g(x)=-x$（当 $x<0$ 时）．

(3) 相同．因为定义域、对应法则均相同．

(4) 不同．因为 $g(x)=\sec^2x-\tan^2x=\dfrac{1-\sin^2x}{\cos^2x}$，分母不能为零，即 $x\neq k\pi+\dfrac{1}{2}\pi$，故 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的定义域不同．

3 设 $\varphi(x)=\begin{cases}|\sin x|, & |x|<\dfrac{\pi}{3},\\ 0, & |x|\geqslant\dfrac{\pi}{3},\end{cases}$ 求 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right),\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right),\varphi(-2)$，并作函数 $y=\varphi(x)$ 的图形．

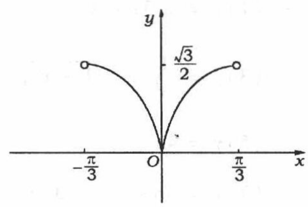
【解】 $\varphi\left(\dfrac{\pi}{6}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{6}\right|=\dfrac{1}{2}$，

$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\dfrac{\pi}{4}\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)=\left|\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right|=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，

$\varphi(-2)=0$．

$y=\varphi(x)$ 图像如右．



第 3 题图

4 试证下列函数在指定区间内的单调性：

(1) $y=\dfrac{x}{1-x}$，$(-\infty,1)$；　　(2) $y=x+\ln x$，$(0,+\infty)$．

【证】 (1) 设 $x_1<x_2$，且 $x_1,x_2\in(-\infty,1)$，由于

$$f(x_1)-f(x_2)=\frac{x_1}{1-x_1}-\frac{x_2}{1-x_2}=\frac{x_1-x_1x_2-x_2+x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}$$

$$=\frac{x_1-x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}<0,$$

即 $f(x_1)<f(x_2)$，故 $y=\dfrac{x}{1-x}$ 在 $(-\infty,1)$ 单调增加．

(2) 设 $x_1<x_2$，且 $x_1,x_2\in(0,+\infty)$，则有

$$f(x_1)-f(x_2)=(x_1+\ln x_1)-(x_2+\ln x_2)=(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2).$$

由于 $y=\ln x$ 为单调增加函数，所以 $(\ln x_1-\ln x_2)<0$．

又　　$(x_1-x_2)<0$，所以 $(x_1-x_2)+(\ln x_1-\ln x_2)<0$．

故　　$f(x_1)-f(x_2)<0$，即 $f(x_1)<f(x_2)$．

5 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明：$f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加．

【证】 因 $f(x)$ 在 $(-l,l)$ 上为奇函数，所以对任意 $x\in(-l,l)$，有 $f(-x)=-f(x)$．

对任意 $x_1,x_2\in(-l,0)$，当 $x_1<x_2$ 时，即 $-x_1>-x_2$，且 $-x_1,-x_2\in(0,l)$，由于 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，所以 $f(-x_1)>f(-x_2)$，即 $-f(x_1)>-f(x_2)$，亦即 $f(x_1)<f(x_2)$．故 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内单调增加．

6 设下面所考虑的函数都是定义在对称区间$(-l,l)$上的,证明:

(1) 两个偶函数的和是偶函数,两个奇函数的和是奇函数;

(2) 两个偶函数的乘积是偶函数,两个奇函数的乘积是偶函数,奇函数与偶函数的乘积是奇函数.

【证】 (1) 设$f_1(x)$, $f_2(x)$均为偶函数,令$F(x)=f_1(x)+f_2(x)$,因

$$F(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)=f_1(x)+f_2(x)=F(x),$$

故$F(x)$为偶函数.

设$g_1(x)$,$g_2(x)$均为奇函数,令$G(x)=g_1(x)+g_2(x)$,因

$$G(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)=-g_1(x)-g_2(x)=-G(x),$$

故$G(x)$为奇函数.

(2) 设$f_1(x)$, $f_2(x)$均为偶函数,令$F(x)=f_1(x)\cdot f_2(x)$,因

$$F(-x)=f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)\cdot f_2(x)=F(x),$$

故$F(x)$为偶函数.

设$g_1(x)$,$g_2(x)$均为奇函数,令$G(x)=g_1(x)\cdot g_2(x)$,因

$$\begin{aligned}G(-x)&=g_1(-x)\cdot g_2(-x)=[-g_1(x)]\cdot[-g_2(x)]\\&=g_1(x)\cdot g_2(x)=G(x),\end{aligned}$$

故$G(x)$为偶函数.

设$f(x)$为偶函数,$g(x)$为奇函数,令$H(x)=f(x)\cdot g(x)$,因

$$H(-x)=f(-x)\cdot g(-x)=f(x)\cdot[-g(x)]=-f(x)g(x)=-H(x),$$

故$H(x)$为奇函数.

7 下列函数中哪些是偶函数,哪些是奇函数,哪些既非奇函数又非偶函数?

(1)$y=x^2(1-x^2)$;　　(2)$y=3x^2-x^3$;

(3)$y=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;　　(4)$y=x(x-1)(x+1)$;

(5)$y=\sin x-\cos x+1$;　　(6)$y=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}$.

【解】 由奇、偶函数的定义来判断.

(1)$f(-x)=(-x)^2[1-(-x^2)]=x^2(1-x^2)=f(x)$, 故$f(x)$为偶函数;

(2)$f(-x)=3(-x)^2-(-x)^3=3x^2+x^3\neq f(x)$且$\neq -f(x)$, 故$f(x)$既非奇函数又非偶函数;

(3)$f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{1+(-x)^2}=\dfrac{1-x^2}{1+x^2}=f(x)$, 故$f(x)$为偶函数;

(4)$f(-x)=(-x)[(-x)-1][(-x)+1]=-x(x-1)(x+1)=-f(x)$, 故$f(x)$为奇函数;

(5)$f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)+1=-\sin x-\cos x+1\neq f(x)$且$\neq -f(x)$, 故$f(x)$即非奇函数又非偶函数;

(6)$f(-x)=\dfrac{a^{(-x)}+a^{-(-x)}}{2}=\dfrac{a^x+a^{-x}}{2}=f(x)$, 故$f(x)$为偶函数 .

8 下列各函数中哪些是周期函数?对于周期函数, 指出其周期:

(1) $y=\cos(x-2)$; (2) $y=\cos 4x$; (3) $y=1+\sin\pi x$;

(4) $y=x\cos x$; (5) $y=\sin^2 x$.

【解】 (1) $y=\cos(x-2)$ 是周期函数,周期 $l=2\pi$;

(2) $y=\cos 4x$ 是周期函数,周期 $l=\dfrac{\pi}{2}$;

(3) $y=1+\sin\pi x$ 是周期函数,周期 $l=2$;

(4) $y=x\cos x$ 不是周期函数;

(5) $y=\sin^2 x=\dfrac{1-\cos 2x}{2}$ 是周期函数,周期 $l=\pi$.

9 求下列函数的反函数:

(1) $y=\sqrt[3]{x+1}$; (2) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$;

(3) $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}\ (ad-bc\neq 0)$; (4) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y=1+\ln(x+2)$; (6) $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$.

【解】 (1) 由 $y=\sqrt[3]{x+1}$ 解出 $x=y^3-1$,故所求反函数为 $y=x^3-1$.

(2) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 解出 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$,故所求反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(3) 由 $y=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ 解出 $x=\dfrac{b-dy}{cy-a}$,故所求反函数为 $y=\dfrac{b-dx}{cx-a}\ \left(x\neq\dfrac{a}{c}\right)$.

(4) 由 $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$ 解得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$,即反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}$;

(5) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 解得 $x=e^{y-1}-2$,即反函数为 $y=e^{x-1}-2$;

(6) 由 $y=\dfrac{2^x}{2^x+1}$ 解得 $x=\log_2\dfrac{y}{1-y}$,即反函数 $y=\log_2\dfrac{x}{1-x}$.

10 设函数 $f(x)$ 在数集 X 上有定义,试证:函数 $f(x)$ 在 X 上有界的充分必要条件是它在 X 上既有上界又有下界.

【证】 充分性.已知 $M_1\leqslant f(x)\leqslant M_2$,对任意 $x\in X$,取 $M=\max\{|M_1|,|M_2|\}$,则 $|f(x)|\leqslant M$,对任意 $x\in X$,有界.

必要性.已知 $f(x)$ 有界,即对任意 $x\in X$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则 $-M\leqslant f(x)\leqslant M$,故既有上界 $M_1=-M$,也有下界 $M_2=M$,得证.

11 在下列各题中,求由所给函数构成的复合函数,并求这函数分别对应于给定自变量值 x_1 和 x_2 的函数值:

(1) $y=u^2$, $u=\sin x$, $x_1=\dfrac{\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{\pi}{3}$;

(2) $y=\sin u$, $u=2x$, $x_1=\dfrac{\pi}{8}$, $x_2=\dfrac{\pi}{4}$;

(3) $y=\sqrt{u}$, $u=1+x^2$, $x_1=1$, $x_2=2$;

(4) $y = e^u$, $u = x^2$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;

(5) $y = u^2$, $u = e^x$, $x_1 = 1$, $x_2 = -1$.

【解】 (1) 复合函数为 $y = \sin^2 x$. 当 $x_1 = \dfrac{\pi}{6}$ 时, $y = \dfrac{1}{4}$; 当 $x_2 = \dfrac{\pi}{3}$ 时, $y = \dfrac{3}{4}$.

(2) 复合函数为 $y = \sin 2x$. 当 $x_1 = \dfrac{\pi}{8}$ 时, $y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; 当 $x_2 = \dfrac{\pi}{4}$ 时, $y = 1$.

(3) 复合函数为 $y = \sqrt{1 + x^2}$. 当 $x_1 = 1$ 时, $y = \sqrt{2}$; 当 $x_2 = 2$ 时, $y = \sqrt{5}$.

(4) 复合函数为 $y = e^{x^2}$. 当 $x_1 = 0$ 时, $y = 1$; 当 $x_2 = 1$ 时, $y = e$.

(5) 复合函数为 $y = e^{2x}$. 当 $x_1 = 1$ 时, $y = e^2$; 当 $x_2 = -1$ 时, $y = e^{-2}$.

12 设 $f(x)$ 的定义域 $D = [0,1]$, 求下列各函数的定义域:

(1) $f(x^2)$; (2) $f(\sin x)$;

(3) $f(x + a)\ (a > 0)$; (4) $f(x + a) + f(x - a)\ (a > 0)$.

【解】 (1) 由 $0 \leqslant x^2 \leqslant 1$, 得 $-1 \leqslant x \leqslant 1$, 故 $f(x^2)$ 的定义域是 $[-1,1]$.

(2) 由 $0 \leqslant \sin x \leqslant 1$, 得 $2k\pi \leqslant x \leqslant (2k+1)\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$). 故 $f(\sin x)$ 的定义域是 $[2k\pi, (2k+1)\pi]$ (k 为整数).

(3) 由 $0 \leqslant x + a \leqslant 1$, 得 $-a \leqslant x \leqslant 1 - a$, 故 $f(x + a)$ 的定义域是 $[-a, 1 - a]$.

(4) 由 $\begin{cases} 0 \leqslant x + a \leqslant 1, \\ 0 \leqslant x - a \leqslant 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a \leqslant x \leqslant 1 - a, \\ a \leqslant x \leqslant 1 + a, \end{cases}$ 注意到 $a > 0$, 只可能有两种情形:

当 $1 - a < a$ 时, 即 $a > \dfrac{1}{2}$ 时, 上面不等式组无解;

当 $1 - a \geqslant a$ 时, 即 $a \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时, 上面不等式组的解为 $a \leqslant x \leqslant 1 - a$.

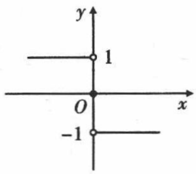
故 $f(x + a) + f(x - a)$ 的定义域是 $[a, 1 - a]\left(0 < a \leqslant \dfrac{1}{2}\right)$.

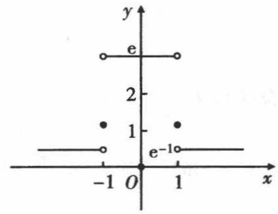
13 设 $f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1, \\ 0, & |x| = 1, \\ -1, & |x| > 1, \end{cases}$ $g(x) = e^x$, 求 $f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$, 并作出这两个函数的图形.

【解】 $f[g(x)] = f(e^x) = \begin{cases} 1, & |e^x| < 1, \\ 0, & |e^x| = 1, \\ -1, & |e^x| > 1, \end{cases}$

即 $f[g(x)] = \begin{cases} 1, & x < 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x > 0. \end{cases}$ $g[f(x)] = e^{f(x)} = \begin{cases} e^1 = e, & |x| < 1, \\ e^0 = 1, & |x| = 1, \\ e^{-1}, & |x| > 1. \end{cases}$

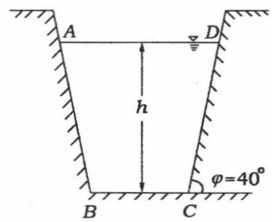
$f[g(x)]$ 与 $g[f(x)]$ 的图形依次如图 (a) 与 (b) 所示.





第 13 题图

14 已知水渠的横断面为等腰梯形,斜角 $\varphi = 40°$. 当过水断面 $ABCD$ 的面积为定值 S_0 时,求湿周 $l(l = AB + BC + CD)$ 与水深 h 之间的函数关系式,并说明定义域.



第 14 题图

【解】 $AB = DC = \dfrac{h}{\sin 40°}$,由 $S_0 = \dfrac{1}{2}h(2BC + 2\cot 40° \cdot h)$,得

$$BC = \frac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h.$$

故 $$l = \frac{S_0}{h} + \frac{2 - \cos 40°}{\sin 40°} \cdot h.$$

由于自变量 h 的取值由不等式组$\begin{cases} h > 0, \\ \dfrac{S_0}{h} - \cot 40° \cdot h > 0 \end{cases}$确定,

故湿周函数的定义域 $D = \{h \mid 0 < h < \sqrt{S_0 \tan 40°}\}$,即$(0, \sqrt{S_0 \tan 40°})$.

15 设 xOy 平面上有正方形 $D = \{(x,y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$ 及直线 $l: x + y = t(t \geqslant 0)$. 若 $S(t)$ 表示正方形 D 位于直线 l 左下方部分的面积,试求 $S(t)$ 与 t 之间的函数关系.

【解】 当 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 时,$S(t) = \dfrac{1}{2}t^2$,

当 $1 < t \leqslant 2$ 时,$S(t) = 1 - \dfrac{1}{2}(2-t)^2 = -\dfrac{1}{2}t^2 + 2t - 1$,

当 $t > 2$ 时,$S(t) = 1$.

故

$$S(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{2}t^2, & 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ -\dfrac{1}{2}t^2 + 2t - 1, & 1 < t \leqslant 2, \\ 1, & t > 2. \end{cases}$$

16 求联系华氏温度(用 F 表示)和摄氏温度(用 C 表示)的转换公式,并求

(1)90℉ 的等价摄氏温度和 -5℃ 的等价华氏温度;

(2)是否存在一个温度值,使华氏温度计和摄氏温度计的读数是一样的?如果存在,那么该温度值是多少?

【解】 设 $F = mC + b$,其中 m, b 均为常数.

因为 $F = 32°$ 相当于 $C = 0°$,$F = 212°$ 相当于 $C = 100°$,所以

$$b = 32, m = \frac{212 - 32}{100} = 1.8.$$

故 $F = 1.8C + 32$ 或 $C = \frac{5}{9}(F - 32)$.

(1) $F = 90°, C = \frac{5}{9}(90 - 32) \approx 32.2°$; $C = -5°, F = 1.8 \times (-5) + 32 = 23°$.

(2) 设温度值 t 符合题意,则有 $t = 1.8t + 32, t = -40$. 即华氏 $-40°$ 恰好也是摄氏 $-40°$.

17 已知 $Rt\triangle ABC$ 中,直角边 AC、BC 的长度分别为 20、15,动点 P 从 C 出发,沿三角形边界按 $C \to B \to A$ 方向移动;动点 Q 从 C 出发,沿三角形边界按 $C \to A \to B$ 方向移动,移动到两动点相遇时为止,且点 Q 移动的速度是点 P 移动的速度的2倍. 设动点 P 移动的距离为 x, $\triangle CPQ$ 的面积为 y,试求 y 与 x 之间的函数关系.

【解】 因为 $AC = 20, BC = 15$,所以 $AB = \sqrt{20^2 + 15^2} = 25$.

由 $20 < 2 \cdot 15 < 20 + 25$ 可知,点 P、Q 在斜边 AB 上相遇.

令 $x + 2x = 15 + 20 + 25$,得 $x = 20$. 即当 $x = 20$ 时,点 P、Q 相遇. 因此,所求函数的定义域为 $(0,20)$.

(1) 当 $0 < x < 10$ 时,点 P 在 CB 上,点 Q 在 CA 上(图 17 - 1).

由 $|CP| = x, |CQ| = 2x$,得

$$y = x^2.$$

(2) 当 $10 \leqslant x \leqslant 15$ 时,点 P 在 CB 上,点 Q 在 AB 上(图 17 - 2).

$$|CP| = x, \quad |AQ| = 2x - 20.$$

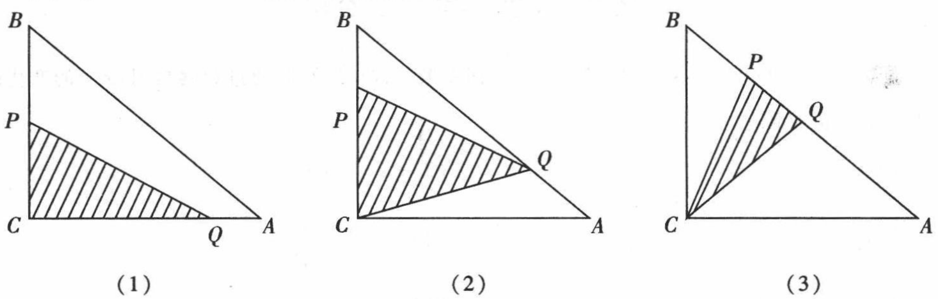
设点 Q 到 BC 的距离为 h,则

$$\frac{h}{20} = \frac{|BQ|}{25} = \frac{45 - 2x}{25},$$

得 $h = \frac{4}{5}(45 - 2x)$. 故

$$y = \frac{1}{2}xh = \frac{2}{5}x(45 - 2x) = -\frac{4}{5}x^2 + 18x.$$

(3) 当 $15 < x < 20$ 时,点 P、Q 都在 AB 上(图 3).



第 17 题图

$$|BP| = x - 15, \quad |AQ| = 2x - 20, \quad |PQ| = 60 - 3x.$$

设点 C 到 AB 的距离为 h',则

$$h' = \frac{15 \cdot 20}{25} = 12,$$

得

$$y = \frac{1}{2}\left|PQ\right| \cdot h' = -18x + 360.$$

综上可得

$$y = \begin{cases} x^2, & 0 < x < 10, \\ -\frac{4}{5}x^2 + 18x, & 10 \leqslant x \leqslant 13 \\ -18x + 360, & 15 < x < 20. \end{cases}$$

18 利用以下美国人口普查局提供的世界人口数据①以及指数模型来推测2020年的世界人口.

年　份	人口数(百万)	年增长率(%)
2008	6708.2	1.166
2009	6786.4	1.140
2010	6863.8	1.121
2011	6940.7	1.107
2012	7017.5	1.107
2013	7095.2	

【解】 由表中第3列,猜想2008年后世界人口的年增长率是1.1%.于是,在2008年后的第t年,世界人口将是

$$p(t) = 6708.2 \times (1.011)^t(\text{百万}).$$

2020年对应$t = 12$,于是

$$p(12) = 6708.2 \times (1.011)^{12} \approx 7649.3(\text{百万}) \approx 76(\text{亿}).$$

即推测2020年的世界人口约为76亿.

习题1－2　数列的极限

1 下列各题中,哪些数列收敛,哪些数列发散?对收敛数列,通过观察数列$\{x_n\}$的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $x_n = \frac{1}{2^n}$;　　(2) $x_n = (-1)^n\frac{1}{n}$;

(3) $x_n = 2 + \frac{1}{n^2}$;　　(4) $x_n = \frac{n-1}{n+1}$;

(5) $x_n = n(-1)^n$;　　(6) $x_n = \frac{2^n - 1}{3^n}$;

① 这里世界人口数据是指每年年中的人口数.