普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

微积分习题全解(第二版)

主编 张学奇

中国人民大学出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材

微积分习题全解
（第二版）

主编　张学奇

中国人民大学出版社
·北京·

图书在版编目(CIP)数据

微积分习题全解/张学奇主编. —2 版. —北京:中国人民大学出版社,2015.6
普通高等教育“十一五”国家级规划教材　普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材
ISBN 978-7-300-21443-6

Ⅰ.①微…　Ⅱ.①张…　Ⅲ.①微积分-高等学校-题解　Ⅳ.①O172-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 121314 号

普通高等教育“十一五”国家级规划教材
普通高等教育“十二五”应用型本科规划教材
微积分习题全解(第二版)
主编　张学奇
Weijifen Xiti Quanjie

出版发行	中国人民大学出版社		
社　　址	北京中关村大街 31 号	**邮政编码**	100080
电　　话	010－62511242(总编室)		010－62511770(质管部)
	010－82501766(邮购部)		010－62514148(门市部)
	010－62515195(发行公司)		010－62515275(盗版举报)
网　　址	http://www.crup.com.cn		
	http://www.ttrnet.com(人大教研网)		
经　　销	新华书店		
印　　刷	北京东方圣雅印刷有限公司		
规　　格	185 mm×260 mm　16 开本	**版　　次**	2015 年 6 月第 1 版
印　　张	14	**印　　次**	2015 年 7 月第 2 次印刷
字　　数	326 000	**定　　价**	29.00 元

内容提要

本书是与普通高等教育"十一五"国家级规划教材《微积分》(第二版)(张学奇、姚立、贺家宁主编,中国人民大学出版社出版)相配套的习题全解.主要作为学生学习微积分课程时演算习题的解题指导以及复习应试的参考书,同时也可供讲授微积分课程的教师备课和批改作业时参考.

全书按教材章节顺序编排,与教材同步.对《微积分》(第二版)教材中各章的全部习题与总习题都给出了完整、典型、翔实的解答,对重点习题给出了分析和解题指导,对提高学生的解题能力具有积极促进作用.

前　言

本书是与普通高等教育"十一五"国家级规划教材《微积分》(第二版)相配套的习题全解. 主要作为学生学习微积分课程时演算习题的解题指导以及复习应试的参考书,同时也可供讲授微积分课程的教师备课和批改作业时参考.

普通高等教育"十一五"国家级规划教材《微积分》(第二版)是依据经济类、管理类各专业对微积分课程的教学基本要求,在总结微积分课程教学改革成果,吸收国内外同类教材的优点,结合我国高等教育发展趋势的基础上编写的. 本教材习题覆盖面宽、题型丰富、难易适度;按节配有适量的基本练习题,主要用于巩固和加深对基本概念、基本定理、基本方法的理解和掌握;按章配有总习题,总习题包括填空题、单项选择题、计算题和证明题,总习题是对单元基本教学内容理解和掌握的进一步强化,可供读者提高综合解题能力和检测对基本教学内容掌握程度练习选用.

全书按教材章节顺序编排,与教材同步. 对《微积分》(第二版)教材中各章的全部习题与总习题都给出了完整、典型、翔实的解答,对重点习题给出了分析和解题指导,对提高学生的解题能力具有积极促进作用.

本书由张学奇教授主编,参加本书编写的有张少燕、吴小英、梁川、程思蔚、杨喜艳. 全书由张学奇统稿定稿.

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,恳请同行和读者批评指正!

编　者

2015 年 2 月

目 录

第一章　函　　数

习题 1.1

1. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合：

(1) $|x| \leqslant 2$；　　(2) $|x-2| \leqslant 1$；

(3) $|x-a| < \varepsilon$(a 为常数，$\varepsilon > 0$)；　　(4) $|x| > 3$；

(5) $|x+1| > 1$.

解　(1) $|x| \leqslant 2 \Leftrightarrow -2 \leqslant x \leqslant 2$，不等式的区间表示为$[-2,2]$；

(2) $|x-2| \leqslant 1 \Leftrightarrow -1 \leqslant x-2 \leqslant 1 \Leftrightarrow 1 \leqslant x \leqslant 3$，不等式的区间表示为$[1,3]$；

(3) $|x-a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < x-a < \varepsilon \Leftrightarrow a-\varepsilon < x < a+\varepsilon$，不等式的区间表示为$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$；

(4) $|x| > 3 \Leftrightarrow x < -3$ 或 $x > 3$，不等式的区间表示为$(-\infty,-3) \cup (3,+\infty)$；

(5) $|x+1| > 1 \Leftrightarrow x+1 < -1$ 或 $x+1 > 1$，即 $x < -2$ 或 $x > 0$，不等式的区间表示为$(-\infty,-2) \cup (0,+\infty)$.

2. 用区间表示下列点集，并在数轴上表示出来：

(1) $A = \{x\ \ |x+3| < 2\}$；　　(2) $B = \{x\ \ 1 < |x-2| < 3\}$.

解　(1) $(-5,-1)$，如图 1—1；(2) $(-1,1) \cup (3,5)$，如图 1—2.

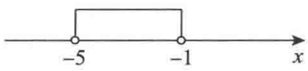

图 1—1

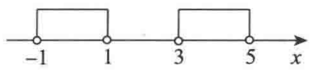

图 1—2

3. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{4-x^2}$；　　(2) $y = \dfrac{1}{x^2-2x}$；

(3) $y = \arcsin \dfrac{1-x}{3}$；　　(4) $y = \lg(x+1)$；

(5) $y = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{1-x^2}$；　　(6) $y = \sqrt{3-x} + \arctan \dfrac{1}{x}$.

解 (1) 要使函数有定义，只须 $4-x^2 \geqslant 0$，解得 $-2 \leqslant x \leqslant 2$，所以函数的定义域为 $[-2,2]$.

(2) 要使函数有定义，只须 $x^2-2x \neq 0$，解得 $x \neq 0, x \neq 2$，所以函数的定义域为 $(-\infty,0) \cup (0,2) \cup (2,+\infty)$.

(3) 要使函数有定义，只须 $-1 \leqslant \dfrac{1-x}{3} \leqslant 1$，解得 $-2 \leqslant x \leqslant 4$，所以函数的定义域为 $[-2,4]$.

(4) 要使函数有定义，只须 $x+1>0$，解得 $x>-1$，所以函数的定义域为 $(-1,+\infty)$.

(5) 要使函数有定义，只须 $\begin{cases} x+2 \geqslant 0 \\ 1-x^2 \neq 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x \geqslant -2 \\ x \neq \pm 1 \end{cases}$，所以函数的定义域为 $[-2,-1) \cup (-1,1) \cup (1,+\infty)$.

(6) 要使函数有定义，只须 $\begin{cases} 3-x \geqslant 0 \\ x \neq 0 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x \leqslant 3 \\ x \neq 0 \end{cases}$，所以函数的定义域为 $(-\infty,0) \cup (0,3]$.

4. 下列各题中，函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同？为什么？

(1) $f(x)=\lg x^2, g(x)=2\lg x$； (2) $f(x)=x, g(x)=\sqrt{x^2}$；

(3) $f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x$.

解 (1) 因为 $f(x)=\lg x^2$ 的定义域为 $(-\infty,0) \cup (0,+\infty)$，而 $g(x)=2\lg x$ 的定义域为 $(0,+\infty)$，两个函数的定义域不同，所以它们不是同一个函数.

(2) 因为 $g(x)=\sqrt{x^2}=|x|=\begin{cases} x & x \geqslant 0 \\ -x & x<0 \end{cases}$，而 $f(x)=x$，两个函数的对应法则不同，所以它们不是同一个函数.

(3) 因为 $f(x)=1, g(x)=\sin^2 x+\cos^2 x=1, x \in \mathbf{R}$，即 $f(x), g(x)$ 的定义域都是 $\mathbf{R}$，它们的对应法则相同，所以是同一个函数.

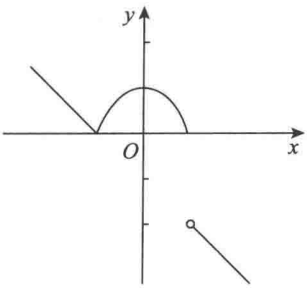

图 1—3

5. 设函数 $f(x)=\begin{cases} -x-1 & x<-1 \\ 1-x^2 & |x| \leqslant 1 \\ -x-1 & x>1 \end{cases}$. (1) 求 $f(x)$ 的定义域；(2) 求函数值 $f(-2), f(-1), f(0), f(1), f(3)$；(3) 作出函数图形.

解 (1) 函数的定义域为 $D=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$.

(2) $f(-2)=-(-2)-1=1, f(-1)=-(-1)-1=0$, $f(0)=1-0=1, f(1)=1-1=0, f(3)=-3-1=-4$.

(3) 函数图形如图 1—3 所示.

6. 判断下列函数的单调性：

(1) $y=2x+1$； (2) $y=2^{x-1}$；

(3) $y=2x+\ln x$； (4) $y=1+\dfrac{2}{x}$.

解 (1) $y=f(x)=2x+1$，设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=(2x_2+1)-(2x_1+1)=2(x_2-x_1)>0,$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $y=2x+1$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加函数.

(2) $y=f(x)=2^{x-1}$，设 $x_1, x_2 \in \mathbf{R}, x_1<x_2$，则

$$f(x_2)/f(x_1)=2^{x_2-1}/2_1^{x-1}=2^{x_2-x_1}>1,$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $y=2^{x-1}$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 内单调增加函数.

(3) $y=f(x)=2x+\ln x$，设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，$0<x_1<x_2$，则

$$f(x_2)-f(x_1)=(2x_2+\ln x_2)-(2x_1+\ln x_1)=2(x_2-x_1)+\ln\frac{x_2}{x_1}>0,$$

所以 $f(x_2)>f(x_1)$，即 $y=2x+\ln x$ 为 $(0,+\infty)$ 内单调增加函数.

(4) $y=f(x)=1+\dfrac{2}{x}$，设 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$，则

当 $x_1<x_2<0$ 时，$f(x_2)-f(x_1)=\left(1+\dfrac{2}{x_2}\right)-\left(1+\dfrac{2}{x_1}\right)=\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1x_2}<0$，

所以 $f(x_2)<f(x_1)$，即 $y=1+\dfrac{2}{x}$ 为 $(-\infty,0)$ 内单调减少函数.

当 $0<x_1<x_2$ 时，$f(x_2)-f(x_1)=\left(1+\dfrac{2}{x_2}\right)-\left(1+\dfrac{2}{x_1}\right)=\dfrac{2(x_1-x_2)}{x_1x_2}<0$，

即 $y=1+\dfrac{2}{x}$ 为 $(0,+\infty)$ 内单调减少函数.

7. 判别下列函数的奇偶性：

(1) $y=x^4-2x^2$；　　(2) $y=x\sin^2x$；

(3) $y=\sin x-\cos x$；　　(4) $y=\dfrac{x\sin x}{2+\cos x}$；

(5) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$；　　(6) $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$.

解　(1) $y=f(x)=x^4-2x^2$，因为 $f(-x)=(-x)^4-2(-x)^2=x^4-2x^2=f(x)$，所以 $y=x^4-2x^2$ 是偶函数.

(2) $y=f(x)=x\sin^2x$，因为 $f(-x)=-x\sin^2(-x)=-(x\sin^2x)=-f(x)$，所以 $y=x\sin^2x$ 是奇函数.

(3) $y=f(x)=\sin x-\cos x$，因为 $f(-x)=\sin(-x)-\cos(-x)=-\sin x-\cos x$，$f(-x)\neq-f(x)$ 且 $f(-x)\neq f(x)$，所以 $y=\sin x-\cos x$ 既非奇函数又非偶函数.

(4) $y=f(x)=\dfrac{x\sin x}{2+\cos x}$，因为 $f(-x)=\dfrac{(-x)\sin(-x)}{2+\cos(-x)}=\dfrac{x\sin x}{2+\cos x}=f(x)$，所以 $y=\dfrac{x\sin x}{2+\cos x}$ 是偶函数.

(5) $y=f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$，因为 $f(-x)=\ln[(-x)+\sqrt{1+(-x)^2}]=\ln\left[\dfrac{(\sqrt{1+x^2}-x)(\sqrt{1+x^2}+x)}{\sqrt{1+x^2}+x}\right]=\ln\left(\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}+x}\right)=-\ln(\sqrt{1+x^2}+x)=-f(x)$，所以 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 是奇函数.

(6) $y=f(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$，因为 $f(-x)=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=-f(x)$，所以 $y=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}$ 是奇函数.

8. 判别下列函数的有界性：

(1) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$；　　(2) $y=1+\sin\dfrac{1}{x}$；

(3) $y = 2\arctan 2x$;　　　　　　　　(4) $y = 2 + \frac{1}{x^2}$.

解　(1) 函数 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,由于对任意的实数 x 都有 $1+x^2 \geqslant 2|x|$,所以 $\left|\frac{x}{1+x^2}\right| \leqslant \frac{|x|}{2|x|} = \frac{1}{2}$,故 $y = \frac{x}{1+x^2}$ 是有界函数.

(2) 函数 $y = 1 + \sin\frac{1}{x}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,因为 $\left|1 + \sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1 + \left|\sin\frac{1}{x}\right| \leqslant 1 + 1 = 2$,故函数 $y = 1 + \sin\frac{1}{x}$ 是有界函数.

(3) 函数 $y = 2\arctan 2x$ 的定义域为 $\mathbf{R}$,因为 $|2\arctan 2x| \leqslant 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi$,故函数 $y = 2\arctan 2x$ 是有界函数.

(4) 函数 $y = 2 + \frac{1}{x^2}$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$,找不到一个 M,使得 $|y| \leqslant M$ 成立,所以函数 $y = 2 + \frac{1}{x^2}$ 是无界函数.

9. 张先生的家距离单位 2 公里,一般早晨 7 点 30 分步行去上班,8 点到达工作单位,今天由于离家匆忙,走出 10 分钟后想到电视机未关,因此又返回家把电视机关上,然后立刻骑自行车出发,结果准时到达单位. 试画出以离家距离作为时间函数的图像.

解　由题意离家距离 S 与时间 t 的函数关系为(图 1—4)

$$S(t) = \begin{cases} \frac{1}{15}t & 0 \leqslant t \leqslant 10 \\ -\frac{1}{15}t + \frac{4}{3} & 10 < t \leqslant 20 \\ \frac{1}{5}t - 4 & 20 < t \leqslant 30 \end{cases}$$

10. 火车站收取行李费的规定如下:当行李不超过 50 kg 时按基本运费计算,如从北京到某地每千克收 0.30 元,当超过 50 kg 时,超重部分按每千克 0.45 元收费. 试求某地的行李费 y(元)与重量 x(kg) 之间函数关系,并画出该函数的图形.

解　设重量为 x(kg),行李费 y(元),则由题意知:

$$y = \begin{cases} 0.3x. & 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ 0.3x + (x-50) \times 0.15 & x > 50 \end{cases},\text{即 } y = \begin{cases} 0.3x & 0 \leqslant x \leqslant 50 \\ 0.45x - 7.5 & x > 50 \end{cases}.$$

图形如图 1—5 所示.

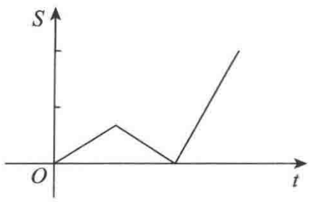

图 1—4

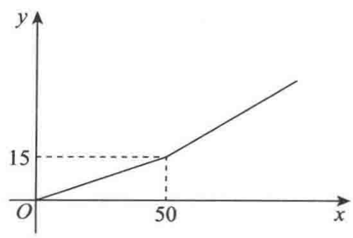

图 1—5

习题 1.2

1. 求下列函数的反函数：

(1) $y=\dfrac{1-x}{1+x}$； (2) $y=1+\ln(x+2)$；

(3) $y=2\sin 3x\left(-\dfrac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{6}\right)$； (4) $y=\begin{cases}x & x<1\\ x^2 & 1\leqslant x\leqslant 4\\ e^x & x>4\end{cases}$.

解 (1) 由 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$ 解得 $x=\dfrac{1-y}{1+y}$，即反函数为 $y=\dfrac{1-x}{1+x}$.

(2) 由 $y=1+\ln(x+2)$ 解得 $x=e^{y-1}-2$，即反函数为 $y=e^{x-1}-2$.

(3) 由 $y=2\sin 3x$ 解得 $x=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{y}{2}$，即反函数为 $y=\dfrac{1}{3}\arcsin\dfrac{x}{2}(-2\leqslant x\leqslant 2)$.

(4) 由 $y=\begin{cases}x & x<1\\ x^2 & 1\leqslant x\leqslant 4\\ e^x & x>4\end{cases}$ 解得 $x=\begin{cases}y & y<1\\ \sqrt{y} & 1\leqslant y\leqslant 16\\ \ln y & x>e^4\end{cases}$，即反函数为 $y=\begin{cases}x & x<1\\ \sqrt{x} & 1\leqslant x\leqslant 16\\ \ln x & x>e^4\end{cases}$.

2. 设 $f(x)=\dfrac{x}{1+x}$，$g(x)=\dfrac{1}{1-x}$，求复合函数 $f[g(x)]$，$g[f(x)]$ 的解析表达式与定义域.

解 因为 $f(x)=\dfrac{x}{x+1}$ 的定义域 $D_1:(-\infty,-1)\cup(-1,+\infty)$；

$g(x)=\dfrac{1}{1-x}$ 的定义域 $D_2:(-\infty,1)\cup(1,+\infty)$.

所以

$$f[g(x)]=\frac{\dfrac{1}{1-x}}{1+\dfrac{1}{1-x}}=\frac{1}{2-x},\quad D=\{x\,|\,x\neq 1,x\neq 2,x\in\mathbf{R}\}$$

$$g[f(x)]=\frac{1}{1-\dfrac{x}{1+x}}=1+x,\quad D=\{x\,|\,x\neq 1,x\in\mathbf{R}\}$$

3. 设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求下列函数的定义域：

(1) $f(e^x)$； (2) $f(\ln x)$； (3) $f(\arctan x)$.

解 (1) 令 $u=e^x$，则 $f(u)$ 的定义域为 $[0,1]$，即 $u=e^x\in[0,1]$，所以 $y=f(e^x)$ 的定义域 $(-\infty,0]$.

(2) 令 $u=\ln x$，则 $f(u)$ 的定义域为 $[0,1]$，即 $u=\ln x\in[0,1]$，所以 $y=f(\ln x)$ 的定义域 $[1,e]$.

(3) 令 $u=\arctan x$，则 $f(u)$ 的定义域为 $[0,1]$，即 $u=\arctan x\in[0,1]$，所以 $y=f(\arctan x)$ 的定义域 $[0,\tan 1]$.

4. 指出下列函数是由哪些函数复合而成的：

(1) $y=\sqrt[3]{\arctan x}$； (2) $y=(1+\ln x)^2$；

(3) $y=\mathrm{e}^{\tan 2x}$；　　(4) $y=\arcsin[\ln(2x+1)]$.

解 (1) $y=\sqrt[3]{u}, u=\arctan x$; (2) $y=u^2, u=1+\ln x$; (3) $y=\mathrm{e}^u, u=\tan v, v=2x$; (4) $y=\arcsin u, u=\ln v, v=2x+1$.

5.解答下列各题：

(1) 设 $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}$,求 $f(x)$；

(2) 设 $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x$,求 $f(\cos x)$.

解 (1) $f\left(x+\dfrac{1}{x}\right)=x^2+\dfrac{1}{x^2}=x^2+\dfrac{1}{x^2}+2-2=\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^2-2$,令 $x+\dfrac{1}{x}=u$,则 $f(u)=u^2-2$ 即 $f(x)=x^2-2$.

(2) $f\left(\sin\dfrac{x}{2}\right)=1+\cos x=1+\left(1-2\sin^2\dfrac{x}{2}\right)=2-2\sin^2\dfrac{x}{2}$,令 $\sin\dfrac{x}{2}=u$,则 $f(u)=2-2u^2=2(1-u^2)$ 即 $f(\cos x)=2(1-\cos^2 x)=2\sin^2 x$.

习题 1.3

1.作出下列函数的图形：

(1) $y=|\sin x|$；　　(2) $y=1-2\cos x$；

(3) $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}-1$；　　(4) $y=\ln(x-2)-1$.

解 (1) 函数 $y=|\sin x|$ 图形如图 1—6；

(2) 函数 $y=1-2\cos x$ 图形如图 1—7；

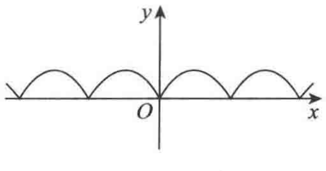

图 1—6

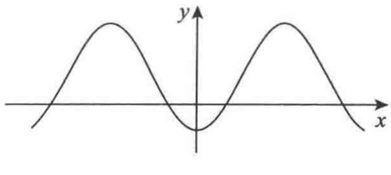

图 1—7

(3) 函数 $y=\dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-x}-1$ 图形如图 1—8；

(4) 函数 $y=\ln(x-2)-1$ 图形如图 1—9.

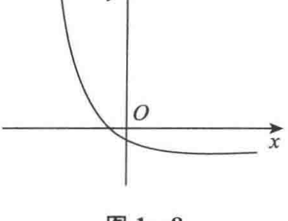

图 1—8

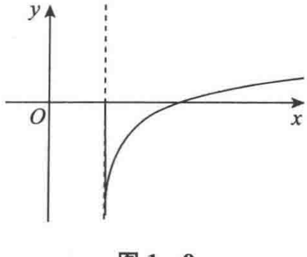

图 1—9

2. 指出下列函数哪些是初等函数，哪些不是初等函数：

(1) $y=\dfrac{x^2}{1+x+\sin\ln x}$；　　(2) $y=\sin\left(\dfrac{x}{\sin x}\right)+x^{\sin x}$；

(3) $y=\begin{cases}x-x^2 & x<0\\ x+x^2 & x\geqslant 0\end{cases}$；　　(4) $y=\begin{cases}1 & x\\ 0 & x\end{cases}$.

解　(1)、(2) 是初等函数，因为它们满足初等函数的定义；(3)、(4) 不是初等函数，因为它们不能用一个解析式表示，不满足初等函数的定义.

3. 由已知函数 $y=\ln x$ 的图形，作下列函数的图形：

(1) $y=\ln(-x)$；　　(2) $y=|\ln x|$；

(3) $y=\ln|x|$；　　(4) $y=\ln(1-x)$.

解　(1) $y=\ln(-x)$ 图形如图 1—10(实线)；

(2) $y=|\ln x|$ 图形如图 1—10(虚线)；

(3) $y=\ln|x|$ 图形如图 1—11(实线)；

(4) $y=\ln(1-x)$ 图形如图 1—11(虚线).

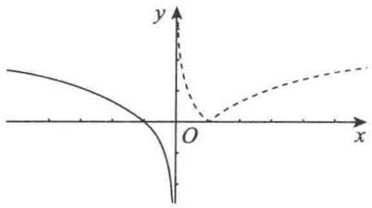

图 1—10

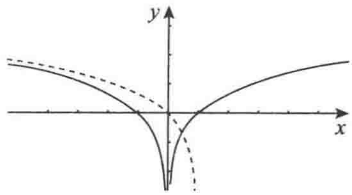

图 1—11

习题 1.4

1. 一种汽车出厂价 45 000 元，使用后它的价值按年降价率 $\frac{1}{3}$ 的标准贬值，试求此车的价值 y(元) 与使用时间 t(年) 的函数关系.

解　设汽车价值 y(元)，使用时间 t(年)，则 $y=45\,000\left(\dfrac{2}{3}\right)^t$.

2. 国际投寄信函的收费标准(1999 年 3 月 1 日) 如下表，试写出信函重量 x 与收费价钱 y 之间的函数关系.

重量	单价	重量	单价
20 克及 20 克以下	4.40 元	100 克以上 ～ 250 克	20.80 元
20 克以上 ～ 50 克	8.20 元	250 克以上 ～ 500 克	39.80 元
50 克以上 ～ 100 克	10.40 元		

解 设收费价格为 y,信函重量为 x,则它们的函数关系式为 $y=\begin{cases}4.40 & 0<x\leqslant 20\\ 8.20 & 20<x\leqslant 50\\ 10.40 & 50<x\leqslant 100\\ 20.80 & 100<x\leqslant 250\\ 39.80 & 250<x\leqslant 500\end{cases}$.

3. 某工厂生产某种产品,年产量为 x,每台售价 250 元,当年产量为 600 台以内时,可以全部售出,当年产量超过 600 台时,经广告宣传又可再多售出 200 台,每台平均广告费 20 元,生产再多,本年就售不出去了,建立本年的销售总收入 R 与年产量 x 的函数关系.

解 (1) 当 $0\leqslant x\leqslant 600$ 时,$R(x)=250x$;

(2) 当 $600<x\leqslant 800$ 时,$R(x)=250\times 600-(250-20)\cdot(x-600)=230x+12\,000$;

(3) 当 $x>800$ 时,$R(x)=250\times 600+230\times 200=196\,000$.

所以销售总收入 R 与年产量 x 的函数关系式为 $R(x)=\begin{cases}250 & 0\leqslant x\leqslant 600\\ 230x+1.2\times 10^4 & 600<x\leqslant 800\\ 1.96\times 10^5 & x>800\end{cases}$.

4. 若全世界上互联网的使用满足指数模型 $P(t)=P_0e^{kt}$,k 为指数增长率,如果互联网的通信量每 100 天翻一番,其指数增长率是多少?

解 已知互联网的通信量满足关系式 $P(t)=P_0e^{kt}$,由互联网的通信量每 100 天翻一番,即 $2P(0)=P(100)$,可得 $2P_0=P_0e^{100k}\Rightarrow 100k=\ln 2$,所以 $k=\frac{1}{100}\ln 2\approx 0.69\%$. 所以指数增长率为 0.69%.

5. 某快餐特许经营店遍及全国,据估计特许经营店的数目满足指数模型 $N(t)=N_0e^{0.1t}$,假设初始时($t=0$)特许经营店的数目是 50,问 20 年中将会有多少特许经营店?经过多长时间特许经营店扩充到初始特许经营店的两倍?

解 已知指数模型 $N(t)=N_0e^{0.1t}$,$t=0$,$N_0=50$.

(1) $t=20$ 时,$N(20)=50\times e^{0.1\times 20}=50e^2\approx 369$,所以经过 20 年后会有约 369 个特许店.

(2) 当 $N=2N_0$ 时,$2N_0=N_0e^{0.1t}\Rightarrow \ln 2=0.1t\Rightarrow t\approx 6.9$,所以经过 6.9 年的时间经营店扩充到初始的两倍.

6. (广告的效应) 某公司在一个城市宣传一种新产品,他们在电视上作产品广告,发现广告播出 t 次后购买该产品的人所占百分比满足函数 $P(t)=\frac{1}{1+49e^{-0.13t}}$,求广告播出 20 次和 50 次后购买该产品的人所占的百分比.

解 (1) 当 $t=20$ 时,$P(20)=\frac{1}{1+49e^{-0.13\times 20}}=21.55\%$.

(2) 当 $t=50$ 时,$P(50)=\frac{1}{1+49e^{-0.13\times 50}}=93.1\%$.

7. (信息的扩散) 某制药公司投入巨资测试一种新药,该药通过审批后,完全被医生接受并把它用于临床治疗仍需要一段时间,假设 t 个月后使用该药治疗的医生所占的百分比为 $P(t)=1-e^{-0.4t}$,试求 2 个月,12 个月后使用该药的医生所占的百分比.

解 (1) 当 $t=2$ 时,$P(2)=1-e^{-0.4\times 2}=1-\frac{1}{e^{0.8}}\approx 55.1\%$.

(2) 当 $t=12$ 时,$P(12)=1-\mathrm{e}^{-0.4\times12}=1-\frac{1}{\mathrm{e}^{4.8}}\approx 99.2\%$.

8. 已知某商品的需求函数 $Q(p)=\frac{100}{3}-\frac{2}{3}p$,供给函数为 $S(p)=-10+5p$,求该商品的均衡价格.

解 已知 $Q(p)=\frac{100}{3}-\frac{2}{3}p$,$S(p)=-10+5p$.

均衡价格满足方程 $Q(p)=S(p)$,即 $\frac{100}{3}-\frac{2}{3}p=-10+5p$,解得 $p=\frac{130}{17}$,故该商品的均衡价格为 $\frac{130}{17}$.

9. 设某商品的需求函数与供给函数分别为 $Q(p)=\frac{5\ 600}{p}$,$S(p)=p-10$.

(1) 求出均衡价格,并求此时的供给量与需求量;

(2) 在同一坐标中画出供给与需求曲线;

(3) 何时供给曲线过 p 轴,这一点的经济意义是什么?

解 已知 $Q(p)=\frac{5\ 600}{p}$,$S(p)=p-10$,令 $Q(p)=S(p)\Rightarrow\frac{5\ 600}{p}=p-10$,解得 $p=5\pm75$($p=-70$ 舍去). 所以

(1) 均衡价格 $\bar{P}=80$,供给量 $Q(\bar{P})=S(\bar{P})=70$;

(2) 供给与需求曲线图略.

(3) 当 $p=10$ 时,供给曲线过 p 轴,其经济意义是价格低于 10 时无人愿供货.

10. 某厂生产一种元器件,设计能力为日产 120 件. 每日的固定成本为 150 元,每件的平均可变成本为 10 元.

(1) 试求该厂此元器件的日总成本函数及平均成本函数;

(2) 若每件售价 15 元,试写出总收入函数;

(3) 试写出利润函数并求无盈亏点.

解 设该厂元器件的数量为 q 件,则

(1) 总成本 $C(q)=C_0+C_1(q)=150+10q$;平均成本 $\bar{C}(q)=\frac{150+10q}{q}$;

(2) 当 $P=15$ 元,收益函数为 $R(q)=15q$;

(3) 利润函数 $L(q)=R(q)-C(q)=5q-150$,令 $R(q)=C(q)$,即 $150+10q=15q$,解得 $q=30$,即当该厂生产元器件 30 件时无盈亏点.

11. 某厂生产的手掌游戏机每台可卖 110 元,固定成本为 7 500 元,可变成本为每台 60 元.

(1) 要卖多少台手掌机,厂家才可保本?

(2) 卖掉 100 台的话,厂家赢利或亏损了多少?

(3) 要获得 1 250 元利润,需要卖多少台?

解 设生产游戏机共 q 台,则成本为 $C(q)=7\ 500+60q$;收益为 $R(q)=110q$;利润为 $L(q)=110q-7\ 500-60q=50q-7\ 500$.

(1) 令 $R(q)=C(q)$,解得 $q=150$,即该厂要卖掉 150 台游戏机即可保本.