



普通高等教育“十二五”规划教材
工 科 数 学 精 品 丛 书

数学建模

常用方法与实验

宋来忠 覃太贵 主编

普通高等教育“十二五”规划教材

工科数学精品丛书

数学建模常用方法与实验

宋来忠 覃太贵 主编



科学出版社

北京

内 容 简 介

本书为高等学校数学建模与实验课程教材,集应用数学知识、数学建模和数学实验为一体,共17章.第一部分为MATLAB基础(第1~5章),包括MATLAB入门、程序设计、图形处理、数值计算、符号计算基础;第二部分为常用数学建模方法与实验(第6~17章),包括MATLAB数字图像处理、微分方程模型求解、插值与拟合建模及实验、图论方法建模与实验、随机方法建模与实验、线性规划模型与实验、非线性规划模型与实验、整数规划模型与实验、动态规划模型与实验、模拟退火算法与实验、穷举算法与实验和遗传算法与实验.各章内容相对独立,便于不同学时、不同层次的院校和专业选修不同的内容.

本书可作为理工类高校的数学建模与实验课的教材,也可作为相关教研工作者的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

数学建模常用方法与实验/宋来忠,覃太贵主编. —北京:科学出版社, 2015.5

普通高等教育“十二五”规划教材. 工科数学精品丛书

ISBN 978-7-03-044278-9

I. ①数… II. ①宋… ②覃… III. ①数学模型—高等学校—教材 IV. ①O141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第098631号

责任编辑:高 嵘 张茂发/责任校对:张怡君

责任印制:高 嵘/封面设计:苏 波

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

武汉市科利德印务有限公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年6月第 一 版 开本:787×1092 1/16

2015年6月第一次印刷 印张:21

字数:474 000

定价:48.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前 言

近几十年来,由于计算机技术的飞速发展和计算机应用的日益广泛,使得数学的应用在广度及深度上都达到了前所未有的程度.数学不仅广泛地应用于自然科学与工程技术的各个领域,而且在经济、能源、交通、军事、生态、环境等新领域上也发挥着越来越重要的作用.高新技术本质上是数学技术正在被人们逐步达成共识.现代数学已不再仅仅是其他科学的基础,还发挥第一生产力的作用.面对数学地位的这种巨大变化,对未来的科技工作者和工程技术人员的数学素养必然会提出更高的要求.他们不仅需要传统意义上的逻辑思维能力、推理演算能力,更要具备对所涉及的专业问题进行定量分析,建立数学模型,并利用先进的计算工具对数学软件数值求解的能力.

因此,在大学数学教育中加强培养学生综合应用数学知识分析和解决实际问题的能力,让学生掌握一些先进的数学软件,熟练地应用计算机解决各类应用问题,也成为当前高等学校教学改革面临的重要课题,并构成数学素质教育的重要方面.

显然,以往传统数学课程不能满足这种要求,近年来很多高校都在探索优化课程内容与课程体系以弥补旧课程体系的不足.很多学校相继开设了数学建模课,在实际问题和数学理论之间架起了桥梁,发挥了很大的作用,已被证明是一种成功的尝试.但是,数学建模的内容如果不强调付诸实践,仍可能只是纸上谈兵,从而变成继 n 门数学课之后的第 $n+1$ 门数学课.学生若不能亲自动手分析解决几个实际问题案例,对建模的整个过程不会有完整的认识,从而使我们培养学生应用数学知识、利用计算机解决各种应用问题能力的目标不能达到.

为此,经过十多年的不断探索,我们在开设数学建模课时,把其放在一个数学软件(MATLAB)平台上进行,着重培养学生数学建模的能力、熟练使用计算机、使用数学软件的能力、创新意识和探索精神.在课程内容和教学方式上区别于其他传统课程,强调建立数学模型和求解数学模型并重,力求做到以下三个方面.

以问题为载体:以一个实际问题为背景,构成一个建模及其实验的内容,通过对实际问题的解决,培养学生运用数学知识和计算机以及数学软件解决实际问题的意识和能力.

以软件为工具:数学模型建立之后,必须依托计算机求解.有效地使用各种软件特别是数学软件,以避免大量低水平的重复劳动,从而提高效率.

以学生为主体:通过学生自己动手去体验、去探索,强调实践性.

体现上述理念的课程不仅受到学生的欢迎,也在学生参加全国大学生数学建模竞赛获得的优异的成绩中得到了肯定.

众所周知,数学建模活动,一般会用到如下 10 类算法.

Monte Carlo 算法.该算法又称随机性模拟算法,是通过计算机仿真来解决问题的算法,同时可以通过模拟来检验自己模型的正确性,是数学建模时常用的方法.

数据拟合、参数估计、插值等数据处理算法.数学建模中通常会遇到大量的数据需

要处理, 而处理数据的关键就在于这些算法, 通常使用 MATLAB 作为工具.

线性规划、整数规划、多元规划、二次规划等规划类问题. 建模中的大多数问题属于最优化问题, 很多时候这些问题可以用数学规划算法来描述, 通常使用 LINDO, LINGO 软件实现.

图论算法. 这类算法可以分为很多种, 包括最短路、网络流、二分图等算法, 涉及图论的问题可以用这些方法解决.

动态规划、回溯搜索、分治算法、分支定界等计算机算法. 这些算法是算法设计中比较常用的方法, 很多场合可以用到.

最优化理论的三大非经典算法: 模拟退火法、神经网络、遗传算法. 这些问题是用来解决一些较困难的最优化问题的算法, 对于有些问题的解决非常有帮助, 但是算法的实现比较困难, 所以本书中侧重于编程实现.

网格算法和穷举法. 网格算法和穷举法都是暴力搜索最优点的算法, 在很多问题中都有应用.

一些连续离散化方法. 很多问题都是从实际中得来的, 数据可以是连续的, 但计算机只认离散的数据, 因此将其离散化后进行差分代替微分、求和代替积分等思想是非常重要的.

数值分析算法. 如果采用高级语言进行编程, 有些数值分析中常用的算法如方程组求解、矩阵运算、函数积分等算法就需要额外编写库函数进行调用.

图像处理算法. 问题中有一类问题与图形有关, 即使与图形无关, 论文中也应该要有图片展示. 这些图形如何展示以及如何处理就是需要解决的问题, 通常可使用 MATLAB 进行处理.

本书的内容围绕上述算法展开, 本书的作者主要是指导过学生参加全国大学生数学建模竞赛的老师, 老师在各自讲义的基础上, 整理编写了本书, 在内容的选取和编排上渗透了作者的经验积累与教法创新. 所有内容都在教学过程中使用过, 效果良好, 从三峡大学近 10 年本科生、研究生在全国大学生数学建模竞赛中取得的成绩得到了验证.

本书由宋来忠、覃太贵主编, 刘红美、于林、俞辉、王卫华、黄公瑾、张小华、马德宜参加编写. 由宋来忠统稿、定稿. 各章节之间相对独立, 有利于不同层次、不同课时讲授时取舍.

本书在编写和出版过程中, 参考了许多同行专家的相关文献, 同时还得到了科学出版社和三峡大学理学院、教务处等有关部门的领导和专家的支持, 在此表示感谢.

限于编者的水平, 不足之处在所难免, 殷切期望读者批评指正.

宋来忠

2014 年 10 月 12 日

目 录

第 1 章 MATLAB 入门	1
1.1 变量与函数	1
1.1.1 变量与数据	1
1.1.2 数学运算符及标点符号	3
1.1.3 数学函数	4
1.1.4 M 文件	5
1.2 数组	6
1.2.1 创建简单的数组	6
1.2.2 数组元素的访问	7
1.2.3 数组的方向	7
1.2.4 数组运算	8
1.3 矩阵	9
1.3.1 矩阵的建立	9
1.3.2 特殊矩阵	10
1.3.3 矩阵中元素的操作	10
1.3.4 矩阵的运算	12
1.4 关系与逻辑运算	13
1.4.1 关系操作符	13
1.4.2 逻辑运算符	14
1.5 多维数组	14
1.5.1 数组创建	14
1.5.2 用 reshape 和 repmat 生成 n 维数组	15
1.5.3 数组运算和处理	16
1.5.4 数组大小	16
1.6* 在线帮助和文件管理	16
1.6.1 在线帮助	16
1.6.2 文件管理	17
1.6.3 MATLAB 工作目录	17
1.7 习题	18
第 2 章 MATLAB 程序设计	19
2.1 顺序结构语句	19
2.1.1 表达式语句	19

2.1.2 赋值语句	19
2.1.3 空语句	20
2.1.4 输入语句	20
2.1.5 输出语句	21
2.1.6 变量值的保存与恢复	22
2.2 选择结构	24
2.2.1 if 语句	24
2.2.2 switch 语句	25
2.2.3 try 语句	26
2.2.4 选择语句的嵌套	26
2.3 循环结构语句	27
2.3.1 for 语句	27
2.3.2 while 语句	27
2.3.3 循环嵌套	28
2.3.4 break 语句	28
2.4 文件读写函数	29
2.5 一个可运行 MATLAB 命令的函数	30
2.6 局部工作空间和基本工作空间	31
2.7 习题	31
第3章 MATLAB 图形处理	33
3.1 二维曲线绘图的基本操作	33
3.1.1 plot 命令的调用	33
3.1.2 符号函数(显函数、隐函数和参数方程)画图	35
3.1.3 plotyy 函数(特殊坐标系下的二维图形)	38
3.2 三维绘图的基本操作	39
3.2.1 plot3 命令的调用	39
3.2.2 网格图与曲面图	40
3.3 符号函数作图	47
3.3.1 符号函数的二维图	47
3.3.2 符号函数的三维图	49
3.3.3 符号函数作图的其他命令	50
3.4 图形处理	50
3.4.1 在图形上加格栅、图例和标注	50
3.4.2 定制坐标	51
3.4.3 图形保持	52
3.4.4 分割窗口	53
3.4.5 缩放图形	54

3.4.6	改变视角	55
3.4.7	动画	55
3.5	特殊的二维图形函数	55
3.5.1	极坐标图	55
3.5.2	散点图	56
3.5.3	平面等值线图	56
3.6	特殊的三维图形函数	57
3.6.1	空间等值线图	57
3.6.2	三维散点图	58
3.7	习题	58
第4章	MATLAB 数值计算	60
4.1	基本数学函数	60
4.1.1	三角函数与双曲函数	60
4.1.2	其他常用函数	63
4.2	多项式	69
4.2.1	多项式的表达与创建	69
4.2.2	多项式的乘除运算	72
4.2.3	其他常用的多项式运算命令	73
4.3	线性代数	74
4.3.1	方阵系统	75
4.3.2	超定系统	76
4.3.3	欠定系统	77
4.3.4	逆矩阵及行列式	78
4.3.5	矩阵分解	79
4.3.6	特征值与特征矢量	81
4.3.7	奇异值分解	82
4.4	数据分析	83
4.4.1	基本统计命令	83
4.4.2	协方差阵和相关阵	83
4.5	微分与梯度	84
4.5.1	函数: diff	84
4.5.2	函数: del2	84
4.5.3	函数: gradient	84
4.5.4	函数: meshgrid	85
4.6	数值积分	87
4.6.1	一元函数的数值积分	87
4.6.2	二元函数重积分的数值计算	87

4.6.3 任意区域上的二重积分的数值计算	88
4.7 习题	89
第5章 符号计算基础	90
5.1 符号对象与符号表达	90
5.1.1 符号对象的创建和衍生	90
5.1.2 符号计算中的算符	92
5.1.3 符号计算中的函数指令	92
5.1.4 符号对象的识别	93
5.2 符号数字及表达式的操作	94
5.2.1 数值数字与符号数字之间的转换	94
5.2.2 符号数字的任意精度计算	94
5.2.3 符号表达式的基本操作	95
5.2.4 表达式中的置换操作	95
5.3 符号微积分	96
5.3.1 极限和导数的符号计算	96
5.3.2 序列/级数的符号求和	99
5.4 符号积分	99
5.5 符号变换和符号卷积	101
5.5.1 Fourier 变换及其反变换	101
5.5.2 Laplace 变换及其反变换	103
5.5.3 Z 变换及其反变换	104
5.5.4 符号卷积	105
5.6 符号矩阵分析和代数方程解	106
5.6.1 符号矩阵分析	106
5.6.2 线性方程组的符号解	108
5.6.3 一般代数方程组的解	108
5.6.4 求解微分方程(组)的 MATLAB 命令	109
5.7 利用 MAPLE 的深层符号计算资源	110
5.8 符号计算结果的可视化	110
5.8.1 直接可视化符号表达式	111
5.8.2 符号计算结果的数值化绘图	116
5.9 习题	117
第6章 MATLAB 数字图像处理方法	119
6.1 图像的读取	119
6.2 灰度直方图及直方图均衡化	120
6.3 图像的代数运算	121
6.4 图像滤波处理	123

6.5	傅里叶变换	124
6.6	图像压缩	125
6.7	图像对象的面积计算	126
6.8	删除小面积对象	126
6.9	图像的边缘检测	127
6.10	三维重建	129
6.11	习题	131
第 7 章	微分方程模型求解	132
7.1	微分方程的符号解法	132
7.2	常微分方程数值解	133
7.2.1	求解具体 ODE 的基本过程	134
7.2.2	求解器 Solver 与方程组的关系	135
7.2.3	不同求解器 Solver 的特点	135
7.2.4	参数设置	135
7.3	偏微分方程的数值解	137
7.4	asempde 求椭圆型方程	141
7.5	hyperbolic 解双曲型偏微分方程	142
7.6	Parabolic 解抛物型偏微分方程	144
7.7	特征问题	146
7.8	举例：二维反应扩散方程组数值解法(有限差分)	147
7.9	习题	153
第 8 章	插值、拟合建模与实验	154
8.1	插值	154
8.2	拟合	162
8.2.1	曲线拟合问题最常用的解法	162
8.2.2	用 MATLAB 作线性最小二乘拟合	164
8.2.3	用 MATLAB 作非线性最小二乘拟合	165
8.3	习题	167
第 9 章	图论方法建模与实验	169
9.1	图的基本概念	169
9.2	最小生成树	172
9.3	最短路问题	175
9.4	人员分配问题	176
9.5	最优分配问题	178
9.6	最大流问题	180
9.7	破圈法、Kruskal 算法、Prim 算法及其求解程序	184
9.7.1	破圈法	184

9.7.2	Kruskal 算法(避圈法)	185
9.7.3	Prim 算法	186
9.7.4	编程实现	186
9.7.5	Kruskal 算法的 MATLAB 通用程序	188
9.7.6	Dijkstra 算法的 MATLAB 通用程序	189
9.8	习题	191
第 10 章	随机方法建模与实验	192
10.1	概率空间	192
10.1.1	随机现象与随机试验	192
10.1.2	样本空间	192
10.1.3	概率空间	193
10.1.4	几何概率模型的实例	193
10.2	统计结构	195
10.2.1	对统计总体的认识	195
10.2.2	统计结构(统计模型)	195
10.3	Poisson 过程与排队论模型	196
10.3.1	排队论的几个基本概念	197
10.3.2	Poisson 过程: 一种常用的输入过程	197
10.3.3	几类常见的排队论模型	199
10.4	因素主次的判别与模型优化	202
10.4.1	逐步剔除法的基本原理	202
10.4.2	剔除法优化回归模型的实例	203
10.5	MATLAB 数理统计工具箱应用简介	206
10.5.1	概述	206
10.5.2	应用举例	208
10.6	习题	213
第 11 章	线性规划模型与实验	216
11.1	线性规划模型的标准形式	216
11.1.1	线性规划问题的特点	216
11.1.2	线性规划问题的数学模型	216
11.1.3	标准形式	216
11.1.4	非标准形式化为标准形式	217
11.2	解的基本概念	217
11.3	用数学软件包求解线性规划问题	218
11.3.1	用 MATLAB 软件中的命令解线性规划问题	218
11.3.2	用 LINDO, LINGO 软件包解规划问题	221
11.4	典型算例	223

11.4.1	问题	223
11.4.2	求解	224
11.5	单纯形法简介	225
11.6	习题	229
第 12 章	非线性规划模型与实验	230
12.1	非线性规划的一般形式	230
12.2	求解算法	231
12.2.1	求解非线性规划的基本迭代格式	231
12.2.2	最优解的必要条件	232
12.2.3	逐步二次规划法	232
12.3	用 MATLAB 优化工具箱解带约束的非线性规划	234
12.3.1	二次规划	234
12.3.2	一般非线性规划解法	235
12.4	MATLAB 优化工具箱简介	241
12.4.1	MATLAB 求解优化问题的主要函数	241
12.4.2	优化函数的输入变量	241
12.4.3	函数的输出变量	242
12.4.4	控制参数 options 的设置	242
12.4.5	模型输入时需要注意的问题	242
12.4.6	运用目标达到法求解多目标规划	243
12.5	习题	246
第 13 章	整数规划模型与实验	247
13.1	整数规划的一般形式	247
13.2	求解算法	247
13.3	整数线性规划分支定界法的 MATLAB 程序	250
13.4	0-1 型整数线性规划	254
13.4.1	0-1 型整数线性规划标准形式	254
13.4.2	求解 0-1 线性规划的隐枚举法	255
13.4.3	求解 0-1 型整数线性规划的 MATLAB 程序	255
13.5	习题	258
第 14 章	动态规划模型与实验	260
14.1	概述	260
14.1.1	动态规划的发展及研究内容	260
14.1.2	决策过程的分类	261
14.2	动态规划的基本理论	261
14.2.1	基本思想与逆序解法	261
14.2.2	动态规划的基本概念、基本方程	263

14.3	逆序解法的计算框图	265
14.4	动态规划与静态规划的关系	267
14.5	动态规划逆序算法的 MATLAB 程序	268
14.5.1	逆序算法的基本方程	268
14.5.2	动态规划逆序算法的 MATLAB 程序	268
14.6	典型算例	270
14.7	习题	275
第 15 章	模拟退火算法与实验	278
15.1	固体退火过程与 Metropolis 采样准则	278
15.2	模拟退火算法	279
15.3	算法的性能与关键技术	284
15.4	算法的改进策略	287
15.4.1	有记忆的模拟退火算法	287
15.4.2	增加局部搜索过程	287
15.4.3	带升温过程的模拟退火算法	288
15.5	习题	289
第 16 章	穷举算法与实验	290
16.1	三角形数问题	290
16.2	背包问题	292
16.3	边长为整数、周长为定数的三角形个数	293
16.4	一元三次方程的根	294
16.5	学校名次	294
16.6	阿姆斯特朗数	296
16.7	邮票面值	297
16.8	方格填数	298
16.9	4 皇后问题	299
16.10	巧妙填数	300
16.11	数塔问题	301
16.12	习题	303
第 17 章	遗传算法与实验	304
17.1	算法介绍	304
17.1.1	遗传算法的基本原理	304
17.1.2	遗传算法的实际应用	306
17.1.3	遗传算法的收敛性	309
17.2	相关函数(命令)及简介	311
17.3	实验	311
17.4	习题	312

17.5 附程序	313
17.5.1 主程序 Genetic1.m	313
17.5.2 子程序 PopulationInitialize.m	314
17.5.3 子程序 Fitness.m	315
17.5.4 子程序 Translate.m	315
17.5.5 子程序 Transfer.m	315
17.5.6 子程序 FitnessF.m	315
17.5.7 子程序 Probability.m	316
17.5.8 子程序 Select.m	316
17.5.9 子程序 Crossing.m	316
17.5.10 子程序 Mutation.m	317
17.5.11 子程序 Elitist.m	317
参考文献	319

第 1 章 MATLAB 入门

MATLAB 作为线性系统的一种分析和仿真工具，是理工科学生应该掌握的技术工具，它作为一种编程语言和可视化工具，可解决工程、科学计算和数学学科中许多问题。MATLAB 建立在向量、数组和矩阵的基础上，使用方便，人机界面直观，输出结果可视化。矩阵是 MATLAB 的核心。

1.1 变量与函数

1.1.1 变量与数据

(1) MATLAB 最常用的变量有数值数组 (double array) 和字符串 (char array) 两类。所有数值变量以双精度 (double) 方式存储，不区分整数、实数、复数等，变量类型和数组大小也无须定义。

例 1.1 变量类型。

```
>>a=2+3i
a=
    2.0000+3.0000i      %复数.
>>a1='This is a string'
a1=
This is a string      %字符串.
>>A=[1 2; 3 4]
A=
     1     2
     3     4      %二维数组，即矩阵.
```

(2) MATLAB 中变量的命名规则如下：

- (a) 变量名必须是不含空格的单个词；
- (b) 变量名区分大小写；
- (c) 变量名最多不超过 31 个字符，第 31 个字符之后的字符将被忽略；
- (d) 变量名必须以字母开头，之后可以是任意字母、数字或下划线，变量名中不允许使用标点符号。

(3) 特殊常量和变量见表 1-1。

表 1-1 特殊常量和变量表

特殊变量	取值
ans	用于结果的缺省变量名
pi	圆周率
eps	计算机的最小数，当和 1 相加就产生一个比 1 大的数
flops	浮点运算数

续表

特殊变量	取值
inf	无穷大, 如 1/0
NaN	不定量, 如 0/0
i, j	$i=j=\sqrt{-1}$
nargin	所用函数的输入变量数目
nargout	所用函数的输出变量数目
realmin	最小可用正实数
realmax	最大可用正实数

(4) MATLAB 命令窗口中用户变量名可用 who 或 whos 查询。

例 1.2 用户变量名查询。

```
>>who
```

```
Your variables are:
```

```
A  a  a1  ans  c
```

```
>>whos
```

```
Name      Size      Bytes Class
A          2x2      32  double array
A          1x1      16  double array(complex)
a1         1x16      32  char array
ans        1x1      138  sym object
c          1x1       8  double array
```

```
Grand total is 30 elements using 226 bytes
```

以上信息也可从工作间浏览器 (Workspace Browser) 观察到。变量的值可以通过键入变量名得到。

例 1.3 变量值查询。

```
>>a          %显示 a 的值。
```

```
a=
```

```
2.0000+3.0000i
```

有些变量不再使用时, 可用 clear 来清除。

例 1.4 清除变量。

```
>>clear a A          %清除 a 和 A。
```

```
>>a
```

```
??? Undefined function or variable 'a'. %说明 a 已清除。
```

```
>>a1
```

```
a1=
```

```
This is a string      %a1 未清除。
```

```
>>clear              %清除工作间所有变量(慎用! )。
```

注意: clear 与菜单 Edit\Clear session 的区别。后者作用是将稿纸(窗口显示)擦干净。

(5) MATLAB 缺省的数据显示格式: 当结果为整数, 就作为整数显示; 当结果为实数, 以小数点后四位的精度表示。若结果的有效数字不在这一范围, 以科学记数法显示 (如 $1e-6$ 表示 10^{-6})。数据显示格式可通过命令 format, vpa 等改变。显示格式的改变不会影

响数据的实际值，所以不会影响计算精度。

例 1.5 数据的显示格式。

```
>>c=pi
c=
3.1416
>>format rational; c
c=
355/113 %最接近的有理数之一.
>>format long; c
c=
3.14159265358979 %小数点后 14 位.
>>format; c
c=
3.1416 %恢复.
>>vpa(c, 6) %小数点后 6 位.
ans=
3.14159
```

MATLAB 还允许使用 `fprintf` 格式化输出，其用法与 C 语言基本一致。

```
>>fprintf('%20.6f', c)
3.141593
```

1.1.2 数学运算符号及标点符号

(1) MATLAB 的每条命令后，若为逗号或无标点符号，则显示命令的结果；若命令后为分号，则不显示结果。

(2) “%” 后面所有文字为注释。

(3) “...” 表示续行。

(4) 数学运算符号及标点符号见表 1-2。

表 1-2 数学运算符号及标点符号

+	加法运算，适用于两个数或两个同阶矩阵相加
-	减法运算
*	乘法运算
.	点乘运算
/	除法运算
./	点除运算
^	乘幂运算
.^	点乘幂运算
\	左除

例 1.6 数组的运算。

```
>>a=[3 5 7 -3 5 3 2];
```