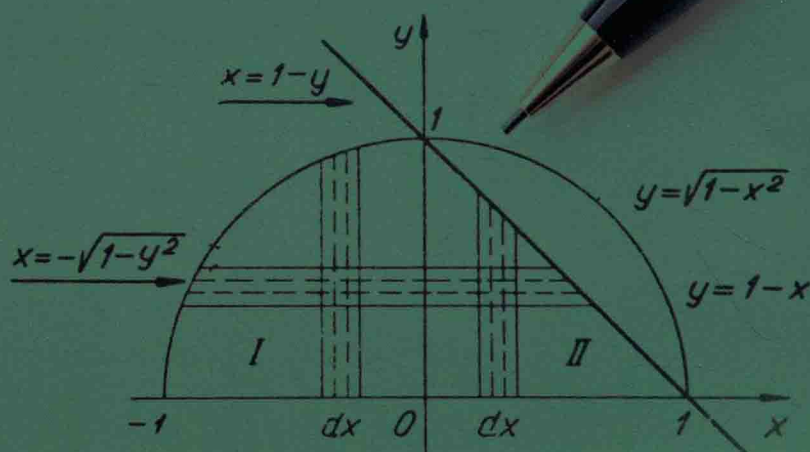


高等数学同步作业与训练

主 编 韩慧蓉 岳忠玉

副主编 张惠玲 周 千 李文胜

$$= \int_0^{\frac{a\sqrt{3}}{2}} dy \int_{\frac{a}{2}}^a f(x, y) dx + \int_{\frac{a\sqrt{3}}{2}}^a dy \int_{a-\sqrt{3}y}^a f(x, y) dx$$



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

高等数学同步作业与训练

主 编 韩慧蓉 岳忠玉
副主编 张惠玲 周 千 李文胜



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是与同济大学数学系编写的《高等数学》(第六版)(上、下册)相配套的同步习题教学辅导书,全书结合教材按章同步编写,共分 12 章. 针对普通应用型本科院校本科生的特点,精选每一章节的习题,既能保证对知识点的全面覆盖,又考虑了各种题型的广泛性与代表性. 每章按照每小节一套习题、每章结束有一套自测题的形式进行编写,同时,书的最后附有期中考试和期末考试模拟试题以及 2000—2014 年考研真题分类汇总,通过对这些题目的分析解答,读者能更好地掌握知识点和提高综合解题能力.

本书可作为普通应用型本科院校、大学独立院校本科生学习高等数学的同步习题教学辅导书,也可供从事高等数学教学的教师布置作业和考试命题使用,还可供报考硕士研究生或自学高等数学的广大读者参考.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学同步作业与训练 / 韩慧蓉, 岳忠玉主编.

— 上海: 同济大学出版社, 2015. 8

ISBN 978-7-5608-5912-5

I. ①高… II. ①韩… ②岳… III. ①高等数学—高等学校—习题集 IV. ①O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 164009 号

高等数学同步作业与训练

主编 韩慧蓉 岳忠玉

责任编辑 张崇豪 责任校对 徐春莲 封面设计 陈益平

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 同济大学印刷厂
开 本 787 mm×1 092 mm 1/16
印 张 17
字 数 424 000
印 数 1—4 100
版 次 2015 年 8 月第 1 版 2015 年 8 月第 1 次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-5912-5

定 价 38.00 元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

前 言

本书是参照教育部高等院校“工科类数学基础课程教学基本要求”以及西安航空学院教学的实际情况,结合教师多年的教学经验编写而成的.在教学实践中,我们深切体会到一本好的习题册对于加强学生对概念的理解、巩固所学知识、熟练掌握基本的计算方法、提高分析问题和解决问题的能力是非常重要的,同时,对于提高教学质量也起着不可忽视的作用.本书就是根据这个目的进行编写的.

本书的编写体例安排与同济大学数学系编写的《高等数学》(第六版)(上、下册)是一致的,所以配合教材使用极为方便,习题难度总体低于教材习题的难度.适用于普通应用型本科院校、大学独立院校等,教师可将本章节习题作为作业布置,每章自测题由学生独立完成.同时书中还配有考研训练题和部分真题,学生可以作为考研资料使用.本书还附有期中测试题和期末测试题.

参加本书编写的教师均来自高等数学教学第一线,有着丰富的教学实践经验.全书分12章,由张政(第1章、第3章),周千(第2章),赵芳玲(第4章),赵乃虎(第6章),李文胜(第7章、第12章),张惠玲(第8章、第9章),朱熙(第10章)参与编写,第5章、第11章和其余部分由韩慧蓉编写,全书编写大纲及框架结构安排由韩慧蓉承担,最后的统稿、定稿由韩慧蓉承担.另外,张惠玲、周千、李文胜也承担了部分考研训练题的编写、统稿和校对工作.岳忠玉承担了本书的审稿工作,提出了许多有价值的意见.

在本书的编写过程中,参阅了其他相关同类教材、文献资料,在此对这些教材、文献资料的编著者表示诚挚的谢意!

由于编者的教学经验和水平有限,加之时间仓促,错误和疏漏之处在所难免,恳请使用者批评指正.

编者

2015年5月

目 录

前言

第 1 章 函数与极限	1
1.1 映射与函数	1
1.2 数列的极限	2
1.3 函数的极限	3
1.4 无穷小与无穷大	5
1.5 极限运算法则	6
1.6 极限存在准则 两个重要极限	7
1.7 无穷小的比较	8
1.8 函数的连续性与间断点	9
1.9 连续函数的运算与初等函数的连续性	10
1.10 闭区间上连续函数的性质	11
自测题	12
第 2 章 导数与微分	14
2.1 导数概念	14
2.2 函数的求导法则	16
2.3 高阶导数	18
2.4 隐函数及由参数方程所确定的函数的导数与相关变化率	19
2.5 函数的微分	21
自测题	22
第 3 章 微分中值定理与导数的应用	25
3.1 微分中值定理	25
3.2 洛必达法则	26
3.3 泰勒公式	27
3.4 函数的单调性与曲线的凹凸性	28

3.5 函数的极值与最大值最小值·····	30
3.6-3.7 函数图形的描绘与曲率·····	31
自测题·····	32
第4章 不定积分 ·····	34
4.1 不定积分的概念与性质·····	34
4.2 换元积分法·····	36
4.3 分部积分法·····	39
4.4 有理函数的积分·····	41
自测题·····	42
第5章 定积分 ·····	45
5.1 定积分的概念与性质·····	45
5.2 微积分基本公式·····	46
5.3 定积分的换元积分法与分部积分法·····	48
5.4 反常积分·····	50
自测题·····	51
第6章 定积分的应用 ·····	53
6.1 定积分的元素法与定积分在几何学中的应用·····	53
6.2 定积分在物理学上的应用·····	55
自测题·····	56
第7章 微分方程 ·····	59
7.1 微分方程的基本概念·····	59
7.2 可分离变量的微分方程·····	60
7.3 齐次方程·····	62
7.4 一阶线性微分方程·····	63
7.5 可降阶的高阶微分方程·····	65
7.6 高阶线性微分方程·····	66
7.7 常系数齐次线性微分方程·····	67
7.8 常系数非齐次线性微分方程·····	68
自测题·····	70

第 8 章 空间解析几何与向量代数	72
8.1 向量及其线性运算	72
8.2 数量积与向量积	73
8.3 曲面及其方程	74
8.4 空间曲线及其方程	76
8.5 平面及其方程	77
8.6 空间直线及其方程	78
自测题	80
第 9 章 多元函数微分学及其应用	83
9.1 多元函数的基本概念	83
9.2 偏导数	85
9.3 全微分	87
9.4 多元复合函数的求导法则	88
9.5 隐函数的求导公式	90
9.6 多元函数微分学的几何应用	91
9.7 方向导数与梯度	92
9.8 多元函数的极值及其求法	93
自测题	94
第 10 章 重积分	96
10.1 重积分的概念与性质	96
10.2 二重积分的计算法	97
10.3 三重积分	99
10.4 重积分的应用	101
自测题	102
第 11 章 曲线积分与曲面积分	104
11.1 对弧长的曲线积分	104
11.2 对坐标的曲线积分	106
11.3 格林公式及其应用	108
11.4 对面积的曲面积分	111
11.5 对坐标的曲面积分	112
11.6 高斯公式与斯托克斯公式	114
自测题	116

第 12 章 无穷级数	120
12.1 常数项级数的概念及性质	120
12.2 常数项级数的审敛法	122
12.3 幂级数	125
12.4 函数展开成幂级数	127
12.5 傅里叶级数	129
12.6 一般周期函数的傅里叶级数	131
自测题	132
 上册期中测试卷(1—3 章)(一)	135
上册期中测试卷(1—3 章)(二)	138
上册期末测试卷(1—6 章)(一)	141
上册期末测试卷(1—6 章)(二)	144
下册期中测试卷(7—9 章)(一)	147
下册期中测试卷(7—9 章)(二)	149
下册期末测试卷(8—12 章)(一)	151
下册期末测试卷(8—12 章)(二)	154
 考研真题训练	157
(一) 函数、极限、连续	157
(二) 一元函数微分学	159
(三) 一元函数积分学	163
(四) 常微分方程	166
(五) 向量代数与空间解析几何 多元函数微分学	168
(六) 多元函数积分学	172
(七) 无穷级数	177
 参考答案	180
 参考文献	261

第 1 章

函数与极限

1.1 映射与函数

1.1.1 判断题

1. 若 $f(x) = \ln x^3$, $g(x) = 3\ln x$, 则 $f(x) = g(x)$ ().
2. 若 $f(x) = x+1$, $g(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$, 则 $f(x) = g(x)$ ().
3. 若 $f(x) = 1-x^2$, $g(x) = \sqrt{(1-x^2)^2}$, 则 $f(x) = g(x)$ ().
4. 若 $f(x) = x$, $g(x) = \arccos(\cos x)$, 则 $f(x) = g(x)$ ().

1.1.2 填空题

1. 开区间_____是以 2 为中心、以 1 为半径的邻域.
2. 函数 $y = \frac{1}{1-x^2} + \sqrt{x+2}$ 的定义域是_____.
3. 考察奇偶性: $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ 是_____; 其图形关于_____对称.
4. 考察单调性: $y = \ln |x|$ 在_____内是单调增的; 在_____内是单调减的.
5. 设 $\varphi(t) = t^3 + 1$, 则 $\varphi(t^2) =$ _____; $[\varphi(t)]^2 =$ _____.

1.2.3 计算题

$$f(x) = \begin{cases} 1, & |x| < 1 \\ 0, & |x| = 1 \\ -1, & |x| > 1 \end{cases}, g(x) = e^x, \text{ 试求 } f[g(x)], g[f(x)]. \text{ 并给出两个函数的}$$

图形.

1.2 数列的极限

1.2.1 填空题

1. 数列 $-1, 2, -3, 4, -5, \dots$ 的一般项为_____.
2. 设 $|q| < 1$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n =$ _____.
3. 设 $a > 0$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} =$ _____.

1.2.2 判断题

下列各题中,哪些数列收敛? 哪些数列发散? 对收敛数列,通过观察 $\{x_n\}$ 的变化趋势,写出它们的极限:

(1) $\left\{(-1)^n \frac{1}{n}\right\};$

(2) $\left\{\frac{n-1}{n+1}\right\};$

(3) $\{n(-1)^n\};$

(4) $\left\{[(-1)^n + 1] \frac{n+1}{n}\right\}.$

1.3 函数的极限

1.3.1 填空题

1. 设 $f(x) = \frac{|x|}{x}$, 则 $f(0-0) = \underline{\hspace{2cm}}$; $f(0+0) = \underline{\hspace{2cm}}$; 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$ 则 $f(0-0) = \underline{\hspace{2cm}}$; $f(0+0) = \underline{\hspace{2cm}}$; 故 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$.

1.3.2 计算题

如图 1-1 所示的函数 $f(x)$, 求下列极限, 如极限不存在, 说明理由.

1. $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$.

2. $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$.

3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

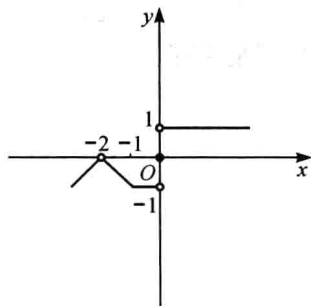


图 1-1

1.3.3 判断题

如图 1-2 所示的函数 $f(x)$, 下列陈述中, 哪些是对的? 哪些是错的?

1. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ 不存在.

2. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$.

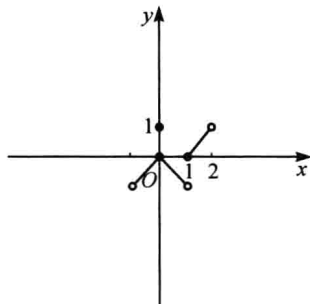


图 1-2

3. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1.$

4. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 0.$

5. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在.

1.3.4 计算题

求 $f(x) = \frac{|x|}{x(x-1)}$ 当 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow 1$ 时的左、右极限, 并说明它们在 $x \rightarrow 0$ 和 $x \rightarrow 1$ 时极限是否存在.

1.4 无穷小与无穷大

1.4.1 判断题

1. 两个无穷小的商一定是无穷小().
2. 零是可以作为无穷小的唯一常数().
3. 无穷大是指很大的数().
4. 在自变量的同一变化过程中, 若 $f(x)$ 为无穷小, 且 $f(x) \neq 0$, 则 $\frac{1}{f(x)}$ 为无穷大().

1.4.2 选择填空题

下列变量在所给的趋向下 _____ 是无穷小, _____ 是无穷大, _____ 既不是无穷小也不是无穷大.

(A) $x \rightarrow 0, \frac{1+2x}{x^2}$

(B) $x \rightarrow 0^+, \lg x$

(C) $x \rightarrow 0, x^3 + \sin x$

(D) $x \rightarrow \pi, x^3 + \sin x$

(E) $x \rightarrow 0, 3^{-x} - 1$

(F) $x \rightarrow +\infty, 3^{-x} - 1$

1.4.3 解答题

函数 $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时极限存在吗? 为什么? 何时是无穷小? 何时是无穷大?

1.4.4 计算题

求函数 $f(x) = \frac{4}{2-x^2}$ 的图形渐近线.

1.5 极限运算法则

1.5.1 计算题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x^3 - 2x^2 + x}{3x^2 + 2x}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h}.$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x}{x^4 - 3x^2 + 1}.$

4. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 6x + 8}{x^2 - 5x + 4}.$

5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right) \left(2 - \frac{1}{x^2}\right).$

6. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right).$

7. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1)}{n^2}.$

8. $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{5n^3}.$

9. $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3}\right).$

10. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 + 2x^2}{(x-2)^2}.$

11. $\lim_{x \rightarrow \infty} (2x^3 - x + 1).$

12. $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \sin \frac{1}{x}.$

1.5.2 证明题

证明: 函数 $f(x) = \frac{1}{x} \cos \frac{1}{x}$ 在点 $x = 0$ 处的任何邻域内是无界的, 但当 $x \rightarrow 0$ 时, 不是无穷大.

1.6 极限存在准则 两个重要极限

1.6.1 填空题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = \underline{\hspace{2cm}}.$

2. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\tan bx} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (b \neq 0).$

3. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{x} \sin x + x \sin \frac{1}{x} \right) = \underline{\hspace{2cm}}.$

4. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{\frac{n}{3}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

5. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 3x)^{\frac{2}{x}} = \underline{\hspace{2cm}}.$

6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^{bx} = \underline{\hspace{2cm}} \quad (ab \neq 0).$

1.6.2 计算题

1. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin x}.$

2. $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^n \sin \frac{x}{2^n} \quad (x \text{ 为不等于零常数}).$

3. $\lim_{x \rightarrow 0} (1 - x)^{\frac{1}{x}}.$

4. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x.$

1.6.3 证明题

利用极限存在准则证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1}{n^2 + \pi} + \frac{1}{n^2 + 2\pi} + \cdots + \frac{1}{n^2 + n\pi} \right) = 1.$

1.7 无穷小的比较

1.7.1 计算题

1. 利用等价无穷小的性质,求下列极限:

$$(1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{\tan^2 x};$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan 2x}{\sin 3x};$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^n)}{(\sin x)^m} \quad (n, m \text{ 为正整数});$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - \tan x}{(\sqrt[3]{1+x^2}-1)(\sqrt{1+\sin x}-1)}.$$

2. 当 $x \rightarrow 0$ 时, $2x - x^2$, 与 $x^2 - x^3$ 相比,哪一个高阶无穷小?

3. 当 $x \rightarrow 1$ 时,无穷小 $1-x$ 与 (1) $1-x^3$; (2) $\frac{1}{2}(1-x^2)$ 是否同阶? 是否等价?

4. 讨论极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{2-2\cos x}}{x}$.

1.8 函数的连续性与间断点

1.8.1 填空题

1. 设 $f(x) = (x-1)^2 \sin \frac{1}{x-1}$, 则间断点为_____; 属于第_____类_____间断点; 若要使 $f(x)$ 在该点连续, 则应补充定义, 令 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

2. 设 $f(x) = \cos^2 \frac{1}{x}$, 则间断点为_____; 属于第_____类_____间断点.

3. 设 $f(x) = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ 3-x, & x > 1, \end{cases}$ 则间断点为_____; 属于第_____类_____间断点.

4. 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 - 2x + 1, & x > 1, \\ 1, & x = 1, \\ x^2 - 1, & x < 1, \end{cases}$ 则间断点为_____; 属于第_____类_____间断点; 若要使 $f(x)$ 在该点连续, 则应补充定义, 令 $f(1) = \underline{\hspace{2cm}}$.

5. $f(x) = \frac{1}{\frac{x(x+2)}{x^2-4}}$ 的间断点为_____; 其中_____属于第_____类_____间断点; _____属于第_____类_____间断点.

6. $f(x) = \frac{x}{\tan x}$ 的间断点为_____; 其中, $x=0$ 为第_____类_____间断点; $x = k\pi$, ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第_____类_____间断点; 而 $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$, ($k = \pm 1, \pm 2, \dots$) 为第_____类_____间断点.

7. 若函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续且 $f(x_0) \neq 0$, 则存在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$, 当 $x \in U(x_0)$ 时, _____.

1.8.2 解答题

指出下列函数的间断点, 说明这些间断点属于哪一类. 如果是可去间断点, 那么, 补充或改变函数的定义使它连续:

$$1. y = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 3x + 2}.$$

$$2. y = \begin{cases} x-1, & x \leq 1, \\ 3-x, & x > 1. \end{cases}$$