

计算

力学中的体积力法

袁路平 陈经辉 王 玮 编译

JISUAN

LIXUE ZHONG DE TIJI LIFA

华东理工大学
出版社

计算力学中的体积力法

袁路平 陈经辉 王玮 编译



华东理工大学出版社

(沪)新登字 208 号



计算力学中的体积力法

编译 袁路平 陈经辉 王 玮

华东理工大学出版社出版发行

上海市梅陇路 130 号

邮政编码 200237

新华书店上海发行所发行经销

江苏句容市排印厂排版

上海东方印刷厂印刷

开本 850×1168 1/32 印张 6.5 字数 172 千字

1995 年 12 月第 1 版 1995 年 12 月第 1 次印刷

印数 1—1000 册

ISBN 7-5628-0631-4/O·38

定价 18.00 元

序

在机械和结构的强度设计方面,了解引起破坏或失效的应力以及认识材料在应力作用下的力学行为是两个基本的课题。现有的应力解析法包括有限元法和边界元法等,其通用性已被普遍认可。而体积力法一开始就是以高精度为目标开发创立的应力解析法。

体积力法最早的论文是在1967年发表的。其后这方面的论文多以日语刊载,所以在日本以外的其他国家一直鲜为人知。但最近,中国的同行们也开始过问体积力法的内容。1991年10月在北京召开的第4次APCS大会上,我还有幸被邀作了关于体积力法的讲演。

正是在这种情况下,上海交通大学的袁路平博士等向我提出了将体积力法的主要论文编译出版的愿望,以使中国学者能了解体积力法起始至今的发展状况,我对此甚感高兴。在中国,有我很多尊敬的友人,本书的出版对我来说也是求之不得的。

我衷心希望,尤其是中国的年轻学者能阅读本书,并施展他们的优秀才华,进一步发展体积力法的理论。

袁路平博士等认真仔细并付出了大量辛劳,才使本书的编译工作得以完成,我对此深表谢意。

日本九州产业大学教授

日本九州大学名誉教授

中国北京航空航天大学名誉教授

西谷弘信

1995年8月20日

引言

体积力法是应力解析领域中又一种强有力的数值解析法,由于以叠加原理为基础,它具有直观、易引入各种解析技巧以改善精度等特点,与同样是处理边界值问题的边界元法相比有其独到的优点。

体积力法自从1967年被日本九州大学西谷弘信教授正式开创为数值解析法以来,现已发展成能解析几乎所有的有限和无限区域的弹性场问题以及部分弹塑性问题的有效方法。

目前,我国对体积力法的研究和应用几乎还是空白,国际上除了日本以外也很少有人研究。体积力法在中国的推广,对我国的力学和应用力学界无疑会起到很好的推动作用。

由西谷、陈玳珩著,培风馆出版的《体积力法》一书对体积力法从原理上作了比较系统的介绍。而本书的目的是使读者更全面地了解体积力法的各种不同的运用手法,在内容上编选了一般二维问题、轴对称问题、一般三维问题、混合边界值问题、动弹性问题、逆问题、界面问题、面外剪切问题、热弹性问题、弹塑性问题等各种类型的应力解析问题。

本书编译的资料来源为:

《日本机械学会志》, Vol. 170—581, 627;

《日本机械学会论文集》A 编

Vol. 56—530, 2123; Vol. 57—543, 2836;

Vol. 55—515, 1584; Vol. 57—542, 2561;

Vol. 57—534, 274; Vol. 59—557, 68;

Vol. 49—443, 818; Vol. 51—462, 571;

Vol. 48—427, 301; Vol. 40—329, 31;

Vol. 50—453, 1077; Vol. 52—481, 2662;

Vol. 57—542, 2504; Vol. 58—551, 1209;

《体积力法》, 西谷, 陈, 培风馆, 1987;

《材料力学的进展》，西谷，讲义。

在本书的编译过程中，得到了原日本九州大学西谷弘信教授和日本机械学会的大力支持，另外，日本九州工业大学陈玳珩教授也不吝热情指教，在此一并表示衷心感谢！

编者

1995年6月

目 录

第一篇	运用电子计算机对二维应力问题的解析·····	1
第二篇	体积力法对二维混合边界值问题的解法及其在 裂纹问题中的应用·····	24
第三篇	体积力法对受弯轴对称体应力集中问题的解析·····	41
第四篇	受拉椭圆板状裂纹及半椭圆板状裂纹的应力强 度因子·····	60
第五篇	体积力法对二维弹性问题的通用解析理论·····	78
第六篇	体积力法对面外剪切问题的通用解析法·····	92
第七篇	根据叠加原理的动弹性问题解析法(体积力法向 动弹性问题的扩展)·····	109
第八篇	体积力法对二维定常热弹性问题的解析法·····	129
第九篇	体积力法向弹塑性问题的扩展·····	144
第十篇	体积力法对界面裂纹的解析理论·····	161
第十一篇	体积力法对裂纹逆问题的解析·····	174
第十二篇	体积力法与有限元素法结合对裂纹材料应力 强度因子的解析·····	188

第一篇 运用电子计算机对二维应力问题的解析

1 引言

电子计算机的发展使数值计算变得非常容易。本论文给出了运用电子计算机的特别解法,并用这一解法对二维应力问题进行了解析。解析实例为长方形板受对称外力作用(图2)及带圆弧和折线型缺口(包括圆弧型、 60° V型及U型缺口)的半无限板的受拉伸作用等场合。图2的问题,最近已由 Gaydon⁽¹⁾用电子计算机解出。

作者的解法是以无限板中一点受集中力作用下的应力分布为基础的,通过在边界上分布体积力,并采用选点法决定其分布的形状,从而实现边界条件的满足。这一方法,从原理上说适用于任何二维应力问题,并且也有可能应用于其他边界值问题,如流体、热传导的部分问题及三维应力问题。在解三维应力问题时以无限体中一点受集中力作用下的解为基础。

2 计算方法

假定任意形状的二维弹性体受外力作用。 S 为沿边界所测得的距离,在边界上作用的垂直应力为 $\sigma_0(S)$,剪切应力为 $\tau_0(S)$ (图1)。这时的解可按如下步骤求得:

1) 想象在无限板(厚度为1)中有给定形状的闭曲线,在闭曲线的法线方向及切线方向上分别分布密度为 $\rho_{n0}(S) = 2\sigma_0(S)$,

$\rho_{t0}(S)=2\tau_0(S)$ 的体积力时,求 $\ominus$ 边界($\ominus$ 边界为由闭曲线内部离闭曲线无限近的点组成的闭曲线)上的应力分布。这时在 $\ominus$ 边界上产生 $\sigma_0(S)+\sigma'_0(S),\tau_0(S)+\tau'_0(S)$ 的应力,一般 $\sigma'_0(S),\tau'_0(S)$ 的数值比 $\sigma_0(S),\tau(S)$ 为小。

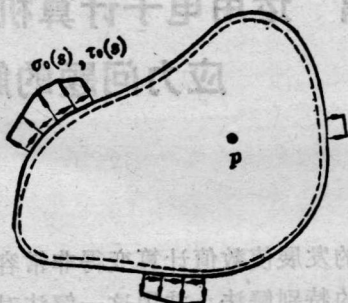


图 1

2) 随后在闭曲线上分布适当的体积力 $\rho_n(S), \rho_t(S)$ 以消除 $\ominus$ 边界上的 $\sigma'_0(S), \tau'_0(S)$ 。

以上操作使得无限板中 $\ominus$ 边界上满足所给边界条件, 即 $\sigma=\sigma_0(S), \tau=\tau_0(S)$ 。

任意点 P 的应力可由无限板中闭曲线上密度为 $\rho_{n0}(S)+\rho_n(S), \rho_{t0}(S)+\rho_t(S)$ 的分布体积力求得。

这一解法的基础为无限板中一点受集中力作用下的解。当体积力连续分布时沿边界积分便可求解。

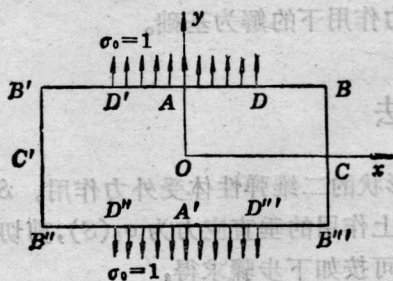


图 2

以下用上述思路来求解图 2、图 3 的问题。图 2 的问题以无

限板中一点受集中力作用下的解为基础。图 3 的问题原理上与图 2 的问题一样,同样可用无限板中一点受集中力作用下的解求得。但限于计算机的容量,本论文在解图 3 问题时以半无限板中一点受集中力作用下的解为基础。

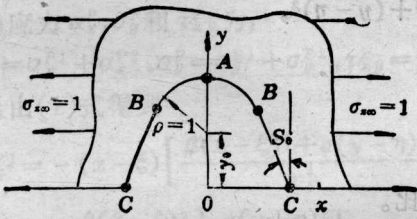


图 3

3 无限板中一点受集中力作用下任意点的应力

在图 4 所示坐标系中,无限板中点 (ξ, η) 的 x 轴方向受集中力 P 的作用下,在任意点 (x, y) 处产生的应力 $\sigma_x^P, \sigma_y^P, \tau_{xy}^P$ 为⁽²⁾:

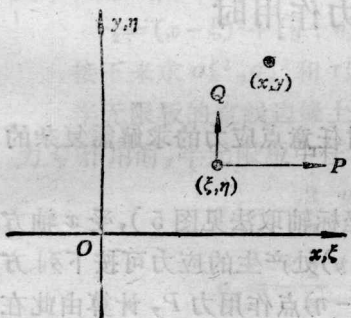


图 4

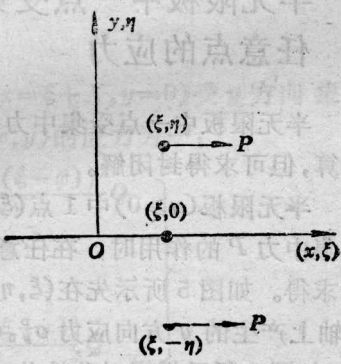


图 5

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^P &= -\frac{(x-\xi)\{\beta(x-\xi)^2 + \alpha(y-\eta)^2\}}{r_1^4} P \\ \sigma_y^P &= \frac{(x-\xi)\{\alpha(x-\xi)^2 + (2\alpha-\beta)(y-\eta)^2\}}{r_1^4} P \\ \tau_{xy}^P &= -\frac{(y-\eta)\{\beta(x-\xi)^2 + \alpha(y-\eta)^2\}}{r_1^4} P \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 $r_1^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$,

$$\alpha = \frac{1-\nu}{4\pi},$$

$$\beta = \frac{3+\nu}{4\pi}$$

ν ——泊松比。

另外在 (ξ, η) 点的 y 轴方向受集中力 Q 作用时,点 (x, y) 处产生的应力 σ_x^Q, σ_y^Q 和 τ_{xy}^Q 为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^Q &= \frac{(y-\eta)\{\alpha(y-\eta)^2 + (2\alpha-\beta)(x-\xi)^2\}}{r_1^4} Q \\ \sigma_y^Q &= -\frac{(y-\eta)\{\beta(y-\eta)^2 + \alpha(x-\xi)^2\}}{r_1^4} Q \\ \tau_{xy}^Q &= -\frac{(x-\xi)\{\beta(y-\eta)^2 + \alpha(x-\xi)^2\}}{r_1^4} Q \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

4 半无限板中一点受集中力作用时任意点的应力

半无限板中一点受集中力作用时任意点应力的求解需复杂的运算,但可求得封闭解。

半无限板($y \geq 0$)中1点 (ξ, η) (坐标轴取法见图5),受 x 轴方向集中力 P 的作用时,在任意点 (x, y) 处产生的应力可按下列方法求得。如图5所示先在 (ξ, η) 、 $(\xi, -\eta)$ 点作用力 P ,计算由此在 x 轴上产生的 y 方向应力 $\sigma_y^P(X)$ [X 为从点 $(\xi, 0)$ 沿 x 轴测得的距离,如图5所示根据对称性此时 x 轴上的剪应力 $\tau_{xy}^P(X)$ 为零,在

\$(\xi, -\eta)\$点同时施加力\$P\$从而使\$\tau_{xy0}(X)\$为零,故简化了积分运算]。

接着在半无限板的直线边缘\$y=0\$上加载荷以消除应力\$\sigma_{y0}(X)\$。

半无限板中点\$(\xi, \eta)\$处加\$P\$力时的应力场为上述两种应力场之和,即无限板中\$(\xi, \eta)\$及\$(\xi, -\eta)\$点加\$P\$力时的应力场与半无限板直线边缘加\$-\sigma_{y0}(X)\$时的应力场之和。因此,前者的应力场用上标\$P1\$,后者的应力场用上标\$P2\$,则半无限板中一点\$(\xi, \eta)\$作用\$P\$力时\$(x, y)\$点的应力\$\sigma_x^P, \sigma_y^P\$和\$\tau_{xy}^P\$为:

$$\sigma_x^P = \sigma_x^{P1} + \sigma_x^{P2}, \sigma_y^P = \sigma_y^{P1} + \sigma_y^{P2}, \tau_{xy}^P = \tau_{xy}^{P1} + \tau_{xy}^{P2} \quad (3)$$

\$\sigma_x^{P1}, \sigma_y^{P1}, \tau_{xy}^{P1}\$由(1)式得到

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{P1} &= -(x-\xi) \left[\frac{\beta(x-\xi)^2 + \alpha(y-\eta)^2}{r_1^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\beta(x-\xi)^2 + \alpha(y+\eta)^2}{r_2^4} \right] P \\ \sigma_y^{P1} &= (x-\xi) \left[\frac{\alpha(x-\xi)^2 + (2\alpha-\beta)(y-\eta)^2}{r_1^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha(x-\xi)^2 + (2\alpha-\beta)(y+\eta)^2}{r_2^4} \right] P \\ \tau_{xy}^{P1} &= - \left[\frac{(y-\eta) \{ \beta(x-\xi)^2 + \alpha(y-\xi)^2 \}}{r_1^4} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(y+\eta) \{ \beta(x-\xi)^2 + \alpha(y+\eta)^2 \}}{r_2^4} \right] P \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式中 \$r_1^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2\$,

\$r_2^2 = (x-\xi)^2 + (y+\eta)^2\$。

接下来求\$\sigma_x^{P2}, \sigma_y^{P2}\$和\$\tau_{xy}^{P2}\$。

半无限板的直线边缘上一点\$(x=\xi+X, y=0)\$受\$y\$方向集中力\$Q\$作用时,半无限板中任意点\$(x, y)\$的应力为⁽³⁾:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2}{\pi} \frac{y \{ X + (\xi-x) \}^2}{R^4} Q \\ \sigma_y &= -\frac{2}{\pi} \frac{y^3}{R^4} Q \\ \tau_{xy} &= \frac{2}{\pi} \frac{y^2 \{ X + (\xi-x) \}}{R^4} Q \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

上式中 $R^2 = \{X + (\xi - x)\}^2 + y^2$ 。

因此,半无限板的直线边缘($y=0$)上受垂直应力 $-\sigma_{y0}^P(X)$ 作用时,任意点(x, y)的应力 σ_x^{P2} , σ_y^{P2} 和 τ_{xy}^{P2} 为:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{P2} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{y0}^P(X) \frac{y\{X + (\xi - x)\}^2}{R^4} dX \\ \sigma_y^{P2} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{y0}^P(X) \frac{y^3}{R^4} dX \\ \tau_{xy}^{P2} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{y0}^P(X) \frac{y^2\{X + (\xi - x)\}}{R^4} dX \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

$\sigma_{y0}^P(X)$ 可由式(4)计算:

$$\sigma_{y0}^P(X) = \sigma_y^{P1} \Big|_{\substack{x=X+\xi \\ y=0}} = \frac{2X\{aX^2 + (2a - \beta)\eta^2\}}{r^4} P \quad (7)$$

式中 $r^2 = X^2 + \eta^2$, $a = \frac{1-\nu}{4\pi}$, $\beta = \frac{3+\nu}{4\pi}$ 。

本论文的问题中应力分布与 ν 无关,以下计算令 $\nu=0$, 这时

$$a = \frac{1}{4\pi}, \beta = \frac{3}{4\pi} \quad (8)$$

因此,将式(7)代入式(6)则有

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{P2} &= -\frac{y}{\pi^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(X^2 - \eta^2)}{r^4} \frac{\{X + (\xi - x)\}^2}{R^4} dX \\ \sigma_y^{P2} &= -\frac{y}{\pi^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(X^2 - \eta^2)}{r^4} \frac{y^2}{R^4} dX \\ \tau_{xy}^{P2} &= \frac{y}{\pi^2} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(X^2 - \eta^2)}{r^4} \frac{y\{X + (\xi - x)\}}{R^4} dX \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)中的积分为 X 的有理函数的积分,因此可求得封闭解。令 $\xi - x = a$ 进行积分

$$\sigma_x^{P2} = \frac{y}{\pi^2} (M_1 - M_2) P, \sigma_y^{P2} = \frac{y}{\pi^2} M_2 P, \tau_{xy}^{P2} = \frac{y^2}{2\pi^2} \frac{\partial M_1}{\partial a} P \quad (10)$$

这里

$$\left. \begin{aligned} M_1 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(X^2 - \eta^2)}{r^4 R^2} dX = -I_1 + 2\eta^2 I_3 \\ M_2 &= - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(X^2 - \eta^2)y}{r^4 R^4} dX = y^2(-I_2 + 2\eta^2 I_4) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X}{r^2 R^2} dX = -\frac{\pi a}{y} \frac{1}{\{a^2 + (y+\eta)^2\}} \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X}{r^2 R^4} dX = -\frac{\pi a}{2y^3} \cdot \frac{\{a^2 + (y+\eta)(3y+\eta)\}}{\{a^2 + (y+\eta)^2\}^2} \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X}{r^4 R^2} dX = -\frac{\pi a}{y\eta} \frac{(y+\eta)}{\{a^2 + (y+\eta)^2\}^2} \\ I_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X}{r^4 R^4} dX = -\frac{\pi a}{2y^3\eta} \frac{\{a^2\eta + (y+\eta)(4y+\eta)\}}{\{a^2 + (y+\eta)^2\}^3} \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

将式(11)、(12)代入式(10),经整理

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x^{P2} &= \frac{P}{2\pi} \frac{A}{y(A^2 + n^2)^3} [A^4 - 2(n-1)A^2 - n^2(n^2 - 6n + 6)] \\ \sigma_y^{P2} &= \frac{P}{2\pi} \frac{A}{y(A^2 + n^2)^3} [A^4 + 2(3n-1)A^2 - n^2(n^2 + 2n - 6)] \\ \tau_{xy}^{P2} &= \frac{P}{2\pi} \frac{1}{y(A^2 + n^2)^3} [-A^4 + 6n(n-1)A^2 - n^3(n-2)] \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

式中

$$A = \frac{\xi - x}{y}, n = 1 + \frac{\eta}{y} \quad (14)$$

接着考虑半无限板中一点 (ξ, η) 沿 y 轴正向加力 Q 时,求解任意点 (x, y) 的应力。假定无限板中一点 (ξ, η) 加力 Q ,并且同时在点 $(\xi, -\eta)$ 加力 $-Q$,这时如果 x 轴上产生应力 $\sigma_y^Q(X)$,那么所求应力解为无限板中一点 (ξ, η) 加力 Q 的同时,点 $(\xi, -\eta)$ 加力 $-Q$ 所产生的应力与半无限板直线边缘上加 $-\sigma_y^Q(X)$ 所产生的应力之和。

$$\sigma_x^Q = \sigma_x^{Q1} + \sigma_x^{Q2}, \sigma_y^Q = \sigma_y^{Q1} + \sigma_y^{Q2}, \tau_{xy}^Q = \tau_{xy}^{Q1} + \tau_{xy}^{Q2} \quad (15)$$

由式(2)得(设 $v=0$)

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_x^{Q1} &= \left[\frac{(y-\eta)\{(y-\eta)^2 - (x-\xi)^2\}}{r_1^4} - \frac{(y+\eta)\{(y+\eta)^2 - (x-\xi)^2\}}{r_2^4} \right] \frac{Q}{4\pi} \\
\sigma_y^{Q1} &= \left[-\frac{(y-\eta)\{(x-\xi)^2 + 3(y-\eta)^2\}}{r_1^4} + \frac{(y+\eta)\{(x-\xi)^2 + 3(y+\eta)^2\}}{r_2^4} \right] \frac{Q}{4\pi} \\
\tau_{xy}^{Q1} &= \left[-\frac{(x-\xi)\{x-\xi)^2 + 3(y-\eta)^2\}}{r_1^4} + \frac{(x-\xi)\{(x-\xi)^2 + 3(y+\eta)^2\}}{r_2^4} \right] \frac{Q}{4\pi}
\end{aligned} \right\} \quad (16)$$

式中 $r_1^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$, $r_2^2 = (x-\xi)^2 + (y+\eta)^2$ 。

$\sigma_{y0}^Q(X)$ 可由式(16)以及令 $x=X+\xi, y=0$ 求得

$$\sigma_{y0}^Q(X) = \sigma_y^{Q1} \Big|_{\substack{x=X+\xi \\ y=0}} = \frac{2\eta(X^2+3\eta^2)}{(X^2+\eta^2)^2} \frac{Q}{4\pi} \quad (17)$$

因此消去直线边缘上 $\sigma_{y0}^Q(X)$ 而在 (x, y) 产生的应力 σ_x^{Q2} , σ_y^{Q2} 和 τ_{xy}^{Q2} 为

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_x^{Q2} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{y0}^Q(X) \frac{y\{X+(\xi-x)\}^2}{R^4} dX \\
\sigma_y^{Q2} &= -\frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{y0}^Q(X) \frac{y^3}{R^4} dX \\
\tau_{xy}^{Q2} &= \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{y0}^Q(X) \frac{y^2\{X+(\xi-x)\}}{R^4} dX
\end{aligned} \right\} \quad (18)$$

实际进行积分

$$\left. \begin{aligned}
\sigma_x^{Q2} &= \frac{y\eta}{\pi^2} (N_1 - N_2) Q, \quad \sigma_y^{Q2} = \frac{y\eta}{\pi^2} N_2 Q, \\
\tau_{xy}^{Q2} &= \frac{y^2\eta}{2\pi^2} \frac{\partial N_1}{\partial a} Q
\end{aligned} \right\} \quad (19)$$

上式中

$$\left. \begin{aligned}
N_1 &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X^2+3\eta^2)}{r^4 R^2} dX = -J_1 - 2\eta^2 J_3 \\
N_2 &= -\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(X^2+\eta^2)y^2}{r^4 R^4} dX = -y^2(J_2 + 2\eta^2 J_4)
\end{aligned} \right\} \quad (20)$$

$$\begin{aligned}
 J_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^2 R^2} dX = \frac{\pi(y+\eta)}{y\eta} \\
 &\quad \times \frac{1}{\{a^2 + (y+\eta)^2\}} \\
 J_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^2 R^4} dX = \frac{\pi}{2y^2 \eta} \\
 &\quad \times \frac{a^2 \eta + (y+\eta)^2 (2y+\eta)}{\{a^2 + (y+\eta)^2\}^2} \\
 J_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^4 R^2} dX = \frac{\pi}{2y\eta^3} \\
 &\quad \times \frac{a^2 y + (y+\eta)^2 (y+2\eta)}{\{a^2 + (y+\eta)^2\}^2} \\
 J_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{r^4 R^4} dX = \frac{\pi}{2y^3 \eta^3} \\
 &\quad \times \frac{a^2 (y^3 + \eta^3) + (y+\eta)^3 (y^2 + 3y\eta + \eta^2)}{\{a^2 + (y+\eta)^2\}^3}
 \end{aligned} \tag{21}$$

根据式(20)、(21)将式(19)整理改写得:

$$\begin{aligned}
 \sigma_x^{Q2} &= -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{y(A^2 + n^2)^3} [(n+3)A^4 \\
 &\quad + 2n(2n^2 + 3n - 3)A^2 + n^3(3n^2 - 5n + 2)] \\
 \sigma_y^{Q2} &= -\frac{Q}{2\pi} \frac{1}{y(A^2 + n^2)^3} [(n-1)A^4 \\
 &\quad + 2n(2n^2 - 3n + 3)A^2 + n^3(3n^2 + 3n - 2)] \\
 \tau_{xy}^{Q2} &= \frac{Q}{2\pi} \frac{2A}{y(A^2 + n^2)^3} [(n+1)A^2 \\
 &\quad + n^2(5n - 3)]
 \end{aligned} \tag{22}$$

式中 A, n 由式(14)给出。

5 有限板的问题

如图 2 所示受 x, y 轴对称载荷的长方形板问题 Gaydon 最近也进行了解析⁽¹⁾。他的解法在应力函数上使用了长方形板的特

征, 因此很难扩展到解长方形板以外的问题。本文的方法如第 2 节所述对边界的形状毫无限制(但受计算机容量的限制, 形状不规则, 一般精度变低)。对于长方形板问题本方法也可以使用长方形板特征。比如图 2 的载荷以 $B'B$ 为周期无限施加, 从无限长带板的解出发也能简单地求得。但为了说明计算原理, 本文不使用长方形板特征。

5.1 运用电子计算机的具体解法

通过在无限板中假想的长方形 $BB'B''B'''$ (图 2) 的周边上加上适当的分布体积力而获得问题的解, 因此原来的问题变成了如何求分布体积力的问题。

假设边界上单位长度上所分布的沿 x 方向的体积力成分为 ρ_x , 沿 y 方向上的成分为 ρ_y 。图 2 中 $B'B$ 和 $B''B'''$ 等分成 $2n_1$, BB''' 和 $B'B''$ 等分成 $2n_2$, 令各区间上 ρ_x, ρ_y 为一定值, 即实际上应该连续分布的体积力用阶梯状分布来取代。设此时第 i 区间上的体积力密度为 ρ_{xi}, ρ_{yi} (各个区间上不同, 而同一区间内为一定值, $i=1, 2, \dots, n_1+n_2$), 任意点的应力用无限板中一点受集中力作用下解的表达式(1)及(2)再对 ρ_{xi}, ρ_{yi} 的影响进行积分而获得, 最后成为 ρ_{xi}, ρ_{yi} 的一次结合形的表达, 从而问题变成求解能满足边界条件的 ρ_{xi}, ρ_{yi} 。我们使各区间中点 $\ominus$ 边界的应力满足边界条件。这一条件可写成关于 ρ_{xi}, ρ_{yi} 的 $2(n_1+n_2)$ 元一次联立方程组, 从而求得 ρ_{xi}, ρ_{yi} 的值。这样求出的应力分布, 严密地说只有有限个点满足边界条件, 而产生的误差是由用阶梯状分布取代连续分布所带来的, 它随着离边界的距离的增大必定会急剧减小。在求解应力集中系数这类问题时边界上的应力是必要的, 所以须特别注意, 这将在第 6 节中叙述。

计算按如下顺序进行:

1) 在 $D'D$ 之间 $\rho_{y0i}=2.0, D''D'''$ 之间 $\rho_{y0i}=-2.0$, 其它区间 $\rho_{y0i}=0, \rho_{x0i}$ 在所有区间为 0, 计算在第 j 区间中点 (x_j, y_j) 的 $\ominus$ 边界所产生的应力 $\sigma'_{yj}, \tau'_{xyj}$ (区间 j 在 $B'B, B''B'''$ 上时) 及 $\sigma'_{xj}, \tau'_{xyj}$ 。