

理 论 力 学

第二分册

◀力学教研组编▶

华东化工学院

1961.3.

运动学

导言

运动学是研究质点和刚体运动几何性质的科学，而对作用在质点和刚体上的力与其效应的关系在这里是不加以考虑的，至于这部份的研究将在动力学中加以详细分析之。因此，运动学是从比较单纯的角度来研究物体运动的，它为动力学中更全面地研究物体的运动做了准备。但是也必须指出，运动学研究所得的结果，尚有它独立的重要意义。因为在许多机械里，关于作用力的分析只是比较次要的问题，重要的是对机械中各构件进行周详的运动的分析，以保证机械具有正确的效用，所以运动学在力学中是有需要有一个独立部分。

运动学的研究中也是只以几何学的公理为基础的，而不需要任何新的公理，它与几何学相比只是多出了「时间」这个概念。

现在我们先来谈一下什么叫做运动？这一概念是运动学的最基本的概念，因此我们必须加以彻底地理解。所谓运动如果单从理介为运动是指质点（或刚体）的位置在空间变动的现象也就是指质点（或刚体）在空间的位移，这样的理解是不够全面的也是不科学的，因为同样的一个位移，质点（或刚体）可以完成得很快也可以完成得很慢，说明质点或刚体的运动应和时间有联系。因此在运动学里应所讲的运动应理介为：质点（或刚体）的位置随时间在空间变动的现象，从这个定义来看我们就可知运动决定一个质点（或刚体）的运动就是决定质点（或刚体）随时间在空间的位置，所以时间、空间和物质同样是不可分割的。由此可知，世界上除了运动着的物质，什么也没有，而运动着的物质只有在空间和时间内才能运动（列宁全集14卷，人民出版社，1957年版，第179页）认为时间和空间可以脱离物质世界而存在，是一种形而上学的观点。

同时在决定一个质点（或刚体）的运动时或者说：在描写一个质点（或刚体）的运动时，首先必须采取一个参考目标，因为运动这个概念和静止的概念一样，完全是相对的，如我们只讲一物体在空间作某一种运动，从这句话是还不能够描写出它的运动情况，这是由于同样一个物体它可以对着不同的参考目标

而得到不同的描写。好譬說：火車對路旁的樹運動着或者它對正在路旁行走的人運動着，（這二種運動的描写是完全不同的，因為前者的參考目標是位於靜止也就是假定地球是位於靜止的，而後者的參考目標自己在運動着，矣（或剛體）的運動也是一樣，在矣（或剛體）的運動，討論中參考目標一般用固定在某一個剛體上的座標來表示。

前已講過，時間對矣（或剛體）的運動也是一個重要的因素，因為它不但決定矣（或剛體）在位移時的快慢程度，而且也能指出位移的前後順序，在運動學中時間是被看成為連續的自變量，以字母 t 表示並採用（秒 $\gamma = \frac{1}{24 \times 60 \times 60}$ 平均太陽日）為時間單位。

在計標時間時又會遇到兩個術語“瞬時 t ”和時間“隔 $t = t_2 - t_1$ ”，瞬時 t 在理介為以某一瞬時（計算時間的起始矣）起經過 t 秒後的三秒鐘，時間隔 t 是指瞬時 t_1 到瞬時 t_2 之間的三秒鐘。

綜合上述運動學是研究矣（或剛體）隨時間在空間的位置，而更具體的說它思的目的是要解決三個問題即：1) 確定矣（或剛體）在各瞬時的位置和矣在空間依運動時所划出的曲線（即矣的軌跡），2) 確定矣在各瞬時的速度，3) 確定矣在各瞬時的加速度，在運動學這一部份中的各章將以環繞着這三個基本問題進行討論，但在研究矣和剛體的運動時，由於在討論剛體的運動中尚要用到矣的運動中的一些概念，所以我們有先研究一下矣的運動。

第六章

向量分析的基础

§ 6-1 向 量

在自然科学中，除了那些仅由其大小来定的量以外，我们还碰到另一种量，这种量要把它完全定出的话，除了须要用一定的量度单位由数值表示它的大小以外，还必须说明它在空间的方向。前一种量叫做纯数性的量（简称纯量，或数量，或无向量，例如用厘米表示长度，用磅、体积、质量、温度等的量都是），后一种量叫做向量（或称矢量，例如表示速度、加速度、力等的量都是）。

向量是可以由一段带有箭头的直线段来表示（图 6-1）线段的长度，依照一定的比例尺，代表向量的大小，向量的大小即称为向量的模，线段的方向及箭头的指向即表明向量的方向。

向量的符号是可用一个粗体字母上加一横线，例如 $\vec{a}$ ， $\vec{A}$ 等来表示或用两个字母表示向量的起点的及终点的字母上加一横线，如 $\vec{AB}$ ， $\vec{OM}$ 等来表示。

我们假定读者已学过向量代数，所以这里只陈述（而不证明）其中的基本命题。

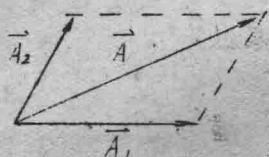
§ 6-2 向量的运算法则及其属性

(一) 向量的运算法则

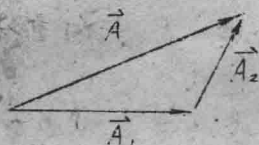
1. 向量的加法

如由已给两向量 $\vec{A}_1$ 及 $\vec{A}_2$ 求其和则可按以已给两向量 $\vec{A}_1$ 及 $\vec{A}_2$ 为边作平行四边形求得该平行四边形的对角线 $\vec{A}$ 即为两向量 $\vec{A}_1$ 及 $\vec{A}_2$ 的和（图 6-2 甲）或可按以向量 $\vec{A}_1$ 的终点作为向量 $\vec{A}_2$ 的起点。

使向量 $\vec{A}_1$ ， $\vec{A}_2$ 引成折线，则该折线的闭合线段所代表的向量即为所求的向量（图 6-2 乙）。



(甲)



(乙)

图 6-2

最后那种作法可推广到任意个向量的情形中去。在向量 $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \dots, \vec{A}_n$ 中依次以一向量的终点作为接来向量的起点的所成折线的用合线段所代表的向量叫做这些向量的和 $\vec{A}$ ：
 $\vec{A} = \vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 + \dots + \vec{A}_n$ 其中第一向量 $\vec{A}_1$ 的起点是 $\vec{A}$ 的起点，最末一个向量的终点是 $\vec{A}$ 的终点。

2. 向量的减法

向量的减法为加法的逆运算。如由已知两向量 $\vec{A}_1$ 及 $\vec{A}_2$ 求其差，则可接以所减向量 $\vec{A}_2$ 的终点为起点，且以被减向量 $\vec{A}_1$ 的终点为终点的一个向量 $\vec{A}$ 叫做两向量 $\vec{A}_1$ 及 $\vec{A}_2$ 的差 $\vec{A}$ ， $\vec{A} = \vec{A}_1 - \vec{A}_2$ (图 6-3)

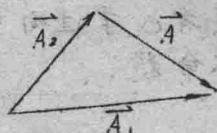
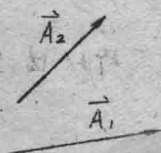


图 6-3

由图上可以看出如将 $\vec{A}_2$ 的指向逆转以 $-\vec{A}_2$ 代表 $\vec{A}_2$ 方向相反的向量，则

$$\vec{A} = \vec{A}_1 + (-\vec{A}_2)$$

于是将

$$\vec{A}_1 - \vec{A}_2 = \vec{A}_1 + (-\vec{A}_2)$$

这样一来原来是求向量差的问题可变成求向量和的问题来

处理。

3. 向量与纯量的乘积

设有一向量 $\vec{A}$ 及一正纯量 m ，正纯量 m 与向量 $\vec{A}$ 的乘积 $m\vec{A}$ 定义为一新的向量，它的方向与 $\vec{A}$ 相同，它的大小等于已知向量 $\vec{A}$ 的大小的 m 倍。

同样，负纯量 $-m$ 与向量 $\vec{A}$ 的乘积 $-m\vec{A}$ 定义为一新向量方向与已知向量 $\vec{A}$ 的方向相反而大小等于已知向量 $\vec{A}$ 的大小的 m 倍。

应用这一定义则任何向量都可用它的模乘以与它同方向的单位向量来表示，例如有向量 $\vec{A}$ 其模为 A ，命与 $\vec{A}$ 同方向的单位向量为 $\vec{A}^0$ 则 $\vec{A} = A\vec{A}^0$ 。

4. 两向量的纯积（或内积）

两向量的乘积等于两个向量 $\vec{A}_1$ 及 $\vec{A}_2$ 的模与其夹角余弦的乘积即 $\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = A_1 A_2 \cos(\vec{A}_1, \vec{A}_2)$ 由此可见两个向量的纯积是一个数，它不但在其中一个因子为零时等于零，且在两个向量因子都非零但互相垂直时则其纯积也为零。

5. 两向量的矢积

两向量 $\vec{A}_1, \vec{A}_2$ 的矢积是一个新的向量 $\vec{A}$ （图 6-4）它的模等于以向量 $\vec{A}_1, \vec{A}_2$ 为平行四边形的面积，方向垂直于 $\vec{A}_1, \vec{A}_2$ 所决定的平面（即平行四边形），而它的指向依照右手螺旋规则决定。

这样，矢积跟其他运算不同要取决于预先规定的空间指向，矢积的模 $A = A_1 A_2 \sin(\vec{A}_1, \vec{A}_2)$ ，由此可见共线向量的矢积是零。

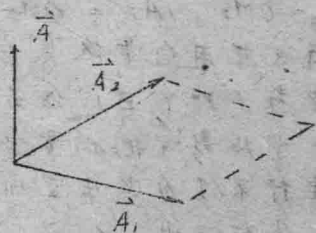


图 6-4

(二) 向量运算的基本属性（读者自阅）

- 1) 加法与纯积具有交换性： $\vec{A}_1 + \vec{A}_2 = \vec{A}_2 + \vec{A}_1$ ， $\vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 = \vec{A}_2 \cdot \vec{A}_1$ ，但矢积无此属性： $\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = -\vec{A}_2 \times \vec{A}_1$ 。
- 2) 加法有可结合性： $\vec{A}_1 + \vec{A}_2 + \vec{A}_3 = \vec{A}_1 + (\vec{A}_2 + \vec{A}_3)$ 同样可得： $m_1(m_2 \vec{A}) = (m_1 m_2) \vec{A}$ 其中 m_1, m_2 是纯量。
- 3) 纯积与矢积都具有可分配性。

$$\vec{A}_1 \cdot (\vec{A}_2 + \vec{A}_3) = \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 + \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_3$$

$$\vec{A}_1 \times (\vec{A}_2 + \vec{A}_3) = \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 + \vec{A}_1 \times \vec{A}_3$$

此外还有一种很重要的特殊运算：矢量轴上的投影法。这方面的计算在静力学中已详加讨论这里不再加以赘述。

§ 6-3 向量分解法 向量代数

(一) 向量分解法 (读者自阅)

空间每一个向量可以表示为位于三个已知坐标轴上三个不共面向量的和。平面上每个向量表示为位于两个已知坐标轴上二个不共线向量的和。这些向量叫做所给向量在已知轴上的分量，这种表示法叫做向量分解法。

以 $O(0,0,0)$ 为起点的向量 $\vec{A} = \vec{OM}$ (图 6-5) 来说。它在坐标轴上三个分量，显然是由其左 OX 、

OY 、 OZ 各轴上的投影所定的三个向量 $\vec{A}_x = \vec{OM}_1$ 、

$\vec{A}_y = \vec{OM}_2$ 、 $\vec{A}_z = \vec{OM}_3$ ；

我们又可用向量终点 M 的坐标 (X, Y, Z) 作为上述三个投影可把向量写成 $\vec{A}(X, Y, Z)$ 由此可见我们可拿向量的坐标来作为定出空间向量的三个数 (同样平面向量可用它的两个坐标定出)。

向量 $\vec{A}$ 的直角坐标 X, Y, Z ，跟其模 A 及向量与 OX 、 OY 、 OZ 轴所成角 α, β, γ 间具有关系如下：

$$A = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$\cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

$$\cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}}$$

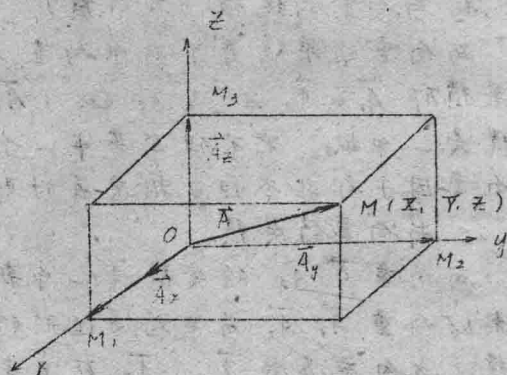


图 6-5

同时

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

现在要引用三个单位向量，它们都以原点为起点而以 OX , OY , OZ 轴的正方向为方向。这些向量分别记为 i, j, k ，且叫做基本单位向量，于是显然可见。

$$\vec{A}_x = X i \quad \vec{A}_y = Y j \quad \vec{A}_z = Z k$$

所以

$$\vec{A} = X i + Y j + Z k$$

这就是把向量分解成基本向量的普通形式（平面向量可分解为 $\vec{A} = X i + Y j$ ）

(二) 向量代数（读者自阅）

我们来看两个基本单位向量的纯积和矢积的结果

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \quad i \cdot j = i \cdot k = j \cdot k = 0$$

$$i \times i = j \times j = k \times k = 0 \quad i \times j = k, \quad j \times k = i, \quad k \times i = j$$

$$j \times i = -k, \quad k \times j = -i, \quad i \times k = -j$$

如果把向量分解成基本向量之后那末根据以前所讲的法则就可按下式的公式来做向量运算。

$$\begin{aligned} 1) \quad \vec{A}_1 + \vec{A}_2 &= (X_1 i + Y_1 j + Z_1 k) + (X_2 i + Y_2 j + Z_2 k) \\ &= (X_1 + X_2) i + (Y_1 + Y_2) j + (Z_1 + Z_2) k \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \vec{A}_1 - \vec{A}_2 &= (X_1 i + Y_1 j + Z_1 k) - (X_2 i + Y_2 j + Z_2 k) \\ &= (X_1 - X_2) i + (Y_1 - Y_2) j + (Z_1 - Z_2) k \end{aligned}$$

$$3) \quad m \vec{A}_1 = m (X_1 i + Y_1 j + Z_1 k) = m X_1 i + m Y_1 j + m Z_1 k$$

$$\begin{aligned} 4) \quad \vec{A}_1 \cdot \vec{A}_2 &= (X_1 i + Y_1 j + Z_1 k) \cdot (X_2 i + Y_2 j + Z_2 k) \\ &= X_1 X_2 i^2 + X_1 Y_2 i j + X_1 Z_2 i k \\ &\quad + Y_1 X_2 j i + Y_1 Y_2 j^2 + Y_1 Z_2 j k \\ &\quad + Z_1 X_2 k i + Z_1 Y_2 k j + Z_1 Z_2 k^2 = X_1 X_2 + Y_1 Y_2 + Z_1 Z_2 \end{aligned}$$

6-6

$$\begin{aligned}
 5) \quad \vec{A}_1 \times \vec{A}_2 &= (X_1 i + Y_1 j + Z_1 k) \times (X_2 i + Y_2 j + Z_2 k) \\
 &= X_1 X_2 i \times i + X_1 Y_2 i \times j + X_1 Z_2 i \times k + Y_1 X_2 j \times i \\
 &\quad + Y_1 Y_2 j \times j + Y_1 Z_2 j \times k + Z_1 X_2 k \times i + Z_1 Y_2 k \times j \\
 &\quad + Z_1 Z_2 k \times k
 \end{aligned}$$

$$\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = (Y_1 Z_2 - Z_1 Y_2) i + (Z_1 X_2 - X_1 Z_2) j + (X_1 Y_2 - Y_1 X_2) k$$

我们不难看出，这个式子可以写成便于记忆的三阶行列式记号的形式。

$$\vec{A}_1 \times \vec{A}_2 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ X_1 & Y_1 & Z_1 \\ X_2 & Y_2 & Z_2 \end{vmatrix}$$

这个式子可用行列式展开或按第一列元素展开。

§ 6-4 向量导数

设有向量 $\vec{A}$ ，它的模与方向都按一定的规律随着某一变数 t 变化，则该向量称为变向量。以后将见到速度、加速度、动量、动量矩都是变向量。因此为进一步研究它的运动以前，我们介绍一下关于向量导数的知识。

设有变向量 $\vec{A}$ 按一定规律随时间而变化，即 $\vec{A}$ 是时间的连续的向量函数

$$\vec{A} = f(t)$$

在瞬时 $t_1, t_2, t_3, \dots$ ，该向量函数 $f(t)$ 各为 $\vec{A}_1, \vec{A}_2, \vec{A}_3, \dots$ 将各向量都从任意选定的某点 O 画出（图 6-6）在变数连续改变的情况下，各向量的末端形成某一曲线，该曲线称为向量 $\vec{A}$ 的末端曲线。

取任意两个邻近的瞬时 t 和 $t + \Delta t$ 。与这两个瞬时对应的向量函数的值各为 $\vec{A} = f(t)$ 和 $\vec{A} + \Delta \vec{A} = f(t + \Delta t)$ 。

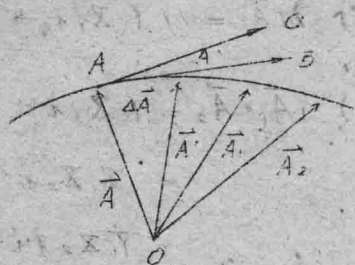


图 6-6

$\vec{A} = f(t + \Delta t)$ 並以 $\Delta \vec{A}$ 表示 $f(t + \Delta t)$ 与 $f(t)$ 之向量差，即

$$\Delta \vec{A} = f(t + \Delta t) - f(t)$$

在图 6-6 上 $\vec{A} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{A}' = \overrightarrow{OA'}$, $\Delta \vec{A} = \overrightarrow{AA'}$. 对应于自变量 t 的增量 Δt , 向量 $\Delta \vec{A}$ 称为向量函数 $f(t)$ 的增量。

作出新向量 $\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \overrightarrow{AB}$: 这向量的方向与向量 $\Delta \vec{A}$ 相同，

大小等于 $\Delta \vec{A}$ 的大小乘以纯量 $\frac{1}{\Delta t}$ 。

如果令 Δt 趋近于零而求其极限；当 $\Delta t \rightarrow 0$, 向量 $\Delta \vec{A} \rightarrow 0$. 此值 $\frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t}$ 的极限称为向量 $\vec{A}$ 对自变量 t 的导数，並以 $\frac{d\vec{A}}{dt}$ 表示即

$$\frac{d\vec{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$$

由此可知向量的导数还是向量它的大小等于 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta A}{\Delta t}$, 它的方向沿向量端点相应的切线方向。

从以上向量导数的定义，可推论得出下面一些向量导数的简单规则。

(一) 常向量向量的模和方向都不随时间改变) 的导数等于零即

$$\text{若 } \vec{A} = \text{常数} \quad \text{则} \quad \frac{d\vec{A}}{dt} = 0$$

(二) 向量之和的导数等于各向量导数之和

$$\frac{d}{dt} (\vec{A} + \vec{B} - \vec{C}) = \frac{d\vec{A}}{dt} + \frac{d\vec{B}}{dt} - \frac{d\vec{C}}{dt}$$

(三) 向量函数 $f(t)$ 与数性函数 $m(t)$ 的乘积的导数如下：

$$\frac{d}{dt} (mf) = \frac{dm}{dt} f + m \frac{df}{dt}$$

如若 $m = \text{常数}$, 则 $\frac{dm}{dt} = 0$ 在这种情况下

$$\frac{d}{dt} mf(t) = m \frac{df(t)}{dt}$$

(四) 两个变向量纯量的导数为

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \cdot \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \cdot \vec{B} + \vec{A} \cdot \frac{d\vec{B}}{dt}$$

(五) 两个变向量矢积的导数为

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B} + \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt}$$

以上各式的证明与数学分析中对应公式的证明完全一样，这里不作证明

(六) 单位向量的导数

设单位向量 $\vec{A} = \vec{A}^\circ(t)$ 在平面上变化，则它的向量端图是一个单位圆（图 6-7）根据向量导数的定义，

$$\frac{d\vec{A}^\circ}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}^\circ}{\Delta t}$$

$$\Delta \vec{A}^\circ = 2A^\circ \sin \frac{\Delta \theta}{2} \vec{B}^\circ$$

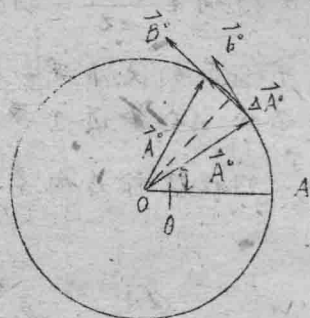


图 6-7

（其中 $\vec{B}^\circ$ 表示 $\Delta \vec{A}^\circ$ 方向的单位向量）
所以

$$\frac{d\vec{A}^\circ}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{A}^\circ}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} 2 \frac{\sin \frac{\Delta \theta}{2}}{\frac{\Delta \theta}{2}} \frac{\frac{\Delta \theta}{2}}{\Delta t} \vec{B}^\circ = \frac{d\theta}{dt} \vec{b}^\circ$$

其中 $\vec{b}^\circ$ 表示单位向量 $\vec{B}^\circ$ 的极限是与单位圆相切的单位向量（图 6-7）

所以，在平面上变化的单位向量对时间的导数是一向量，它的方向垂直于原单位向量 $\vec{A}^\circ$ 而指向原单位向量转动方向，它的模等于 $\left| \frac{d\theta}{dt} \right|$

(七) 向量导数投影定理

一向量的导数在固定轴上的投影等于该向量在设轴上的投影的导数

将变向量 $\vec{A}$ 沿固定直角坐标轴分解则得

$$\vec{A} = \vec{A}_x + \vec{A}_y + \vec{A}_z$$

即 $\vec{A} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$

其中 $X = f_1(t)$ $Y = f_2(t)$ $Z = f_3(t)$ 应用上述向量

规则 (一), (二) 和 (三) 得 $\frac{d\vec{A}}{dt} = \frac{dX}{dt}\vec{i} + \frac{dY}{dt}\vec{j} + \frac{dZ}{dt}\vec{k}$.

而这又可看作导数 $\frac{d\vec{A}}{dt}$ 沿坐标轴的分解式, 因而 $\vec{i}$, $\vec{j}$ 和 $\vec{k}$ 的系数就是 $\frac{d\vec{A}}{dt}$ 这向量在相应坐标轴上的投影, 所以得到

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_x = \frac{dX}{dt} \quad \left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_y = \frac{dY}{dt}$$

$$\left(\frac{d\vec{A}}{dt}\right)_z = \frac{dZ}{dt}$$

第七章

点的曲线运动

本章内容是论述一般的曲线运动。首先介绍点在所选坐标系中位置的确定方法，并给出运动方程式。为了进一步明了点在每一瞬时的运动情况，我们还论了点的速度与加速度。点的直线运动可看作是曲线运动的特殊情况。

§ 7-1 点的位置决定法 运动方程式

(一) 自然法 动质在空间所画的曲线称为点的轨迹。当点的运动轨迹已知时（图 7-1），我们可以用自然法来决定点的运动。例如，决定在铁路上行驶的列车的运动。在轨迹上，任意选取定点 O 作为计算长度的起点。动质 M 在轨迹上的位置，决定于动质 M 与 O 质间沿轨迹的距离（即弧长 OM ）。为了唯一地决定质 M 在轨迹上的位置，要选定轨迹的正方向。我们规定在 O 质的轨迹正向一边，弧长作为正值，而在 O 质的另一边，则作为负值。这样弧 OM 的长度，加上适当的正负号后，以 S 表示，称为动质的弧坐标， O 质称为原质，于是弧坐标 S 唯一地确定了某瞬时动质在轨迹上的位置；反之，动质在轨迹上的每一位置，必有相对应的，单一而完全确定的 S 值。所以当动质沿轨迹运动时，在每一已知瞬时 t ，动质在轨迹上具有一定的位置，因而有相应的，单一而完全确定的 S 值；换句话说， S 是 t 的单值连续函数：即

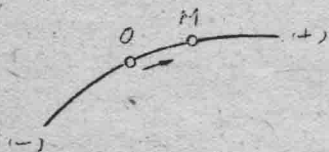


图 7-1

$$S = f(t)$$

(7-1)

当轨迹已知时，上式完全决定了质的运动，因而称为质沿已知轨迹的运动规律，或运动方程式。

(二) 坐标法 任意选取固定直角坐标系 oxy 后，动质 M 在每一瞬时相对此坐标系的位置，可以用动质的坐标 x, y, z 确定（图 7-2）。当动质 M 运动时，这些坐标都是时间 t 的单值连

续函数。

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t), \quad z = f_3(t) \quad (7-2)$$

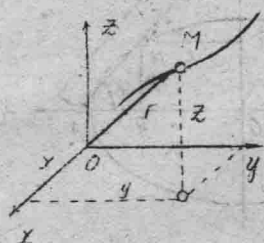


图 7-2

若已知函数 $f_1(t)$, $f_2(t)$ 和 $f_3(t)$, 则在每一瞬时, 质点在空间的位置都可以完全确定。方程组 (7-2) 称为以直角坐标表示点的运动规律, 或运动方程式。从这些方程式中消去时间 t , 可得动点的轨迹方程式。方程组 (7-2) 是以参数形式表示的动点的轨迹方程式。

当质点在平面上运动时, 以该平面作为坐标平面 Oxy , 则点的运动规律

$$x = f_1(t), \quad y = f_2(t) \quad (7-2)$$

(三) 向量法 质点 M 在空间的位置也可以用动点对于固定点 O 的向径 r 来确定。取 O 作为直角坐标系原点, 则向径的长度为:

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

向径与坐标轴夹角的余弦为:

$$\cos(r, i) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \cos(r, j) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cos(r, k) = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

当动点在空间运动时, 向径 r 的大小和方向一般都随时间而改变, 和前面一样, 由于某一瞬时, 动点只占据空间一个位置, 因而, 向径 r 是时间 t 的单值连续的向量函数, 即

$$\vec{r} = r(t) \quad (7-3)$$

当 $r(t)$ 已知时, 上式完全决定了点的运动, 因而称为向量表示的运动规律, 或运动方程式。

7-3

例 7-1 长度一定的直杆 AB 的两端分别在两固定且互相垂直的直线上滑动 (图 7-3)。杆上点 M 把杆长分成 a 和 b 二段, 已知杆的倾角 φ 依规律 $\varphi = \omega t$ 而变化, 其中 ω 为一常量, 求点 M 的运动规律和运动轨迹。

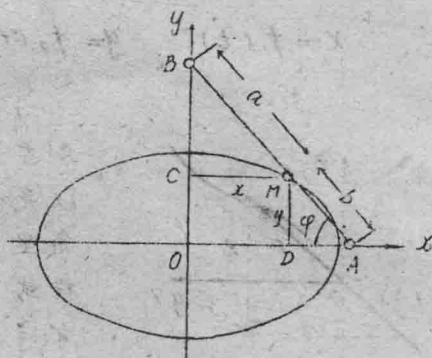


图 7-3

解: 以两固定且互相垂直的直线为坐标轴, 如图 7-3。

从 $\triangle BMC$ 及 $\triangle AMD$ 可得:

$$x = a \cos \varphi, \quad y = b \sin \varphi.$$

以 $\varphi = \omega t$ 代入, 得

$$x = a \cos \omega t, \quad y = b \sin \omega t.$$

这就是点 M 的运动规律。为了求出轨迹, 可以从上式中消去 t , 得

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \cos^2 \omega t + \sin^2 \omega t = 1$$

所以点 M 的轨迹是一个椭圆, 中心在原点, 而半轴长各为 a 与 b 。椭圆仪即按这原理制成。

§ 7-2 点的速度

点的运动方程式给出了点在所选的坐标系中每一瞬时的位置。但是为了要知道点运动的快慢和在每一瞬时的运动方向时, 需要引入速度的概念。

(一) 速度是点的位移对时间的导数。

设动点 M 按规律 $S = f(t)$ 沿已知轨迹运动 (图 7-4)。在某一瞬时 t , 动点在轨迹上的 M 点, 经过极为短促的时间间隔 Δt 之后, 即在瞬时 $t + \Delta t$, 该点的位

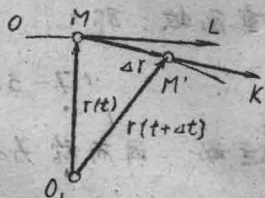


图 7-4

向量为 $r(t)$ 和 $r(t+\Delta t)$ 。向量 $\overrightarrow{MM'} = \Delta \vec{r}$ 称为在时间间隔 Δt 内的位移。从 M 点起，沿 $\overrightarrow{MM'}$ 方向作一向量 $\overrightarrow{MK}$ ，令它的模等于位移 $\overrightarrow{MM'}$ ，的大小与相应的时间间隔 Δt 的比值。向量 $\overrightarrow{MK}$ 称为在时间间隔 Δt 内点的平均速度，以 v^* 表示，则

$$v^* = \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \overrightarrow{MK}$$

令 Δt 趋近于零，这时， M' 点趋近于 M 点的位置。在极限的情况下，向量 v^* 的方向和轨迹在 M 点的切线方向相同而它的模等于 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t}$ 或 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$ 。图 7-4 上 ML 是 MK 所趋近的极限。

当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时，平均速度 v^* 的极限称为动点在瞬时 t 的速度，以 v 表示，则

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v^* = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{ML}$$

按向量导数的定义 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ ，因而

$$v = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad (7-4)$$

由上式可知，速度是动点的向量对时间的导数。

(二) 自然法表示速度 以 ΔS 表示动点的弧坐标在 Δt 时间内的增量，以 τ 表示沿轨迹正方向的切线单位向量。根据速度定义

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta S} \cdot \frac{\Delta S}{\Delta t} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta S} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t}$$

把式中 ΔS 理解为代数量，则不论点沿轨迹的正方向还是负方向运动，必有

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overrightarrow{MM'}}{\Delta S} = \tau,$$

而

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{dS}{dt},$$

所以

7-5

$$v = \frac{ds}{dt} \quad (7-5)$$

設速度 v 在 线正方向上的投影为 v_r , 則

$$v_r = \frac{ds}{dt}$$

显然, 速度 v 的大小等于 $\left| \frac{ds}{dt} \right|$, 因此速度 v 的方向沿轨迹的切线, 而它的模等于弧坐标 s 对时间导数的绝对值。

如导数 $\frac{ds}{dt}$ 是正值, 則 s 随时间增加而增加, 也就是点沿

轨迹的正向运动; 如 $\frac{ds}{dt}$ 是负值, 則点沿轨迹的负向运动。

(三) 根据速度在直角坐标轴的投影求速度的大小和方向 将向量等式 (7-4) 投影在直角坐标系各坐标轴上, 根据向量导数投影定理可知, 速度在坐标轴上的投影等于向径 r 在相应坐标轴上的投影对时间的导数, 但向径 r 在坐标轴上的投影就是动点的坐标 x, y 和 z , 因而速度的投影可表示如下:

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad v_y = \frac{dy}{dt}, \quad v_z = \frac{dz}{dt} \quad (7-6)$$

方程 (7-6) 表示: 速度在各坐标轴上的投影等于动点的各对应坐标对时间的一阶导数。

如已知以直角坐标表示动点的运动方程式: $x = f_1(t)$, $y = f_2(t)$ 和 $z = f_3(t)$, 則可以求得速度的投影。表示速度的大小和方向的余弦的公式如下:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} \quad (7-7)$$

$$\left. \begin{aligned} \cos(v, x) &= \frac{v_x}{v} = \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\ \cos(v, y) &= \frac{v_y}{v} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \\ \cos(v, z) &= \frac{v_z}{v} = \frac{\frac{dz}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (7-8)$$