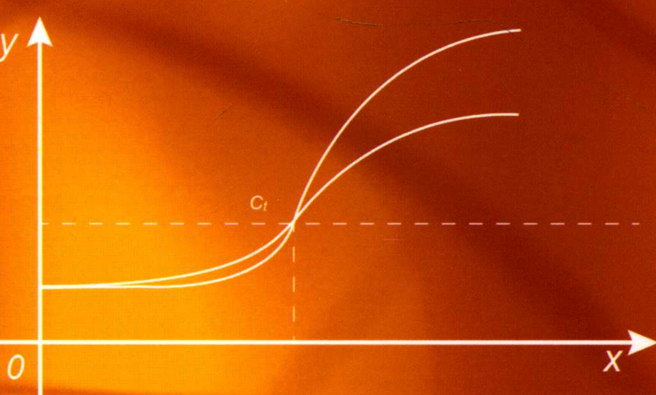
"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材辅导用书

医学高等数学学习指导与习题全解

（第3版）

马建忠　主编



科学出版社

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材辅导用书

医学高等数学
学习指导与习题全解

（第三版）

马建忠　主编

科学出版社
北　京

内 容 简 介

本书是按教育部"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材《医学高等数学》(第三版)编写的配套辅导教材. 全书共分8章,内容有函数、极限与连续,一元和多元函数微积分学,常微分方程,概率论基础,线性代数初步;每章由教学基本要求和知识要点、重点内容与侧重例题分析、解答题全解、客观模拟试题与答案或提示、章节模拟试题及试题答案或提示五部分组成,书末附一套医学高等数学考试模拟试题. 本书引导学生系统归纳总结基础知识,抓住主要内容,力求短时间内使学生顺利通过考试;同时提高学生分析和解决问题的能力.

本书是高等医学院校和中医药院校学生使用的辅导教材,也是医科夜大及网络本、专科生和考硕士研究生的辅导教材.

图书在版编目(CIP)数据

医学高等数学学习指导与习题全解/马建忠主编. —3版. —北京:科学出版社,2015. 6

"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材辅导用书

ISBN 978-7-03-044927-6

Ⅰ. 医… Ⅱ. 马… Ⅲ. 医用数学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. R311

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第126919号

责任编辑:刘 畅/责任校对:郑金红

责任印制:赵 博/封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

保定市中画美凯印刷有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004年10月第 一 版 开本:720×1000 1/16

2007年 8 月第 二 版 印张:13 1/4

2015年 6 月第 三 版 字数:267 000

2015年6月第十二次印刷

定价:25.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

《医学高等数学学习指导与习题全解》（第三版）编委会

主　编　马建忠

编　者　（按姓氏笔画排序）

马建忠（中国医科大学）

尹　玲（广东医学院）

申笑颜（沈阳医学院）

刘国良（赣南医学院）

刘照军（泰山医学院）

李　新（中国医科大学）

程李晴（新乡医学院）

前　言

《医学高等数学学习指导与习题全解》(第三版) 是专为教育部审批的"十二五"普通高等教育本科国家级规划教材和普通高等教育"十一五"国家级规划教材《医学高等数学》(第三版) 编写的配套辅导教材. 本书可作为高等医学和中医药院校本科生、专科生以及研究生的辅导教材，也为讲授医药类高等数学的教师提供了参考书.

学习指导与习题全解在编写过程中注重以下四个方面：①按照教育部非数学专业教学基础课程教学指导委员会制定的"医科数学教学基本要求"，使学生简单明了理解教学要求，掌握知识要点和主要内容；②通过医学高等数学解题分析，指导学生掌握基本概念、基本理论、基本方法与应用，同时使学生了解教学主要环节，力求节省时间，顺利通过考试；③经过多样化题型训练，提高学生分析和解决问题能力，达到培养学生抽象思维和创新意识；④注重培养学生应用数学知识处理简单易懂的医药学实际问题，大力加强数学与医药学自然联系.

全书分为八章，包括函数、极限与连续，一元和多元函数微积分学，常微分方程，概率论基础，线性代数初步. 各章编写了五部分内容：

一、教学基本要求和知识要点：教学基本要求是学生必须要求掌握的知识内容和要点，针对概念、性质和理论分为知道、了解、理解三个层次程度；针对运算、方法、应用分为会、掌握、熟练掌握三个层次程度. 知识要点通过层次程度术语系统总结教材内容，取其精华，对《医学高等数学》(第三版) 教材加 * 号扩充内容未加编写.

二、重点内容与侧重例题分析：将教学基本要求中的"了解"、"理解"、"掌握"和"熟练掌握"的重要概念、理论、方法、应用与典型例题相联系，阐述教材重要内容.

三、解答题全解：根据不同的教学内容，选择适量的不同难易程度的有序习题，进行习题全解，检查和巩固教学中的基础知识和主要内容.

四、客观模拟试题与答案或提示：该部分包括判断题、选择题和填空题，指导学生注意常见错误，正确加深理解概念、理论及相关的数学内容. 这样可使计算题、证明题和应用题包含的知识要点更加全面化.

五、章节模拟试题及试题答案或提示：该部分是针对教学基本要求筛选的和必须掌握的考试试题，其中大部分是计算题、证明题和应用题，它是教师教学过

程中多年积累的考试题，涉及基本内容和重要知识要点. 每章 A 卷试题难易程度适度，每章 B 卷试题加深了难题和综合试题的难度.

书后给出一套完整考试样题及参考答案.

由于水平有限，时间仓促，本书难免存在欠妥之处，衷心欢迎广大读者批评指正.

编　者

2015 年 5 月

目　录

第一章　函数、极限与连续

一、教学基本要求和知识要点

(一) 基本要求

1. 知道函数的概念，了解复合函数、分段函数、初等函数的定义，掌握函数复合与分解的方法；学生在高中学习了这部分内容，也可作为学生自学内容；

2. 理解极限(包括单侧极限)的描述性定义，熟练掌握极限的四则运算法则；

3. 理解无穷小量的概念，知道无穷小与无穷大的关系，掌握无穷小量的性质；

4. 理解两个重要的极限$\left(\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1,\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}\right)$，熟练掌握两个重要极限求法、无穷小量的比较及用初等变换计算各类函数的极限；

5. 理解连续与间断的概念，知道闭区间上连续函数的性质. 熟练掌握函数的间断点和连续点的判别方法.

基本要求层次程度术语顺序：①理解，熟练掌握；②了解，掌握；③知道，会.

(二) 知识要点

1. 函数的概念、复合函数、反函数、初等函数及分段函数(知道)

(1) 函数的概念　定义域 D 与对应规则 f 为函数两要素，两个函数相等当且仅当这两个要素完全相同. x_0 的邻域 $U(x_0,\delta)=\{x\mid |x-x_0|<\delta\}$是特殊的区域.

(2) 复合函数　设函数 $y=f(u)$，$u=\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$的值域在 $f(u)$的定义域内，$y=f[\varphi(x)]$是两个函数复合构成的复合函数. x 是自变量，u 是中间变量. 需注意是复合函数必须使内层函数的值域属于外层函数的定义域内.

(3) 反函数　设函数 $y=f(x)$的定义域为 D，值域为 R. 若对任意的 $y\in R$，在 D 上有唯一一个 x 值，使 $f(x)=y$ 成立，则称在 R 上定义了一个新的函数关系为 $y=f(x)$的反函数. 并记作 $x=f^{-1}(y)$. 函数与其反函数($y=f(x)$与 $y=f^{-1}(x)$)的图像关于直线 $y=x$ 对称. 人们习惯上把 $x=f^{-1}(y)$用 $y=f^{-1}(x)$表示.

(4) 初等函数　由常数和基本初等函数(即幂函数、指数函数、对数函数、三角函数和反三角函数)经过有限次四则运算和有限次复合运算而构成，而且用一个解析式子表示的函数，称为初等函数.

(5) 分段函数　在不同定义域上由不同解析式所表示的一个函数称为分段函数. 分段函数通常不是初等函数.

2. 函数的特性(知道)

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 为区间.

(1) 单调性　I 为 D 的子区间，若对任意两点 $x_1, x_2 \in I$，当 $x_1 < x_2$ 时，有 $f(x_1) < f(x_2)$（或 $f(x_1) > f(x_2)$），则称 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加（或单调减少）. 函数的图像随自变量 x 的增大 $f(x)$ 逐渐上升（或下降）.

(2) 奇偶性　设 D 关于原点对称，若任取 $x \in D$，有 $f(-x) = f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数；有 $f(-x) = -f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数. 偶函数图像关于 y 轴对称，奇函数图像关于原点对称.

(3) 有界性　设 I 为 D 中的某一子区间，若存在正数 M，对任取 $x \in I$，总有 $|f(x)| \leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 I 上是有界函数，否则在 I 上是无界函数. 有界函数的图像介于直线 $y = M$ 与 $y = -M$ 之间.

(4) 周期性　若存在常数 $T \neq 0$，对任意 $x \in D$，有 $f(x+T) = f(x)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 在 D 上为周期函数，T 为 $f(x)$ 的周期. 通常所说的周期是指最小正周期. 周期函数的图像在每个长度为 T 的子区间上对应曲线的形状相同.

3. 极限知识要点(理解)

(1) 数列极限　当 n 无限增大时，数列 $\{x_n\}$ 中的通项 x_n 无限接近某一确定的常数 A（即 $|x_n - A|$ 要多小有多小，无限接近于 0），常数 A 为数列 $\{x_n\}$ 的极限，记作 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$ 或 $x_n \to A(n \to \infty)$. 数列 $\{x_n\}$ 的极限不存在就是当 n 无限增大时，x_n 不趋近于一个确定的常数.

(2) 函数极限

1) $x\to\infty$ 时的定义　当 $|x|$ 无限增大（记为 $x\to\infty$）时，函数 $f(x)$ 无限趋近于某一确定的常数 A（即 $|f(x) - A|$ 要多小有多小，无限接近于 0），包括三种情况，$x\to\pm\infty, x\to+\infty, x\to-\infty$，它们分别记作 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 或 $f(x)\to A(x\to\infty)$；$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 或 $f(x)\to A(x\to+\infty)$；$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$ 或 $f(x)\to A(x\to-\infty)$.

2) $x\to x_0$ 时的定义　设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个邻域内有定义（在 x_0 点可以无定义），当 x 无限接近点 x_0（但 $x \neq x_0$）时，函数 $f(x)$ 无限接近某一确定的常数 A（即 $|f(x) - A|$ 要多小有多小，无限接近 0），则称 A 为 $f(x)$ 的极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$ 或 $f(x)\to A(x\to x_0)$. 当 x 仅从 x_0 的左侧（$x < x_0$）趋于 x_0 时，函数 $f(x)$ 无限接近常数 A，则称 A 为 $f(x)$ 的左极限，记作 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$；当 x 仅从 x_0 的

右侧($x>x_0$)趋于 x_0 时,函数 $f(x)$ 无限接近常数 A,则称 A 为 $f(x)$ 的右极限,记作 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$ 充分必要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)=A$.

函数 $f(x)$ 极限不存在,通常指当 $x\to x_0$ 时,$f(x)\to\infty$ 或 $f(x)$ 不趋近唯一数值 A(如左、右极限不相等);$x\to\infty$ 时,$f(x)\to\infty$ 或 $f(x)$ 不趋向一个确定常数.

(3) 极限四则运算法则　设 $\lim f(x)=A$,$\lim g(x)=B$,有下列法则成立:

法则 1.1　$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$;

法则 1.2　$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$;

法则 1.3　$\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{A}{B}$,其中 $B\neq 0$.

推论 1.1　$\lim[C\cdot f(x)]=C\cdot\lim f(x)=CA$,其中 C 是常数;

推论 1.2　$\lim[f(x)]^n=[\lim f(x)]^n=A^n$,其中 n 是正整数.

注意:法则成立的条件是:$\lim f(x)$ 与 $\lim g(x)$ 都存在,对于法则 3 还要求 $B\neq 0$,当这些条件不满足时,不要贸然使用这些法则.

(4) 两个重要极限见重点内容(熟练掌握).

(5) 无穷小与极限关系　$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x)=A$ 的充分必要条件是 $f(x)=A+\alpha(x)$,其中 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} \alpha(x)=0$.

4. 无穷小与无穷大(了解)

(1) 无穷小　极限为 0 的变量称为无穷小量(无穷小). 即若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(\text{或}x\to\infty)}} f(x)=0$,则 $f(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷小量(无穷小).

(2) 无穷大　绝对值无限增大的变量称为无穷大量(无穷大). 即若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}} f(x)=\infty$,则称 $f(x)$ 为 $x\to x_0$(或 $x\to\infty$)时的无穷大量(无穷大).

注意:无穷小与无穷大都是变量,"0"作为变量是无穷小,任何一个绝对值很小或很大的数均不是变量,都不能作为无穷小或无穷大;无穷小与无穷大与自变量变化过程的趋向绝对相关. 另外,在自变量的同一变化过程中,如果 $f(x)$ 为无穷大,则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小;如果 $f(x)$ 为无穷小($f(x)\neq 0$),则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大.

(3) 无穷小的性质

性质 1.1　有限个无穷小的和、差、积仍为无穷小.

性质 1.2　有界变量与无穷小的乘积仍为无穷小.

(4) 无穷小阶的比较

在自变量的同一变化过程中(即 $x \to x_0$ 或 $x \to \infty$),设 $\alpha = \alpha(x)(\alpha \neq 0)$ 与 $\beta = \beta(x)$均为无穷小量,

1) 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 0$,则称 β 是 α 的高阶无穷小,记作 $\beta = o(\alpha)$,或称 α 是 β 的低阶无穷小;

2) 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = C$(常数 $C \neq 0, 1$),则称 β 与 α 是同阶无穷小;

3) 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = 1$,则称 β 与 α 是等价无穷小,记作 $\beta \sim \alpha$;

4) 若$\lim \dfrac{\beta}{\alpha} = \infty$,则称 β 是比 α 较低阶无穷小,或称 α 是比 β 高阶无穷小,记作 $\alpha = o(\beta)$.

5. **函数的连续与间断(掌握)**

(1) 在一点连续的定义 设函数 $y = f(x)$在点 x_0 的某个邻域内有定义,若 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} [f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)] = 0$,则称 $f(x)$在点 x_0 连续. 与此等价定义是 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. 并且,左连续 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$;右连续 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. 函数 $f(x)$在点 x_0 连续充分必要条件是 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$. 可把任一点连续扩展到区间上讨论函数的连续.

(2) 在一点间断的概念 函数 $f(x)$的间断点,在点 x_0 处出现以下三种情况:

1) $f(x)$在点 x_0 无定义;

2) $f(x)$在点 x_0 有定义,但$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$不存在;

3) $f(x)$在点 x_0 有定义,且$\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$存在,但$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.

(3) 连续函数的性质

性质 1.3 设函数 $f(x)$,$g(x)$都在点 x_0 连续,则 $f(x) \pm g(x)$,$f(x) \cdot g(x)$,$\dfrac{f(x)}{g(x)}(g(x_0) \neq 0)$在点 x_0 处仍然连续;

性质 1.4 若 $u = \varphi(x)$在点 x_0 连续,且 $u_0 = \varphi(x_0)$,而 $f(u)$在点 u_0 连续,则复合函数 $f[\varphi(x)]$在点 x_0 连续. 并有

$$\lim_{x \to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x \to x_0} \varphi(x)] = f(u_0).$$

说明:求连续的复合函数的极限时,函数符号 f 与极限符号可以交换次序.

性质 1.5 基本初等函数在其定义域上连续；初等函数在其定义域的区间内连续.

6. 闭区间上连续函数的性质(知道)

设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续：

(1)(介值定理) 若 $f(a)\neq f(b)$，则对介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任意一个实值 C，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$ 成立.

(2)(零点定理) 若 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=0$. 这时方程 $f(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个实根.

(3)(最大值，最小值定理) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上至少取得最大值 M 和最小值 m 各一次.

(4)(有界性定理) $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，即存在正数 M，对任意的 $x\in[a,b]$，有 $|f(x)|\leqslant M$.

二、重点内容与侧重例题分析

1. 函数的定义域、表达式及函数特性的基本问题

例 1.1 求复合函数 $y=\arcsin[\ln(x+1)]$ 是由哪些基本初等函数合成的，并求它的定义域.

解 $y=\arcsin[\ln(x+1)]$ 是由 $y=\arcsin u, u=\ln v, v=x+1$ 复合而成的. 为了使 $y=\arcsin u, u=\ln(x+1)$ 有意义，有，$-1\leqslant\ln(1+x)\leqslant1$ 和 $x+1>0$ 同时成立，进而，$\frac{1}{e}-1\leqslant x\leqslant e-1$ 和 $x>-1$ 同时成立. 公共部分定义域 D：$[\frac{1}{e}-1, e-1]$.

例 1.2 已知 $f(\sqrt{x}-1)=x-2$，求 $f[f(x)]$ 表达式?

解 设 $u=\sqrt{x}-1$，则 $x=(u+1)^2$，$f(u)=(u+1)^2-2$；因为 $x\geqslant0$，则 $u\geqslant-1$，$f(u)$ 的定义域 D_u：$-1\leqslant u<+\infty$.

$$f[f(u)]=[f(u)+1]^2-2=[(u+1)^2-1]^2-2$$

即

$$f[f(x)]=[(x+1)^2-1]^2-2.$$

例 1.3 设 $f(x)$ 为定义在 $(-l,l)$ 内的奇函数，若 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，证明 $f(x)$ 在 $(-l,0)$ 内也单调增加.

证 设 $-l<x_1<x_2<0$，则 $0<-x_2<-x_1<l$. 因为 $f(x)$ 为奇函数，得 $f(x_2)-f(x_1)=-f(-x_2)+f(-x_1)$，又因为 $f(x)$ 在 $(0,l)$ 内单调增加，得 $f(-x_1)-f(-x_2)>0$，即 $x_1<x_2$ 时，$f(x_1)<f(x_2)$.

2. 极限的计算

利用复合函数的连续,可以求以下三种形式的两个重要极限:

$$\lim_{\square\to 0}\frac{\sin\square}{\square}=1 \text{ 和 } \lim_{\square\to\infty}\left(1+\frac{1}{\square}\right)^{\square}=\mathrm{e} \text{ 及 } \lim_{\square\to 0}(1+\square)^{\frac{1}{\square}}=\mathrm{e},$$

□既可代表简单变量,又可代表复杂表达式.

例 1.4　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$ 的极限.

解　$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{x^2+1-1}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{-\frac{x^2+1}{2}}\right]^{-2}\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{-1}$$

$$=\mathrm{e}^{-2}\cdot 1=\mathrm{e}^{-2}$$

例 1.5　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x\tan\ln(1+x)}{x\ln(1+x)}$ 的极限.

解　原式 $=\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{1}{\cos\ln(1+x)}\,\dfrac{\sin x}{x}\,\dfrac{\sin\ln(1+x)}{\ln(1+x)}\right]=1.$

例 1.6　求 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\sin(x-1)}{\ln x}$ 的极限.

解　设 $u=x-1$,则 $x\to 1$ 时,$u\to 0$,

$$\text{原式}=\lim_{u\to 0}\frac{\sin\sin u}{\ln(1+u)}=\lim_{u\to 0}\left[\frac{\sin\sin u}{\sin u}\cdot\frac{\sin u}{u}\cdot\frac{u}{\ln(1+u)}\right]$$

$$=1\cdot 1\cdot\lim_{u\to 0}\frac{1}{\ln(1+u)^{\frac{1}{u}}}=\frac{1}{\ln\mathrm{e}}=1.$$

例 1.7　已知 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+ax+b}{x-1}=3$,求 a 和 b 的值.

解　因为分母 $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)=0$,由本题极限存在,分子 $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+ax+b)=0$,则有 $1+a+b=0$,所以,以 $b=-a-1$ 代入原式得

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+ax-a-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1+a)}{x-1}$$

$$=\lim_{x\to 1}(x+1+a)=a+2=3,$$

故 $a=1,b=-2$.

例 1.8　求证 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(x^2\sin\dfrac{1}{x}\right)}{x}=0.$

证明　当 $x\neq 0$ 时,

$$0 \leqslant \left| \frac{\sin\left(x^2 \sin \frac{1}{x}\right)}{x} \right| \leqslant \frac{\left| x^2 \sin \frac{1}{x} \right|}{|x|} \leqslant \left| x \sin \frac{1}{x} \right| \leqslant |x|,$$

由两边夹定理，当 $|x| \to 0(x \to 0)$ 时，所求极限为 0.

3. 无穷小量的阶的比较

例 1.9 当 $x \to 0$ 时，试比较下列各题无穷小量阶.

(1) $\sec x - 1$ 与 $\frac{x^2}{2}$； (2) $\tan x - \sin x$ 与 x^3.

解 (1) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sec x - 1}{\frac{x^2}{2}} = \lim\limits_{x \to 0} \left(\dfrac{1}{\cos x} \cdot \dfrac{1 - \cos x}{\frac{x^2}{2}} \right) = 1.$

由无穷小阶比较定义 $\sec x - 1$ 与 $\frac{x^2}{2}$，当 $x \to 0$ 时是等价无穷小，即 $\sec x - 1 \sim \frac{x^2}{2}$ $(x \to 0)$.

(2) $$\lim_{x \to 0} \frac{\tan x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x (1 - \cos x)}{x^3 \cos x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{1 - \cos x}{x^2} \cdot \frac{1}{\cos x} \right) = 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

由无穷小阶比较定义，$\tan x - \sin x$ 与 x^3，当 $x \to 0$ 时是同阶无穷小.

4. 函数的连续及间断点的讨论

例 1.10 已知 a 和 b 是非零常数，函数

$$f(x) = \begin{cases} (1 + ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \\ \mathrm{e}, & x = 0, \\ \dfrac{\sin ax}{bx}, & x < 0 \end{cases}$$

在 $x=0$ 处连续，求 a 和 b 的值.

解 由于 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，所以

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^-} f(x) = f(0) = \mathrm{e},$$

因为

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (1 + ax)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \to 0^+} \left[(1 + ax)^{\frac{1}{ax}} \right]^a = \mathrm{e}^a,$$

又因

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \lim_{x \to 0^-} \frac{\sin ax}{ax} = \frac{a}{b},$$

所以

$$e^a = \frac{a}{b} = e,故\ a = 1, b = \frac{1}{e}.$$

例 1.11 讨论函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{e^{x-1}}, & x > 0, \\ \ln(1+x), & -1 < x \leqslant 0 \end{cases}$$

的间断点.

解 $x=0$ 为函数的分段点，讨论 $x=0$ 处左连续和右连续情况，$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^-} \ln(1+x) = 0$，$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x-1}} = e^{-1}$. 在 $x=0$ 处左右连续不相等. $x=0$ 为 $f(x)$ 的跳跃间断点.

例 1.12 证明 $\sin x + x + 1 = 0$ 在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

证明 显然 $f(x) = \sin x + x + 1$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上连续.

因为

$$f\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2} + 1 = -\frac{\pi}{2} < 0,$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + 1 = 2 + \frac{\pi}{2} > 0,$$

由介值定理，至少存在一点 $\xi \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$，使 $f(\xi) = 0$，即证 $\sin x + x + 1 = 0$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 内至少有一个根.

三、解答题全解

1. 求下列函数的定义域：

(1) $y = \sqrt{x - \sqrt{x}}$；

(2) $y = \left(\arcsin\dfrac{x-1}{5}\right) + \sqrt{25 - x^2}$；

(3) 用铁皮做一个容积为 V 的圆柱形罐头筒，试将它的全面积表示成底半径的函数，求它的定义域；

(4) 设细菌原有数为 N_0，每天的繁殖率为 r，问经过 x 天后数为多少？建立函数关系，并求其定义域.

解 (1) 若使原式成立必须有$\begin{cases} x \geqslant 0, \\ x-\sqrt{x} \geqslant 0, \end{cases}$ 即定义域为$[1,+\infty)$和$x=0$.

(2) 若使原式成立，必须有$\begin{cases} \left|\dfrac{x-1}{5}\right| \leqslant 1 & \Rightarrow \quad -4 \leqslant x \leqslant 6, \\ 25-x^2 \geqslant 0 & \Rightarrow \quad -5 \leqslant x \leqslant 5, \end{cases}$ 故函数的定义域为$[-4,5]$.

(3) 设圆柱底半径为r，高为h，则$v=\pi r^2 h$，$h=\dfrac{v}{\pi r^2}$，则圆柱形罐头筒的全面积

$S=2\pi r^2+2\pi rh=2\left(\pi r^2+\dfrac{v}{r}\right)$，其定义域为$(0,+\infty)$.

(4) 经过一天细菌数为$N_1=N_0+N_0 r=N_0(1+r)$，经过两天细菌数为$N_2=N_0(1+r)+N_0(1+r)\times r=N_0(1+r)^2$，…，故经过$x$天的细菌数为$N=N_0(1+r)^x$，其定义域为$x\in[0,+\infty)$.

2. 若$f(x)=\dfrac{|x-2|}{x+1}$，求$f(-2)$及$f(a+b)$.

解 $f(-2)=-4$，$f(a+b)=\dfrac{|a+b-2|}{a+b+1} \quad (a+b\neq -1)$.

3. 给出函数$y=e^{\sin^3\left(\frac{1}{x}\right)}$的分解式.

解 $y=e^u$，$u=v^3$，$v=\sin t$，$t=1/x$.

4. 若$f(x)=\ln x$，证明$f(x)+f(x+1)=f[x(x+1)]$.

证明 $f[x(x+1)]=\ln[x(x+1)]=\ln x+\ln(x+1)=f(x)+f(x+1)$.

5. 已知$f(x+1)=\begin{cases} x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1, \\ 2x, & 1<x\leqslant 2, \end{cases}$ 求$f(x)$.

解 令$x+1=t$，则$x=t-1$，

$$f(x+1)=f(t)=\begin{cases} (t-1)^2, & 0\leqslant t-1\leqslant 1 \\ 2(t-1), & 1<t-1\leqslant 2 \end{cases}=\begin{cases} (t-1)^2, & 1\leqslant t\leqslant 2, \\ 2(t-1), & 2<t\leqslant 3, \end{cases}$$

所以$f(x)=\begin{cases} (x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2, \\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3. \end{cases}$

6. 求下列函数的极限.

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{1+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{9}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$；　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}\right]$；

(3) $\lim\limits_{x\to 1}\left[\dfrac{3}{1-x^3}+\dfrac{1}{x-1}\right]$；　　(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^{n+1}+3^{n+1}}{2^n+3^n}$；