数学分析习题解析

（上册）

主编 杨熙鹏 邵子逊 刘颖植

陕西师范大学出版社

数学分析习题解析

（上　册）

主　编　杨熙鹏　邵子逊　刘颖植
副主编　朱长贵　杜兴朝　蒋棣华
编　委（按姓氏笔划排列）
王玉英　付　磊　田菊蓉
朱长贵　刘颖植　李　琨
李瑞婷　杜兴朝　邵子逊
胡洪萍　冯世建　张永锋
张同琦　杨花娥　杨熙鹏
蒋棣华　薛怀玉

陕西师范大学出版社

前　言

数学分析作为经典数学的重要基础知识的一个分支，其思想、内容和方法的内涵极为丰富。掌握数学分析的思想、内容和方法，是高等学校理工科学生进一步深化所学专业知识必不可少的理论基础，也是数学分析课程教学的基本目标。一部好的数学分析教材，不仅在于对数学分析的概念、基本理论和方法的准确、全面、系统的论述及其精练、严谨的逻辑性；而且在于配合教学内容精心选择并科学地编排习题。

华东师范大学数学系所编《数学分析》教材，有许多为大家公认的特点，其中的习题编排也具有一定的特色。近些年来不少的高等院校，包括一部分师范院校的数学专业都选其作为教材就足以说明这一点。

为了深究这部教材的思想性和科学性，更好地领会和掌握其习题编排的主旨，揭示其所体现的数学思想方法。陕西省咸阳师专、渭南师专、西安联合大学师范学院数学系的部分同志合作编写了《数学分析习题解析》一书，以便与各地的同志们进行交流和探讨。这部书以华东师范大学数学系所编《数学分析》 第二版为基础。为了使用方便，在编写顺序上保留了该教材的章节划分，内容分为两部分：一、教材说明（包括教学目的和要求，重点及难点）。二、习题解析。我们期望，这本书将能够成为从事数学分析课程教学的同行们的助手；能够成为高校理工科在校学生的一个有益的向导。特别是对于有志

报考数学专业硕士研究生的大学在校学生、各类在职人员、成人高校的数学专业学员们来说，《数学分析习题解析》无疑是一个有力的工具。

参加本书编写的人员有：付　磊（第一章、第二章前半部），李　琨（第二章后半部、第三章），邵子逊（第四章），薛怀玉（第六章、第七章前半部），张永锋（第七章后半部、第八章），杨花娥（第九章习题、第十章习题、第十一章习题），蒋棣华（第十二章习题），胡洪萍（第十三章习题），田菊蓉（第十四章习题），王玉英（第十五章习题），杨熙鹏（第九章～第十五章教材说明、第十六章），冯世建（第十七章、第二十一章），李瑞婷（第十八章），刘颖植（第十九章），张同琦（第二十章），朱长贵（第二十二章）。另外，第一～八章是由邵子逊、杜兴朝同志负责主持编写的；第九～十六章是由杨熙鹏、蒋棣华同志负责主持编写的；第十七～二十二章是由刘颖植、朱长贵同志负责主持编写的。杨熙鹏同志完成了全书的统稿工作。

为了保证质量，增强效果，特邀请陕西师范大学数学系曹怀信博士担任本书的主审。特表示诚挚的谢意！

限于编者的教学经验和水平，本书中的疏漏及至错误、不当之处在所难免。恳望各方面同行学仁及读者予以指导批评，促其完善。

编　者

1993 年 7 月

目录

(上册)

第一章　实数集与函数

一、教材说明

本章内容分为实数及其性质、绝对值不等式、实数集的确界与确界原理和函数的概念以及具有某些特殊性质的函数，函数是本课程研究的基本对象，确界原理是理论研究的基本立足点，绝对值不等式则是分析论证的重要工具。

1. 目的与要求

本章的教学目的是：

(1) 使学生掌握实数的基本性质和确界原理，建立起实数集确界的清晰概念；

(2) 使学生深刻理解函数的概念，熟悉与函数性态有关的一些常见述语。

本章的教学要求是：

(1) 理解并熟练运用实数的有序性、稠密性与封闭性。掌握邻域的概念；

(2) 牢记并熟练运用实数绝对值的有关性质以及几个常见的不等式；

(3) 理解实数集确界的定义及确界原理，并在有关命题证明中正确地加以运用；

(4) 深刻理解函数的定义以及复合函数、反函数、有界函

数、单调函数和初等函数的定义，熟悉函数的各种表示方法；

(5) 牢记基本初等函数的定义、性质及其图象。会求初等函数的存在域，会分析初等函数的复合关系。

2. **重点与难点**

本章的重点是实数集、函数、确界的概念及其有关性质。难点是确界的定义及应用。

二、题　　解

§1　实　　数

1. 设 a 为有理数，x 为无理数，试证明：

(1)　$a+x$ 是无理数；

(2)　当 $a\neq 0$ 时，ax 是无理数。

证　(1) 假设 $a+x$ 是有理数，则 $(a+x)-a=x$ 是有理数，这与题设 x 是无理数相矛盾。故 $a+x$ 是无理数。

(2) 假设 ax 是有理数，则 $\frac{ax}{a}=x$ 为有理数，这与题设 x 是无理数相矛盾。故 ax 是无理数。

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解：

(1)　$x(x^2-1)>0$；　(2)　$|x-1|<|x-3|$；

(3)　$\sqrt{x-1}-\sqrt{2x-1}<\sqrt{3x-2}$；

(4)　$x^3+x\geqslant 1$.

解　(1) 由原不等式有

$$\begin{cases}x>0\\x^2-1>0\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x<0\\x^2-1<0\end{cases}$$

前一个不等式组的解是 $x>1$，后一不等式组的解是

$-1<x<0$,故(1)的解如图1-1。

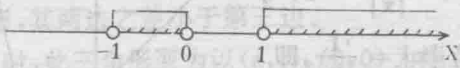

图1-1

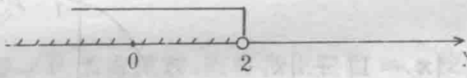

图1-2

(2) 由原不等式有 $\left|\frac{x-1}{x-3}\right|<1$,于是有 $\left|1+\frac{2}{x-3}\right|<1$,所以 $-1<1+\frac{2}{x-3}<1$,解此不等式,得 $x<2$,故(2)的解如图1-2。

(3) 由题设知 $\sqrt{3x-2}\geqslant 0$, $\sqrt{X-1}-\sqrt{2X-1}\geqslant 0$

从而不等式两端平方,有 $x-1+2x-1-$

$2\sqrt{x-1+2x-1}\geqslant 3x-2$,因之有

$2\sqrt{(x-1)(2x-1)}\leqslant 0$,所以 $\sqrt{(x-1)(2x-1)}=0$. 由此解得 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{2}$. 但 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{2}$ 均不符合原不等式,所以原不等式无解.

(4) 由原不等式有 $x^3-1>-x$, 原不等式的解如图1-3.

3. 设 $x\neq 0$,证明 $|x+\frac{1}{x}|\geqslant 2$,并说明其中等号何时成立。

证　因 x 与 $\frac{1}{x}$ 同号,从而 $|x+\frac{1}{x}|=|x|+\frac{1}{|x|}\geqslant$

$2\sqrt{|x|\cdot\frac{1}{|x|}}=2$，等号当且仅当 $|x|=\frac{1}{|x|}$，即 $x=\pm 1$ 时成立。

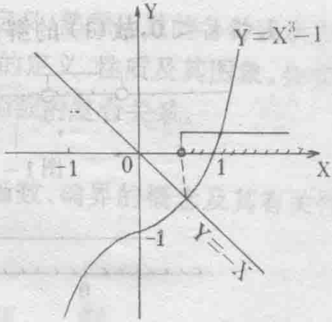

图 1－3

4. 证明：对任何 $x\in R$，有

(1) $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$；

(2) $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$。

证 (1) 因为 $1-|x-1|\leqslant|1-x+1|=|x-2|$，所以 $|x-1|+|x-2|\geqslant 1$。

(2) 因为 $2-|x-3|\leqslant|x-1|\leqslant|x-1|+|x-2|$，所以 $|x-1|+|x-2|+|x-3|\geqslant 2$。

5. 设 a、b、c 为三个任意的实数，证明：

$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|\leqslant|b-c|$

你能说明此不等式的几何意义吗？

证　对任意的正实数 a、b、c，有

$2a^2bc\leqslant a^2(b^2+c^2)$，

两端同时加 $a^4+b^4c^2$，有

$a^4+b^2c^2+2a^2bc\leqslant a^2b^2+a^2c^2+a^4+b^2c^2$，

即　$(a^2+bc)^2\leqslant(a^2+b^2)(a^2+c^2)$，

所以　$a^2+bc\leqslant\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}$

$2a^2-2\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)}\leqslant-2bc$，

两端再同加 b^2+c^2，则有

$|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{a^2+c^2}|\leqslant|b-c|$.

其几何意义为：当 $b\neq c$ 时，以 (a,b)，(a,c)，$(0,0)$ 三点为顶点的三角形，其两边之差小于第三边。

当 $b=c$ 时，此三角形变为以 (a,c)，$(0,0)$ 为端点的线段，此时等号成立。

6. 设 P 为自然数，证明：若 P 不是完全平方数，则 $\sqrt{P}$ 是无理数。

证　假设 $\sqrt{P}$ 为有理数，则存在正整数 m、n 使 $\sqrt{P}=\frac{m}{n}$，且 m 与 n 互素。于是 $n^2P=m^2$. 可见 n 能整除 m^2. 由于 m 与 n 互素，从而它们的最大公约数为 1，由辗转相除法知：存在整数 u、v 使 $mu+nv=1$。从而 $m^2u+mnv=m$. 于是 n 可整除 m，这样 $n=1$. 因此 $p=m^2$. 这与 P 不是完全平方数相矛盾，故 $\sqrt{P}$ 为无理数.

7. 设 a 与 b 为已知实数，试用不等式符号（不用绝对值符号）表示下列不等式的解：

(1)　$|x-a|<|x-b|$；　(2)　$|x-a|<x-b$；

(3)　$|x^2-a|<b$.

解　(1) 原不等式等价于 $\left|\frac{a-b}{x-b}-1\right|<1$，因此有 $0<\frac{a-b}{x-b}<2$. 由此不等式有

$$\begin{cases}x>b\\0<a-b<2x-2b\end{cases}\quad\text{或}\begin{cases}x<b\\0>a-b>2x-2b\end{cases}$$

即 $\begin{cases}x>b\\x>\frac{a+b}{2}\\a>b\end{cases}$　或 $\begin{cases}x<b\\x<\frac{a+b}{2}\\a<b\end{cases}$ 故当 $a>b$ 时，不等式

的解为 $x > \dfrac{a+b}{2}$,当 $a < b$ 时,不等式的解为 $x < \dfrac{a+b}{2}$,当 $a = b$ 时,不等式无解.

(2) 原不等式等价于

$$\begin{cases} x > b \\ x - a < x - b \end{cases} 且 \begin{cases} x > b \\ a - x < x - b \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} x > b \\ a > b \end{cases} 且 \begin{cases} x > b \\ x > \dfrac{a+b}{2} \end{cases}$$

故当 $a > b$ 时 $x > \dfrac{1+b}{2}$;当 $a \leqslant b$ 时无解.

(3) 由原不等式有 $a - b < x^2 < a + b$. 所以当 $a \leqslant b$ 时,$\sqrt{a-b} < |x| < \sqrt{a+b}$,即 $\sqrt{a-b} < x < \sqrt{a+b}$ 或 $\sqrt{a-b} > x > -\sqrt{a+b}$;当 $|a| < b$ 时,$|x| < \sqrt{a+b}$ 即 $-\sqrt{a+b} < x < \sqrt{a+b}$,其余情况均无解.

8. 设 $x > 0, b > 0$ 且 $a \neq b$,证明 $\dfrac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\dfrac{a}{b}$ 之间.

解　因为 $1 - \dfrac{a+x}{b+x} = \dfrac{b-a}{b+x}, \dfrac{a+x}{b+x} - \dfrac{a}{b} = \dfrac{x(b-a)}{b(b+x)}$ 且 $x > 0, b > 0$,所以当 $a > b$ 时,$1 < \dfrac{a+x}{b+x} < \dfrac{a}{b}$;当 $a < b$ 时,$\dfrac{a}{b} < \dfrac{a+x}{b+x} < 1$. 故 $\dfrac{a+x}{b+x}$ 总介于 1 与 $\dfrac{a}{b}$ 之间.

9. 利用平均值不等式证明:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

证　令

$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1 + \dfrac{1}{n}, x_{n+1} = 1$. 由平均值不等式有

$$\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} < \frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

即 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} < 1+\frac{1}{n+1}$,所以

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

10. 证明柯西(Cauchy)不等式:设$\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$与$\{b_1,a_2,\cdots,b_n\}$为两组实数,则有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

证 对于任意的实数x,都有$\sum\limits_{i=1}^n (a_ix+b)^2 \geqslant 0$. 令$A=\sum\limits_{i=1}^n a_i^2$, $B=\sum\limits_{i=1}^n a_ib_i$, $C=\sum\limits_{i=1}^n b_i^2$,于是有$Ax^2+2Bx+C\geqslant 0$. 不妨设$A>0$,令$x=-\frac{B}{A}$,则有$B^2-AC\leqslant 0$,即

$$\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

§2 数集与确界原理

1. 用区间表示下列不等式的解:

(1) $|1-x|-x\geqslant 0$; (2) $\left|x+\frac{1}{x}\right|\leqslant 6$;

(3) $(x-a)(x-b)(x-c)>0$,

(a、b、c 为常数且 $a<b<C$);

(4) $\sin x \geqslant \frac{\sqrt{2}}{2}$.

解 (1) 由原不等式有

$$\begin{cases} x<1 \\ 1-x-x\geqslant 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x\geqslant 1 \\ x-1-x\geqslant 0 \end{cases}$$

前一不等式组的解为 $x\leqslant\frac{1}{2}$,后一不等式组无解. 所以原不等式的解为 $x\in(-\infty,\frac{1}{2}]$.

(2) 由 $|x+\frac{1}{x}|\leqslant 6$ 有 $-6\leqslant x+\frac{1}{x}\leqslant 6$. 当 $x>0$ 时, $-6x\leqslant x^2+1\leqslant 6x$,它的解为 $x\in[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$;当 $x<0$ 时, $6x\leqslant x^2+1\leqslant -6x$,它的解为 $x\in[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]$. 所以原不等式的解为 $x\in[-3-2\sqrt{2},-3+2\sqrt{2}]\cup[3-2\sqrt{2},3+2\sqrt{2}]$.

(3) 当 $x\leqslant a$ 或 $b\leqslant x\leqslant c$ 时,由 $a<b<c$ 知 $(x-a)(x-b)(x-c)\leqslant 0$,所以 $x\leqslant a$ 与 $b\leqslant x\leqslant c$ 都不是原不等式的解. 当 $a<x<b$ 或 $x>c$ 时,由 $a<b<c$ 知 $(x-a)(x-b)(x-c)>0$,所以 $a<x<b$ 与 $x>c$ 都是原不等式的解,原不等式的解是

$x\in(a,b)\cup(c,+\infty)$.

(4) 当 $x\in[\frac{\pi}{4},\frac{3}{4}\pi]$ 时, $\sin x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$. 由正弦函数的周期性知 $\mathrm{Sin}x\geqslant\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解是

$x\in\left[2k\pi+\frac{\pi}{4},2K\pi+\frac{3}{4}\pi\right]$,其中 K 为整数.

2. 设 S 为非空数集,试对下列概念给出定义:

(1) 数集S没有上界；(2) 数集S无界；

解 (1)设S是一非空数集.若对任意的$M>0$,总存在$x_0\in S$,使$x_0>M$,则称数集S没有上界.

(2)设S是一非空数集,若对任意的$M>0$,总存在$x_0\in S$,使$|x_0|>M$,则称数集S无界.

3.证明由$P_8(3)$确定的数集有上界,无下界.

证 $S=\{y|y=2-x^2\quad x\in R\}$.

对任意的$X\in R$,$y=2-x^2\leqslant 2$,所以数集S有上界2.而对任意的$M>0$,取$x_1=\sqrt{3+m}$,则$y_1=2=x_1^2=2-3-M=-1-M\in S$,但$y_1<-M$,因之数集S无下界.

4.求下列数集的上、下确界,并依定义加以验证。

(1) $S=\{x|x^2<2\}$；

(2) $S=\{x|x=n!,n$为自然数$\}$；

(3) $S=\{x|x$为$(0,1)$内的无理数$\}$；

(4) $S=\{x|x=1-\dfrac{1}{2^n},n=1,2,\cdots\}$.

解 (1)$\sup S=\sqrt{2}$,$\inf S=-\sqrt{2}$,以下依定义加以验证.由$x^2<2$知$-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}$,因之对任意的$x\in S$,有$x<\sqrt{2}$且$x>-\sqrt{2}$,即$\sqrt{2}$、$-\sqrt{2}$分别是S的上、下界。又对任意的$\varepsilon>0$,不妨设$\varepsilon<2\sqrt{2}$,于是存在$x_0=\sqrt{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}$,$x_1=-\sqrt{2}+\dfrac{\varepsilon}{2}$,使$x_0$、$x_1\in S$,但$x_0>\sqrt{2}-\varepsilon$,$x_1<-\sqrt{2}+\varepsilon$,所以$\sup S=\sqrt{2}$,$\inf S=-\sqrt{2}$.

(2) $\sup S=+\infty$,$\inf S=1$,以下依定义验证.对任意的$x\in S$,$1\leqslant x<+\infty$,所以1是S的下界.对任意的自然数n,$n!<+\infty$,所以$\sup S=+\infty$;对任意的$\varepsilon>0$,存在$x_1=1!=$