

主编

杨熙鹏

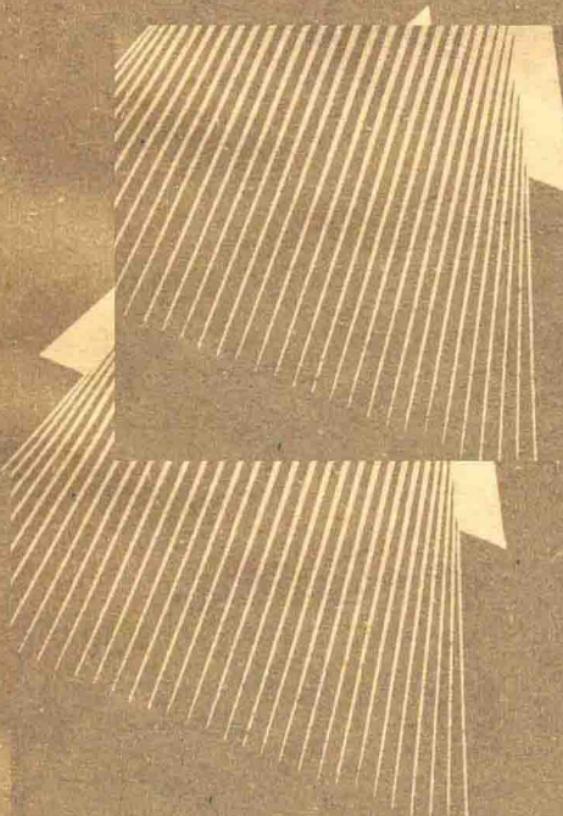
邵子逊

刘颖植

陕西师范大学出版社

数学分析习题解析

(上册)



数学分析习题解析

(上 册)

主 编 杨熙鹏 邵子逊 刘颖植

副主编 朱长贵 杜兴朝 蒋棣华

编 委 (按姓氏笔划排列)

王玉英 付 磊 田菊蓉

朱长贵 刘颖植 李 琪

李瑞婷 杜兴朝 邵子逊

胡洪萍 冯世建 张永锋

张同琦 杨花娥 杨熙鹏

蒋棣华 薛怀玉

本书是根据数学分析这门课程的需要而编写的。为了使书的内容更丰富、更实用，我们在编写过程中参考了国内外许多教材和参考书，吸收了国内外学者的研究成果。在编写过程中，我们特别注意了数学分析的基本概念、基本定理、基本方法和基本技巧的训练，力求做到深入浅出、简明扼要。同时，我们还注重了数学分析与实际问题的结合，使学生能够更好地掌握数学分析的基本思想和方法。本书适用于大学本科各专业作为教材或参考书，也可供广大数学爱好者自学使用。

陕西师范大学出版社

前言

编者之一李林生，主编刘玉泉、王元和王鹤鸣，副主编王鹤鸣、王元和王鹤鸣，由高等教育出版社于1991年出版。本书是《数学分析》的第二版，由原来四册分为三册，即上册（第一章至第五章）、中册（第六章至第十二章）和下册（第十三章至第十七章）。本书在编写上力求做到深入浅出，简明扼要，逻辑严密，论证严谨，叙述清晰，例题丰富，习题多样，便于自学。

数学分析作为经典数学的重要基础知识的一个分支，其思想、内容和方法的内涵极为丰富。掌握数学分析的思想、内容和方法，是高等学校理工科学生进一步深化所学专业知识必不可少的理论基础，也是数学分析课程教学的基本目标。一部好的数学分析教材，不仅在于对数学分析的概念、基本理论和方法的准确、全面、系统的论述及其精练、严谨的逻辑性；而且在于配合教学内容精心选择并科学地编排习题。

华东师范大学数学系所编《数学分析》教材，有许多为大家公认的特点，其中的习题编排也具有一定的特色。近些年来不少的高等院校，包括一部分师范院校的数学专业都选其作为教材就足以说明这一点。

为了深究这部教材的思想性和科学性，更好地领会和掌握其习题编排的主旨，揭示其所体现的数学思想方法。陕西省咸阳师专、渭南师专、西安联合大学师范学院数学系的部分同志合作编写了《数学分析习题解析》一书，以便与各地的同志们进行交流和探讨。这部书以华东师范大学数学系所编《数学分析》第二版为基础。为了使用方便，在编写顺序上保留了该教材的章节划分，内容分为两部分：一、教材说明（包括教学目的和要求，重点及难点）。二、习题解析。我们期望，这本书将能够成为从事数学分析课程教学的同行们的助手；能够成为高校理工科在校学生的一个有益的向导。特别是对于有志

报考数学专业硕士研究生的大学在校学生、各类在职人员、成人高校的数学专业学员们来说，《数学分析习题解析》无疑是一个有力的工具。

参加本书编写的人员有：付 磊（第一章、第二章前半部），李 琨（第二章后半部、第三章），邵子逊（第四章），薛怀玉（第六章、第七章前半部），张永锋（第七章后半部、第八章），杨花娥（第九章习题、第十章习题、第十一章习题），蒋棣华（第十二章习题），胡洪萍（第十三章习题），田菊蓉（第十四章习题），王玉英（第十五章习题），杨熙鹏（第九章～第十五章教材说明、第十六章），冯世建（第十七章、第二十一章），李瑞婷（第十八章），刘颖植（第十九章），张同琦（第二十章），朱长贵（第二十二章）。另外，第一～八章是由邵子逊、杜兴朝同志负责主持编写的；第九～十六章是由杨熙鹏、蒋棣华同志负责主持编写的；第十七～二十二章是由刘颖植、朱长贵同志负责主持编写的。杨熙鹏同志完成了全书的统稿工作。

为了保证质量，增强效果，特邀请陕西师范大学数学系曹怀信博士担任本书的主审。特表示诚挚的谢意！

限于编者的教学经验和水平，本书中的疏漏及至错误、不当之处在所难免。恳望各方面同行学仁及读者予以指导批评，促其完善。

编 者
1993年7月

目 录

(P3)	第一章 实数集与函数	(1)
(C1)	一、教材说明	(1)
(C1)	二、题 解	(2)
(S1)	§ 1 实数	(2)
(S1)	§ 2 数集与确界原理	(7)
(S1)	§ 3 函数概念	(13)
(S1)	§ 4 具有某些特性的函数	(19)
(P3)	第二章 数列极限	(34)
(C1)	一、教材说明	(34)
(C1)	二、题 解	(35)
(S1)	§ 1 数列极限的概念	(35)
(S1)	§ 2 收敛数列的性质	(40)
(S1)	§ 3 数列极限存在的条件	(47)
(P3)	第三章 函数极限	(65)
(C1)	一、教材说明	(65)
(C1)	二、题 解	(66)
(S1)	§ 1 函数极限的概念	(66)
(S1)	§ 2 函数极限的性质	(73)
(S1)	§ 3 函数极限存在的条件	(80)
(S1)	§ 4 两个重要极限	(85)

§ 5 无穷小量与无穷大量·阶的比较	(89)
第四章 函数的连续性	(109)
一、教材说明	(109)
二、题解	(110)
§ 1 连续性概念	(110)
§ 2 连续函数的性质	(118)
§ 3 初等函数的连续性	(127)
第五章 导数与微分	(141)
一、教材说明	(141)
二、题解	(143)
§ 1 导数概念	(143)
§ 2 求导法则	(149)
§ 3 微 分	(158)
§ 4 高阶导数与高阶微分	(161)
§ 5 参量方程所确定的函数的导数	(169)
第六章 微分学基本定理与不定式极限	(182)
一、教材说明	(182)
二、题解	(183)
§ 1 中值定理	(183)
§ 2 不定式极限	(193)
§ 3 泰勒公式	(201)
第七章 运用导数研究函数性态	(215)
一、教材说明	(215)
二、题解	(216)
§ 1 函数的单调性与极值	(216)

§ 2 函数的凸性与拐点	(227)
§ 3 函数图像讨论	(235)
§ 4 方程的近似解	(243)
第八章 极限与连续性(续)	(251)
一、教材说明	(251)
二、题解	(252)
§ 1 实数完备性的基本定理	(252)
§ 2 闭区间上连续函数性质的证明	(259)
§ 3 上极限和下极限	(262)
第九章 不定积分	(275)
一、教材说明	(275)
二、题解	(276)
§ 1 不定积分概念与基本积分公式	(276)
§ 2 换元积分法与分部积分法	(280)
§ 3 有理函数和可化为有理函数的积分	(292)
第十章 定积分	(320)
一、教材说明	(320)
二、题解	(321)
§ 1 定积分	(321)
§ 2 可积条件	(323)
§ 3 定积分的性质	(328)
§ 4 微积分学基本定理·定积分计算	(336)
§ 5 对数函数与指数函数	(347)
§ 6 非正常积分	(351)
第十一章 定积分的应用	(386)
一、教材说明	(386)

二、题解	(387)
§ 1 平面图形的面积	(387)
§ 2 由截面面积求立体体积	(391)
§ 3 曲线的弧长与曲率	(394)
§ 4 旋转曲面的面积	(398)
§ 5 定积分在物理上的某些应用	(400)
§ 6 定积分的近似计算	(404)
习题一	(411)
习题二	(415)
习题三	(418)
习题四	(421)
习题五	(424)
习题六	(427)
习题七	(430)
习题八	(433)
习题九	(436)
习题十	(439)
习题十一	(442)
习题十二	(445)
习题十三	(448)
习题十四	(451)
习题十五	(454)
习题十六	(457)
习题十七	(460)
习题十八	(463)
习题十九	(466)
习题二十	(469)
习题二十一	(472)
习题二十二	(475)
习题二十三	(478)
习题二十四	(481)
习题二十五	(484)
习题二十六	(487)
习题二十七	(490)
习题二十八	(493)
习题二十九	(496)
习题三十	(499)
习题三十一	(502)
习题三十二	(505)
习题三十三	(508)
习题三十四	(511)
习题三十五	(514)
习题三十六	(517)
习题三十七	(520)
习题三十八	(523)
习题三十九	(526)
习题四十	(529)
习题四十一	(532)
习题四十二	(535)
习题四十三	(538)
习题四十四	(541)
习题四十五	(544)
习题四十六	(547)
习题四十七	(550)
习题四十八	(553)
习题四十九	(556)
习题五十	(559)
习题五十一	(562)
习题五十二	(565)
习题五十三	(568)
习题五十四	(571)
习题五十五	(574)
习题五十六	(577)
习题五十七	(580)
习题五十八	(583)
习题五十九	(586)
习题六十	(589)
习题六十一	(592)
习题六十二	(595)
习题六十三	(598)
习题六十四	(601)
习题六十五	(604)
习题六十六	(607)
习题六十七	(610)
习题六十八	(613)
习题六十九	(616)
习题七十	(619)
习题七十一	(622)
习题七十二	(625)
习题七十三	(628)
习题七十四	(631)
习题七十五	(634)
习题七十六	(637)
习题七十七	(640)
习题七十八	(643)
习题七十九	(646)
习题八十	(649)
习题八十一	(652)
习题八十二	(655)
习题八十三	(658)
习题八十四	(661)
习题八十五	(664)
习题八十六	(667)
习题八十七	(670)
习题八十八	(673)
习题八十九	(676)
习题九十	(679)
习题九十一	(682)
习题九十二	(685)
习题九十三	(688)
习题九十四	(691)
习题九十五	(694)
习题九十六	(697)
习题九十七	(700)
习题九十八	(703)
习题九十九	(706)
习题一百	(709)
习题一百零一	(712)
习题一百零二	(715)
习题一百零三	(718)
习题一百零四	(721)
习题一百零五	(724)
习题一百零六	(727)
习题一百零七	(730)
习题一百零八	(733)
习题一百零九	(736)
习题一百一十	(739)
习题一百一十一	(742)
习题一百一十二	(745)
习题一百一十三	(748)
习题一百一十四	(751)
习题一百一十五	(754)
习题一百一十六	(757)
习题一百一十七	(760)
习题一百一十八	(763)
习题一百一十九	(766)
习题一百二十	(769)
习题一百二十一	(772)
习题一百二十二	(775)
习题一百二十三	(778)
习题一百二十四	(781)
习题一百二十五	(784)
习题一百二十六	(787)
习题一百二十七	(790)
习题一百二十八	(793)
习题一百二十九	(796)
习题一百三十	(799)
习题一百三十一	(802)
习题一百三十二	(805)
习题一百三十三	(808)
习题一百三十四	(811)
习题一百三十五	(814)
习题一百三十六	(817)
习题一百三十七	(820)
习题一百三十八	(823)
习题一百三十九	(826)
习题一百四十	(829)
习题一百四十一	(832)
习题一百四十二	(835)
习题一百四十三	(838)
习题一百四十四	(841)
习题一百四十五	(844)
习题一百四十六	(847)
习题一百四十七	(850)
习题一百四十八	(853)
习题一百四十九	(856)
习题一百五十	(859)
习题一百五十一	(862)
习题一百五十二	(865)
习题一百五十三	(868)
习题一百五十四	(871)
习题一百五十五	(874)
习题一百五十六	(877)
习题一百五十七	(880)
习题一百五十八	(883)
习题一百五十九	(886)
习题一百六十	(889)
习题一百六十一	(892)
习题一百六十二	(895)
习题一百六十三	(898)
习题一百六十四	(901)
习题一百六十五	(904)
习题一百六十六	(907)
习题一百六十七	(910)
习题一百六十八	(913)
习题一百六十九	(916)
习题一百七十	(919)
习题一百七十一	(922)
习题一百七十二	(925)
习题一百七十三	(928)
习题一百七十四	(931)
习题一百七十五	(934)
习题一百七十六	(937)
习题一百七十七	(940)
习题一百七十八	(943)
习题一百七十九	(946)
习题一百八十	(949)
习题一百八十一	(952)
习题一百八十二	(955)
习题一百八十三	(958)
习题一百八十四	(961)
习题一百八十五	(964)
习题一百八十六	(967)
习题一百八十七	(970)
习题一百八十八	(973)
习题一百八十九	(976)
习题一百九十	(979)
习题一百九十一	(982)
习题一百九十二	(985)
习题一百九十三	(988)
习题一百九十四	(991)
习题一百九十五	(994)
习题一百九十六	(997)
习题一百九十七	(1000)

第一章 实数集与函数

一、教材说明

本章内容分为实数及其性质、绝对值不等式、实数集的确界与确界原理和函数的概念以及具有某些特殊性质的函数，函数是本课程研究的基本对象，确界原理是理论研究的基本立足点，绝对值不等式则是分析论证的重要工具。

1. 目的与要求

本章的教学目的是：

(1) 使学生掌握实数的基本性质和确界原理，建立起实数集确界的清晰概念；

(2) 使学生深刻理解函数的概念，熟悉与函数性态有关的一些常见述语。

本章的教学要求是：

(1) 理解并熟练运用实数的有序性、稠密性与封闭性。掌握邻域的概念；

(2) 牢记并熟练运用实数绝对值的有关性质以及几个常见的不等式；

(3) 理解实数集确界的定义及确界原理，并在有关命题证明中正确地加以运用；

(4) 深刻理解函数的定义以及复合函数、反函数、有界函

数、单调函数和初等函数的定义，熟悉函数的各种表示方法；

(5) 熟记基本初等函数的定义、性质及其图象。会求初等函数的存在域，会分析初等函数的复合关系。

2. 重点与难点

本章的重点是实数集、函数、确界的概念及其有关性质。难点是确界的定义及应用。

二、题解

断出某类实数，方程不直根数，而此其类数实数代容内章本

，连函由得出来数集某下 § 1 实 数

本基 1. 设 a 为有理数， x 为无理数，试证明：

(1) $a + x$ 是无理数；

(2) 当 $a \neq 0$ 时， ax 是无理数。

证 (1) 假设 $a + x$ 是有理数，则 $(a + x) - a = x$ 是有理数，这与题设 x 是无理数相矛盾。故 $a + x$ 是无理数。

(2) 假设 ax 是有理数，则 $\frac{ax}{a} = x$ 为有理数，这与题设 x 是无理数相矛盾。故 ax 是无理数。

2. 试在数轴上表示出下列不等式的解：

$$(1) x(x^2 - 1) > 0; \quad (2) |x - 1| < |x - 3|;$$

$$(3) \sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} < \sqrt{3x-2};$$

$$(4) x^3 + x \geq 1.$$

解 (1) 由原不等式有

$$\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - 1 > 0 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < 0 \\ x^2 - 1 < 0 \end{cases}$$

前一个不等式组的解是 $x > 1$ ，后一不等式组的解是

$-1 < x < 0$, 故(1)的解如图 1-1。

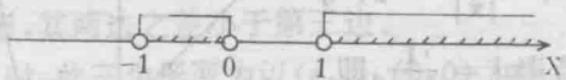


图 1-1

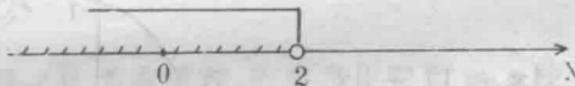


图 1-2

(2) 由原不等式有 $\left| \frac{x-1}{x-3} \right| < 1$, 于是有 $\left| 1 + \frac{2}{x-3} \right| < 1$, 所以 $-1 < 1 + \frac{2}{x-3} < 1$, 解此不等式, 得 $x < 2$, 故(2)的解如图 1-2。

(3) 由题设知 $\sqrt{3x-2} \geq 0$, $\sqrt{x-1} - \sqrt{2x-1} \geq 0$ 从而不等式两端平方, 有 $x-1+2x-1-2\sqrt{x-1+2x-1} \geq 3x-2$, 因之有 $2\sqrt{(x-1)(2x-1)} \leq 0$, 所以 $\sqrt{(x-1)(2x-1)} = 0$. 由此解得 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{2}$. 但 $x=1$ 或 $x=\frac{1}{2}$ 均不符合原不等式, 所以原不等式无解。

(4) 由原不等式有 $x^3-1 > -x$, 原不等式的解如图 1-3.

3. 设 $x \neq 0$, 证明 $|x + \frac{1}{x}| \geq 2$, 并说明其中等号何时成立。

证 因 x 与 $\frac{1}{x}$ 同号, 从而 $|x + \frac{1}{x}| = |x| + \frac{1}{|x|} \geq 2$.

$$2\sqrt{|x| \cdot \frac{1}{|x|}} = 2, \text{ 等}$$

号当且仅当 $|x| = \frac{1}{|x|}$, 即 $x = \pm 1$ 时成立。

4. 证明: 对任何 $x \in \mathbb{R}$, 有

$$(1) |x - 1| + |x - 2| \geq 1;$$

$$(2) |x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \geq 2.$$

证 (1) 因为 $1 - |x - 1| \leq |1 - x + 1| = |x - 2|$, 所以 $|x - 1| + |x - 2| \geq 1$.

(2) 因为 $2 - |x - 3| \leq |x - 1| \leq |x - 1| + |x - 2|$, 所以 $|x - 1| + |x - 2| + |x - 3| \geq 2$.

5. 设 a, b, c 为三个任意的实数, 证明:

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|$$

你能说明此不等式的几何意义吗?

证 对任意的正实数 a, b, c , 有

$$2a^2bc \leq a^2(b^2 + c^2),$$

两端同时加 $a^4 + b^4c^2$, 有

$$a^4 + b^2c^2 + 2a^2bc \leq a^2b^2 + a^2c^2 + a^4 + b^2c^2,$$

$$\text{即 } (a^2 + bc)^2 \leq (a^2 + b^2)(a^2 + c^2),$$

$$\text{所以 } a^2 + bc \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)}$$

$$2a^2 - 2\sqrt{(a^2 + b^2)(a^2 + c^2)} \leq -2bc,$$

两端再同加 $b^2 + c^2$, 则有

$$|\sqrt{a^2 + b^2} - \sqrt{a^2 + c^2}| \leq |b - c|.$$

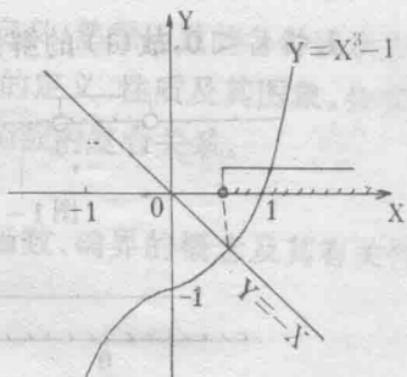


图 1-3

其几何意义为：当 $b \neq c$ 时，以 $(a, b), (a, c), (0, 0)$ 三点为顶点的三角形，其两边之差小于第三边。

当 $b = c$ 时，此三角形变为以 $(a, c), (0, 0)$ 为端点的线段，此时等号成立。

6. 设 P 为自然数，证明：若 P 不是完全平方数，则 \sqrt{P} 是无理数。

证 假设 \sqrt{P} 为有理数，则存在正整数 m, n 使 $\sqrt{P} = \frac{m}{n}$ ，且 m 与 n 互素。于是 $n^2 P = m^2$ 。可见 n 能整除 m^2 。由于 m 与 n 互素，从而它们的最大公约数为 1，由辗转相除法知：存在整数 u, v 使 $mu + nv = 1$ 。从而 $m^2 u + mn v = m$ 。于是 n 可整除 m ，这样 $n = 1$ 。因此 $P = m^2$ 。这与 P 不是完全平方数相矛盾，故 \sqrt{P} 为无理数。

7. 设 a 与 b 为已知实数，试用不等式符号（不用绝对值符号）表示下列不等式的解：

$$(1) |x - a| < |x - b|; \quad (2) |x - a| < x - b;$$

$$(3) |x^2 - a| < b.$$

解 (1) 原不等式等价于 $\left| \frac{a - b}{x - b} - 1 \right| < 1$ ，因此有 $0 < \frac{a - b}{x - b} < 2$ 。由此不等式有

$$\begin{cases} x > b \\ 0 < a - b < 2x - 2b \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < b \\ 0 > a - b > 2x - 2b \end{cases}$$

$$\text{即} \begin{cases} x > b \\ x > \frac{a+b}{2} \\ a > b \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} x < b \\ x < \frac{a+b}{2} \\ a < b \end{cases}$$

故当 $a > b$ 时，不等式

的解为 $x > \frac{a+b}{2}$, 当 $a < b$ 时, 不等式的解为 $x < \frac{a+b}{2}$, 当 $a = b$ 时, 不等式无解.

(2) 原不等式等价于

$$\begin{cases} x > b \\ x - a < x - b \end{cases} \text{且} \begin{cases} x > b \\ a - x < x - b \end{cases}$$

于是

$$\begin{cases} x > b \\ a > b \end{cases} \text{且} \begin{cases} x > b \\ x > \frac{a+b}{2} \end{cases}$$

故当 $a > b$ 时 $x > \frac{1+b}{2}$; 当 $a \leq b$ 时无解.

(3) 由原不等式有 $a - b < x^2 < a + b$. 所以当 $a \leq b$ 时, $\sqrt{a-b} < |x| < \sqrt{a+b}$, 即 $\sqrt{a-b} < x < \sqrt{a+b}$ 或 $\sqrt{a-b} > x > -\sqrt{a+b}$; 当 $|a| < b$ 时, $|x| < \sqrt{a+b}$ 即 $-\sqrt{a+b} < x < \sqrt{a+b}$, 其余情况均无解.

8. 设 $x > 0, b > 0$ 且 $a \neq b$, 证明 $\frac{a+x}{b+x}$ 介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

解 因为 $1 - \frac{a+x}{b+x} = \frac{b-a}{b+x}, \frac{a+x}{b+x} - \frac{a}{b} = \frac{x(b-a)}{b(b+x)}$

且 $x > 0, b > 0$, 所以当 $a > b$ 时, $1 < \frac{a+x}{b+x} < \frac{a}{b}$; 当 $a < b$ 时, $\frac{a}{b} < \frac{a+x}{b+x} < 1$. 故 $\frac{a+x}{b+x}$ 总介于 1 与 $\frac{a}{b}$ 之间.

9. 利用平均值不等式证明:

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

证 令

$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 1 + \frac{1}{n}, x_{n+1} = 1$. 由平均值不等式有

$$\sqrt[n+1]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} < \frac{n\left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} \quad (1)$$

即 $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\frac{n}{n+1}} < 1 + \frac{1}{n+1}$, 所以

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}.$$

10. 证明柯西(Cauchy)不等式: 设 $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ 与 $\{b_1, a_2, \dots, b_n\}$ 为两组实数, 则有

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right). \quad (2)$$

证 对于任意的实数 x , 都有 $\sum_{i=1}^n (a_i x + b_i)^2 \geq 0$. 令 $A = \sum_{i=1}^n a_i^2$, $B = \sum_{i=1}^n a_i b_i$, $C = \sum_{i=1}^n b_i^2$, 于是有 $Ax^2 + 2Bx + C \geq 0$. 不妨设 $A > 0$, 令 $x = -\frac{B}{A}$, 则有 $B^2 - AC \leq 0$, 即

$$\left(\sum_{i=1}^n a_i b_i\right)^2 \leq \left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right) \left(\sum_{i=1}^n b_i^2\right).$$

§ 2 数集与确界原理

1. 用区间表示下列不等式的解:

$$(1) |1-x| - x \geq 0; \quad (2) |x + \frac{1}{x}| \leq 6;$$

$$(3) (x-a)(x-b)(x-c) > 0,$$

(a, b, c 为常数且 $a < b < c$);

$$(4) \sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

解 (1) 由原不等式有

$$\begin{cases} x < 1 \\ 1 - x - x \geq 0 \end{cases} \text{或} \begin{cases} x \geq 1 \\ x - 1 - x \geq 0 \end{cases}$$

前一不等式组的解为 $x \leq \frac{1}{2}$, 后一不等式组无解. 所以原不等式的解为 $x \in (-\infty, \frac{1}{2}]$.

(2) 由 $|x + \frac{1}{x}| \leq 6$ 有 $-6 \leq x + \frac{1}{x} \leq 6$. 当 $x > 0$ 时, $-6x \leq x^2 + 1 \leq 6x$, 它的解为 $x \in [3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$; 当 $x < 0$ 时, $6x \leq x^2 + 1 \leq -6x$, 它的解为 $x \in [-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}]$. 所以原不等式的解为 $x \in [-3 - 2\sqrt{2}, -3 + 2\sqrt{2}] \cup [3 - 2\sqrt{2}, 3 + 2\sqrt{2}]$.

(3) 当 $x \leq a$ 或 $b \leq x \leq c$ 时, 由 $a < b < c$ 知 $(x - a)(x - b)(x - c) \leq 0$, 所以 $x \leq a$ 与 $b \leq x \leq c$ 都不是原不等式的解. 当 $a < x < b$ 或 $x > c$ 时, 由 $a < b < c$ 知 $(x - a)(x - b)(x - c) > 0$, 所以 $a < x < b$ 与 $x > c$ 都是原不等式的解, 原不等式的解是

$$x \in (a, b) \cup (c, +\infty).$$

(4) 当 $x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{3}{4}\pi]$ 时, $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$. 由正弦函数的周期性知 $\sin x \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 的解是

$$x \in \left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2K\pi + \frac{3}{4}\pi\right], \text{其中 } K \text{ 为整数.}$$

2. 设 S 为非空数集, 试对下列概念给出定义:

(1) 数集 S 没有上界; (2) 数集 S 无界;

解 (1) 设 S 是一非空数集. 若对任意的 $M > 0$, 总存在 $x_0 \in S$, 使 $x_0 > M$, 则称数集 S 没有上界.

(2) 设 S 是一非空数集, 若对任意的 $M > 0$, 总存在 $x_0 \in S$, 使 $|x_0| > M$, 则称数集 S 无界.

3. 证明由 $P_8(3)$ 确定的数集有上界, 无下界.

证 $S = \{y | y = 2 - x^2, x \in \mathbb{R}\}$.

对任意的 $X \in \mathbb{R}, y = 2 - x^2 \leq 2$, 所以数集 S 有上界 2. 而对任意的 $M > 0$, 取 $x_1 = \sqrt{3 + M}$, 则 $y_1 = 2 - x_1^2 = 2 - 3 - M = -1 - M \in S$, 但 $y_1 < -M$, 因之数集 S 无下界.

4. 求下列数集的上、下确界, 并依定义加以验证.

(1) $S = \{x | x^2 < 2\}$;

(2) $S = \{x | x = n!, n \text{ 为自然数}\}$;

(3) $S = \{x | x \text{ 为}(0, 1) \text{ 内的无理数}\}$;

(4) $S = \{x | x = 1 - \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \dots\}$.

解 (1) $\sup S = \sqrt{2}, \inf S = -\sqrt{2}$, 以下依定义加以验证. 由 $x^2 < 2$ 知 $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$, 因之对任意的 $x \in S$, 有 $x < \sqrt{2}$ 且 $x > -\sqrt{2}$, 即 $\sqrt{2}, -\sqrt{2}$ 分别是 S 的上、下界. 又对任意的 $\epsilon > 0$, 不妨设 $\epsilon < 2\sqrt{2}$, 于是存在 $x_0 = \sqrt{2} - \frac{\epsilon}{2}, x_1 = -\sqrt{2} + \frac{\epsilon}{2}$, 使 $x_0, x_1 \in S$, 但 $x_0 > \sqrt{2} - \epsilon, x_1 < -\sqrt{2} + \epsilon$, 所以 $\sup S = \sqrt{2}, \inf S = -\sqrt{2}$.

(2) $\sup S = +\infty, \inf S = 1$, 以下依定义验证. 对任意的 $x \in S, 1 \leq x < +\infty$, 所以 1 是 S 的下界. 对任意的自然数 n , $n! < +\infty$, 所以 $\sup S = +\infty$; 对任意的 $\epsilon > 0$, 存在 $x_1 = 1!$ =