

数学学术文库·计算数学

特征有限元法及其在土壤水分运动数值模拟中的应用

张耀峰 著



Characteristic Finite Element Method
and Application in Numerical Simulation
for Water Movement in Soils



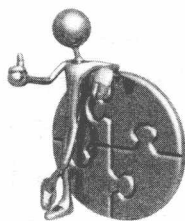
华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

数学学术文库·计算数学

特征有限元法及其在土壤水分 运动数值模拟中的应用

张耀峰 著



华中科技大学出版社

<http://www.hustp.com>

中国·武汉

图书在版编目(CIP)数据

特征有限元法及其在土壤水分运动数值模拟中的应用/张耀峰著. —武汉: 华中科技大学出版社, 2015. 3

ISBN 978-7-5680-0773-3

I. ①特… II. ①张… III. ①有限元法-应用-土壤水-运动-数值模拟 IV. ①S152.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 065659 号

特征有限元法及其在土壤水分运动数值模拟中的应用

张耀峰 著

策划编辑: 王汉江

责任编辑: 余 涛

封面设计: 范翠璇

责任校对: 邹 东

责任监印: 周治超

出版发行: 华中科技大学出版社(中国·武汉)

武昌喻家山 邮编: 430074 电话: (027)81321913

录 排: 武汉市洪山区佳年华文印部

印 刷: 湖北新华印务有限公司

开 本: 710mm×1000mm 1/16

印 张: 9.5

字 数: 184 千字

版 次: 2015 年 5 月第 1 版第 1 次印刷

定 价: 28.00 元



本书若有印装质量问题, 请向出版社营销中心调换
全国免费服务热线: 400-6679-118 竭诚为您服务
版权所有 侵权必究

内 容 简 介

本书介绍了特征有限元法在土壤水分运动数值模拟中的应用。首先总结了土壤水分运动基本理论和土壤水分运动数值模拟概况,然后对土壤水分运动方程进行了特征有限元离散和误差估计,在此基础上对入渗、蒸发、波涌灌溉条件下以及分层土壤水分运动分别进行了特征有限元数值模拟,最后对一类新形式的土壤水分运动方程进行了介绍。

本书可以作为高校应用数学、计算数学或土壤学、农水工程等专业的教师和研究生的参考书,也可供相关专业技术人员参考。

前 言

土壤水分是土壤系统的重要组成部分,是构成土壤—植物—大气连续体系的关键因素。土壤水分运动过程伴随着各种物质和能量的转化,其运动规律可以用土壤水分运动基本方程来描述。由于该基本方程为非线性的对流-扩散方程,不易于求得解析解,一般采用数值解法。本书针对不同条件下的土壤水分运动进行特征有限元数值模拟,主要研究内容如下。

第1章介绍了土壤水分运动的基本理论。首先对土壤水、干容重、孔隙率、渗流速度、土壤含水率、土水势、土壤水吸力、比水溶重、土壤导水率、扩散率等基本概念进行了系统介绍,然后介绍了饱和土壤水分流动的达西定律以及非饱和土壤水分流动的达西定律,在此基础上重点介绍了以不同参数为因变量的各种非饱和土壤水分运动基本方程。

第2章简单介绍了几种常用的土壤水分运动数值模拟方法,包括有限差分法、一般有限元法、特征线法以及特征有限元法。分析了这些方法在研究土壤水分运动规律中发挥的作用以及优缺点。

第3章结合以含水率为因变量和以负压为因变量两种情况下的土壤水分运动方程,给出了应用特征有限元方法求解对流-扩散方程的一般思路,并对后面几章涉及的两类对流-扩散方程的特征有限元算法误差进行了估计,从而为用特征有限元法求解土壤水分运动模型的数值解提供了理论保证。

第4章和第5章针对入渗条件下的土壤水分运动问题,分别采用以含水率为因变量和以负压为因变量的土壤水分运动方程作为数学模型,利用特征有限元法对其进行了数值计算,并与实验数据进行了拟合对比。

第6章利用特征有限元法分别建立了蒸发条件下和波涌灌溉条件下非饱和土壤水分运动的特征有限元数值模型,并利用该模型对土壤水分蒸发和波涌灌溉两种情况进行了数值模拟。

第7章利用特征有限元法,分别建立了入渗及蒸发条件下的分层土壤水分运

动的特征有限元数值模型,并且对入渗条件下的分层土壤水分运动进行了数值模拟。

第8章建立了一个与土壤水分运动基本方程等价的新形式模型,讨论了用新模型建立特征有限元数值模型的优越性。

张耀峰

2015年2月

目 录

第 1 章 土壤水分运动基本理论	(1)
1.1 基本概念	(1)
1.1.1 土壤水	(1)
1.1.2 干容重、孔隙率与渗流速度	(2)
1.1.3 土壤含水率	(3)
1.1.4 土水势	(4)
1.1.5 土壤水吸力、比水溶重	(7)
1.1.6 土壤导水率、扩散率	(8)
1.2 饱和土壤水分运动	(10)
1.2.1 饱和土壤水分流动的达西定律	(10)
1.2.2 饱和流方程	(11)
1.3 非饱和土壤水分流动的达西定律	(12)
1.4 非饱和土壤水分运动基本方程	(15)
1.4.1 基本方程	(15)
1.4.2 基本方程的各种形式	(17)
本章小结	(23)
第 2 章 土壤水分运动数值模拟方法概述	(24)
2.1 有限差分法	(25)
2.2 有限单元法	(26)
2.3 特征线法	(27)
2.4 特征有限单元法	(28)
本章小结	(29)
第 3 章 土壤水分运动方程的特征有限元算法理论分析	(30)
3.1 基础知识	(30)
3.1.1 几个不等式	(30)
3.1.2 符号与公式	(31)

3.2	以含水率为因变量的土壤水分运动方程的特征有限元离散与误差分析	(32)
3.2.1	特征有限元离散	(33)
3.2.2	误差分析	(35)
3.3	以负压为因变量的土壤水分运动方程的特征有限元离散与误差分析	(39)
3.3.1	特征有限元离散	(40)
3.3.2	误差分析	(41)
	本章小结	(44)
第4章	入渗条件下非饱和土壤水分运动的特征有限元数值模拟	(45)
4.1	以含水率为因变量的一维非饱和土壤水分运动的数学模型	(45)
4.2	特征有限元数值模型	(46)
4.2.1	$\bar{x}_j$ 及 $\bar{\theta}_j^{k-1}$ 的处理	(51)
4.2.2	初边值条件的处理	(54)
4.2.3	非线性方程组的线性化处理	(55)
4.3	特征有限元数值模拟	(60)
4.3.1	数值计算程序框图	(60)
4.3.2	数值模拟	(60)
	本章小结	(63)
第5章	入渗条件下非饱和土壤水分负压变化的特征有限元数值模拟	(64)
5.1	以负压为因变量的一维非饱和土壤水分运动的数学模型	(64)
5.2	特征有限元数值模型	(65)
5.2.1	$\bar{x}_j$ 及 $\bar{h}_j^{k-1}$ 的处理	(69)
5.2.2	初边值条件的处理	(72)
5.2.3	非线性方程组的线性化处理	(72)
5.3	特征有限元数值模拟	(74)
5.3.1	模型检验	(74)
5.3.2	模拟实例	(76)
	本章小结	(78)
第6章	蒸发及波涌灌溉条件下非饱和土壤水分运动的特征有限元数值模拟	(79)
6.1	蒸发条件下非饱和土壤水分运动的特征有限元数值模拟	(79)
6.1.1	蒸发条件下一维非饱和土壤水分运动的数学模型	(79)
6.1.2	特征有限元数值模型	(80)

6.1.3 特征有限元数值模拟	(85)
6.2 波涌灌溉条件下非饱和土壤水分运动的特征有限元数值模拟	(88)
6.2.1 波涌灌溉条件下一维非饱和土壤水分运动的数学模型	(89)
6.2.2 特征有限元数值模型	(90)
6.2.3 特征有限元数值模拟	(91)
本章小结	(94)
第7章 分层土壤水分运动的特征有限元数值模拟	(95)
7.1 入渗条件下分层土壤水分运动的特征有限元数值模拟	(95)
7.1.1 入渗条件下一维分层土壤水分运动的数学模型	(95)
7.1.2 特征有限元数值模型	(96)
7.1.3 特征有限元数值模拟	(100)
7.2 蒸发条件下分层土壤水分运动的特征有限元数值模拟	(102)
7.2.1 蒸发条件下一维分层土壤水分运动的数学模型	(102)
7.2.2 特征有限元数值模型	(103)
本章小结	(105)
第8章 一种新形式的土壤水分运动模型及其特征有限元数值模型	(106)
8.1 Richards 模型的等价模型的建立	(107)
8.2 新模型的特征有限元数值模型	(108)
8.3 特征有限元数值模型比较	(110)
本章小结	(112)
附录	(113)
参考文献	(140)

第1章 土壤水分运动基本理论

“民以食为天”，农作物的生长自然离不开土壤。土壤是自然生态环境的一个重要组成部分，它是一种由固、液、气三相组成的多孔系统。固相基质由大小、形状和排列不同的土粒组成，土粒的排列和组合决定了土壤孔隙特征，以及水、空气在土壤孔隙中传输和存在的形式。

土壤的固、液、气三相组成中，土壤水分是最活跃的因素，也是土壤的重要组成部分。土壤中各种物质的传输和能量的转化都依靠土壤水的运动，土壤水分运动过程中水分的形态、数量和能量是影响植物生长的重要因素。研究土壤水分运动规律对节水灌溉、农田水利等具有重要意义^{[1][2][3]}。

1.1 基本概念

1.1.1 土壤水

土壤水是指包气带土壤孔隙中存在的和土壤颗粒吸附的水分。土壤水是土壤的重要组成部分，是影响土壤肥力和自净能力的主要因素。土壤水的增长、消退和动态变化与降水、蒸发、径流、生物吸收、植物蒸腾等有密切关系。在天然条件下以土壤系统为研究对象，可以将土壤水的变化量表示为^[2]

$$S = \sum_{i=1}^5 S_i - \sum_{j=6}^9 S_j \quad (1.1)$$

式中：

S ——土壤蓄水变化量；

S_1 ——降水补给量；

S_2 ——灌溉补给量；

S_3 ——地下水补给量；

S_4 ——河流、湖泊侧渗补给量；

S_5 ——水汽凝结量；

S_6 ——地下渗流量；

S_7 ——土面蒸发量；

S_8 ——植物蒸腾量；

S_9 ——生物吸收量。

广义的土壤水是土壤中各种形态水分的总称,大体上可分为固态水、气态水和液态水三种。因土壤水在土壤中会受到分子引力、毛管力、重力等不同力的作用,根据受力的不同,通常又可以将土壤水分分为吸湿水、薄膜水、毛管水和重力水等四种形态。

1. 吸湿水

土壤固体颗粒表面分子将周围空气中水汽分子吸附于表面形成的水分称为吸湿水,又称强结合水。土壤颗粒对它的吸力很大,离颗粒表面很近的水分子,排列十分紧密,受到的吸引力相当于 10000 个大气压。这一层水具有固态水性质,不能流动,但可转化为气态水而移动。

2. 薄膜水

当土壤吸湿水已经达到最大限度后,土壤颗粒的能力不足以进一步吸附活动力较强的水汽分子,但是通过吸持周围环境中的液态水分子,从而在吸湿水的外层形成一层薄膜状液态水,称为薄膜水,又称弱结合水。土壤颗粒对它的吸引力相对减弱,与液态水性质相似,能从薄膜较厚处向较薄处移动。

3. 毛管水

将土壤颗粒间狭小的缝隙看作是细小的圆形毛管,依靠毛管的吸引力被保持在土壤孔隙中的水称为毛管水。毛管水的性质和运动主要取决于毛管力的作用,即毛管壁与水分之间的吸持力及与水的表面张力的共同作用。毛管水可传递静水压力,被植物根系全部吸收。

4. 重力水

受重力作用而沿着土壤空隙移动的水分称为重力水,具有一般液态水的性质。重力水除土壤上层滞水外会随着重力作用下移,不易保持在土壤上层。

1.1.2 干容重、孔隙率与渗流速度

干容重又称土壤假比重,是一定容积的土壤(包括土粒及粒间的孔隙)烘干后的重量与同容积水重的比值,通常单位取为 g/cm^3 。干容重是土壤的重要物理特性参数之一,与土壤质地、压实状况、土壤颗粒密度、土壤有机质含量及各种土壤管理

措施有关。土壤越疏松多孔,容重越小,土壤越紧实,容重越大,因此干容重可作为土壤熟化程度指标之一,熟化程度较高的土壤,容积比重常较小。另外,干容重也可用来计算一定面积耕层土壤的重量和土壤孔隙度。

以土壤中的数学点 P 为质心,取体积为 ΔV_0 的体积元为土壤多孔介质的物理点,则土壤干容重可以定义为

$$\gamma(P) = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_0} \frac{\Delta M(P)}{\Delta V} \quad (1.2)$$

式中:

$\gamma(P)$ ——土壤干容重;

ΔV ——以 P 点为质心的体积元;

ΔV_0 ——以 P 点为质心的,较单个孔隙或固体土壤颗粒大的体积元;

$\Delta M(P)$ ——以 P 点为质心,体积为 ΔV 的空间中所含有的固相物质的质量。

进一步地,令 ΔV_k 表示体积元 ΔV 内土壤孔隙的总体积,则可以定义以 P 点为质心的土壤孔隙率为

$$n(P) = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_0} \frac{\Delta V_k(P)}{\Delta V} \quad (1.3)$$

由于干容重和孔隙率定义中的 ΔV_0 在土壤固相物质密度 ρ 不变时是相同的,因此对任意 P ,都有

$$n(P) = 1 - \frac{\gamma(P)}{\rho} \quad (1.4)$$

物理点概念的确立使得将孔隙率和干容重视为质点 P 的连续函数成为可能,进而将土壤多孔介质视为连续介质。用充满全部空间的连续水流代替孔隙中的真实水流,将体积元 ΔV_0 定义为以 P 点为质心的长为 L 、截面积为 ΔA 的圆柱体,则质点 P 处的渗流速度可以定义为

$$v = \lim_{\Delta V \rightarrow \Delta V_0} \frac{1}{\Delta A} \int_{\Delta A_k} u d\Delta A \quad (1.5)$$

式中:

v ——渗流速度,也称为达西流速;

ΔA_k ——圆柱体体积元横截面 ΔA 上孔隙的面积;

u ——孔隙内水流的真实速度。

1.1.3 土壤含水率

土壤含水率是土壤三相体(固相骨架、水或水溶液、空气)中水分所占的相对比例,也称为土壤含水量,通常采用体积含水率和重量含水率两种方法表示。

1. 体积含水率

土壤中水分占有的体积 ΔV_s 与土壤总体积 ΔV_t 之比就是土壤的体积含水率, 通常用 θ_v 表示, 即

$$\theta_v = \frac{\Delta V_s}{\Delta V_t} \quad (1.6)$$

2. 重量含水率

土壤中水分重量 ΔW_s 和固相物质重量 ΔW_t 之比为土壤的重量含水率, 通常用 θ_g 表示, 即

$$\theta_g = \frac{\Delta W_s}{\Delta W_t} \quad (1.7)$$

体积含水率和重量含水率可以按照下式转换:

$$\theta_v = \frac{\gamma \theta_g}{\rho_w} \quad (1.8)$$

式中:

γ ——土壤干容重;

ρ_w ——土壤水密度。

1.1.4 土水势

自然界中的物体通常具有动能和势能两种不同形式的能量。由于土壤水分运动速度较慢, 因此其动能可以忽略不计, 但土壤水的势能在决定水分能态和运动方面起着重要作用。随着土壤水分运动研究工作的发展, 土壤水能量有过毛管势、引力、吉布氏自由能等各种名称。虽然“土水势”这个概念在目前应用较为广泛, 但仍然有 Slatyer-Taylor 定义、Krammer 定义等不同形式^[2]。此处将重点介绍将土水势视为连续体系中土壤水的热力学总势的定义。

将土壤—空气—水三相物体视为一个系统, 以土壤水分为研究对象, 以 1 个大气压、25 °C 时处于与地下水位等高的纯自由水为标准, 考虑对组分吉布氏自由能有影响的全部因素, 则土水势可以表示为^[4]

$$\begin{aligned} \psi_w &= \Delta \bar{G} \\ &= \int_{p_0}^p \bar{v} dp - \int_{T_0}^T s dT + \int_{n_{w0}}^{n_w} \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial n_w} \right)_{p, T, N} dn_w \\ &\quad + \sum \int_{n_0}^n \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial n} \right)_{p, T, N} dn_i + Mg \int_{h_0}^h dh \end{aligned} \quad (1.9)$$

式中:

$\int_{p_0}^p \bar{v} dp$ ——系统外压产生的压力势;

$\int_{T_0}^T s dT$ ——温度改变所产生的温度势；

$\int_{n_{w_0}}^{n_w} \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial n_w} \right)_{p, T, N} dn_w$ ——土壤水基质势；

$\sum \int_{n_0}^n \left(\frac{\partial \bar{G}}{\partial n} \right)_{p, T, N} dn_i$ ——溶质势；

$Mg \int_{h_0}^h dh$ ——重力势。

若进一步将压力势记为 ϕ_p ，温度势记为 ϕ_T ，基质势记为 ϕ_m ，溶质势记为 ϕ_s ，重力势记为 ϕ_g ，则土水势可表示为

$$\phi_w = \phi_p + \phi_T + \phi_m + \phi_s + \phi_g \quad (1.10)$$

1. 重力势

任何物体都会受到重力作用而具有重力势能，土壤水也不例外。土壤水所具有的重力势能大小取决于土壤水的高度或垂直位置。保持其他各项因素不变，将单位数量的土壤水从某点移动到标准参考状态平面处所做的功即为该点土壤水的重力势，记为 ϕ_g 。参考平面的选取根据实际情况而定，例如，田间土壤水分运动的参考平面可以选在地表或者地下水水面处。垂直坐标 z 的原点选在参考平面上，其方向可以设定为向上为正，也可设定为向下为正，具体根据实际需要调整。质量为 M 、容积为 V 的土壤水的重力势能为

$$E_g = \pm Mgz = \pm \rho_w Vgz \quad (1.11)$$

式中：

g ——重力加速度；

ρ_w ——土壤水密度；

z ——垂直坐标，向上为正时式(1.11)取“+”号，向下为正时式(1.11)取“-”号。

根据式(1.11)可知，单位质量土壤水的重力势为

$$\phi_g = \pm gz \quad (1.12)$$

单位容积土壤水的重力势为

$$\phi_g = \pm \rho_w gz \quad (1.13)$$

单位重量土壤水的重力势为

$$\phi_g = \pm z \quad (1.14)$$

2. 压力势

土壤水中的压力差会引起土壤水的压力势。以标准大气压为标准参考状态，如果体积为 V 的土壤中水分所受压力与标准大气压有 Δp 的差异，则土壤水分的压力势为

$$E_p = V \Delta p \quad (1.15)$$

对于饱和土壤水,任一深处为 h 的点受到超过标准参考气压状态的静水压力,因此单位质量的土壤水分的压力势为

$$\psi_p = gh \quad (1.16)$$

单位容积土壤水的压力势为

$$\psi_p = \rho_w gh \quad (1.17)$$

单位重量土壤水的压力势为

$$\psi_p = h \quad (1.18)$$

因此,饱和土壤水的压力势 $\psi_p \geq 0$ 。

对非饱和土壤,忽略土壤中存在闭塞未充水孔隙产生的气压势,考虑土壤孔隙联通且与大气连接的情况,土壤各点处承受的压力均为大气压,即各点处的 Δp 均为 0,即非饱和土壤水的压力势 $\psi_p = 0$ 。

3. 基质势

土壤基质对土壤水的吸持作用会产生土壤基质势。保持其他各项因素不变,将非饱和土壤中单位数量的土壤水由一点移至标准参考状态时所做的功即为该点土壤水的基质势。基质势的产生主要源于毛管作用和吸附作用,为克服土壤基质对水分产生的这些吸持作用需要对土壤水做功,而所做的功为负值。因此,非饱和土壤水的基质势永远为负值,即 $\psi_m < 0$,而饱和土壤水的基质势为 0,即 $\psi_m = 0$ 。

应用时,往往将土壤基质势和压力势统一起来,此时称基质势为负压势。如果将压力势以压力水头表示为 $\psi_p = h (h > 0)$,则基质势可以用负压水头表示为 $\psi_m = h (h < 0)$ 。

4. 溶质势

土壤水中的溶质离子和水分子间的吸引力导致土壤溶质势的产生。在其他各项因素不变的情况下,含有溶质的单位数量土壤水从土壤中一点移至标准参考状态时土壤水所做的功即为该点土壤水的溶质势。标准参考状态可以选为清洁的自由水的溶质状态。为克服土壤水中溶质对水分子的吸持作用需要对土壤水做功,所做的功为负值。因此,土壤的溶质势也为负值,即 $\psi_s < 0$ 。通常采用测定渗透势来确定溶质势,公式如下:

$$\psi_s = -\frac{C}{\mu} RT \quad (1.19)$$

式中:

C ——单位体积溶液中的溶质质量, g/cm^3 ;

μ ——溶质的摩尔质量;

R ——气体热力学常数;

T ——温度。

5. 温度势

土壤内温度场的变化会引起土壤水的温度势。土壤中某点处的温度势由该点温度与标准参考状态的温度之差 ΔT 决定。因此,温度势可以表示为

$$\phi_T = -S\Delta T \quad (1.20)$$

式中:

S ——单位数量土壤水的熵值。

由于温差对土壤水分运动通量的影响非常小,因此在分析土壤水分运动时温度势常常被忽略不计。

以上五种土水势的分势随着实际问题的不同起到不同的作用,要具体问题具体分析。

1.1.5 土壤水吸力、比水溶重

为分析方便,将土壤水的基质势和溶质势的负数定义为土壤水吸力,用 s 表示。在分析田间土壤水分运动等情况时,土壤溶质势可以忽略不计。因此,土壤水吸力可以用土壤基质势的负值来表示,即

$$s = -\psi_m \quad (1.21)$$

从式(1.21)可以看出,基质势越小,则吸力越大,因此土壤水是从吸力小向吸力大的方向移动的。

由于基质势的大小随着土壤含水量变化而变化,所以土壤水吸力也可以表示为土壤含水量的函数。人们通过研究发现,土壤含水量是随着水吸力的提高而减少的,并绘制出了反映土壤水吸力与含水率之间关系的土壤水分特征曲线(见图 1.1)。

土壤水分特征曲线表明了土水势与含水量之间的关系,是反映土壤特征的重要曲线。由于土壤系统环境复杂,影响因素繁多,不同地区、不同土质的土壤的土壤水分特征曲线均不相同。因此,没有关于土壤水吸力与含水率间确切的解析关系式,实际应用中通常采用如下几种形式的经验公式:

$$s = a\theta^b \quad (1.22)$$

$$s = a\left(\frac{\theta}{\theta_s}\right)^b \quad (1.23)$$

$$s = a \frac{(\theta_s - \theta)^n}{\theta^m} \quad (1.24)$$

式中:

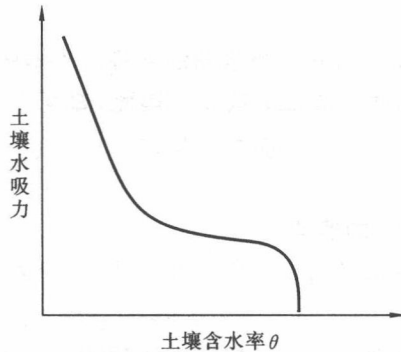


图 1.1 土壤水分特征曲线

θ ——土壤含水率；

θ_s ——土壤饱和含水率；

a, b, m, n ——经验参数。

作为反映土壤水分运动的另一个重要参数,定义比水溶重为单位基质势的变化引起的含水率的变化,并记为 C 。显然,比水溶重是土壤基质势或土壤含水率的函数,可以记为 $C(\theta)$ 或 $C(\psi_m)$,按照以上定义可以将之表示为

$$C = \frac{d\theta}{d\psi_m} \quad (1.25)$$

或者

$$C = -\frac{d\theta}{ds} \quad (1.26)$$

1.1.6 土壤导水率、扩散率

土壤导水率最早由达西(Darcy)于 1856 年提出,用来表示孔隙介质透水性能,即单位梯度下的渗流速度或通量(单位时间内通过单位面积土壤的水量)的大小,也称为渗透系数。

饱和土壤水中,导水率达到最大值,且为常数,通常记为 K_s 。非饱和土壤水中,因土壤孔隙中部分充气,导水孔隙相应减少,导水率低于饱和土壤水的情况,并且与基质势或含水率的大小有关,总体随着含水率降低而减小。由于在吸力作用下,土壤水首先从大孔隙中排除,随着吸力增加水流仅能在小孔隙中流动,因此土壤从饱和到非饱和将引起导水率的急剧降低。

饱和土壤水与非饱和土壤水的导水性能的相对关系对不同结构的土壤是不