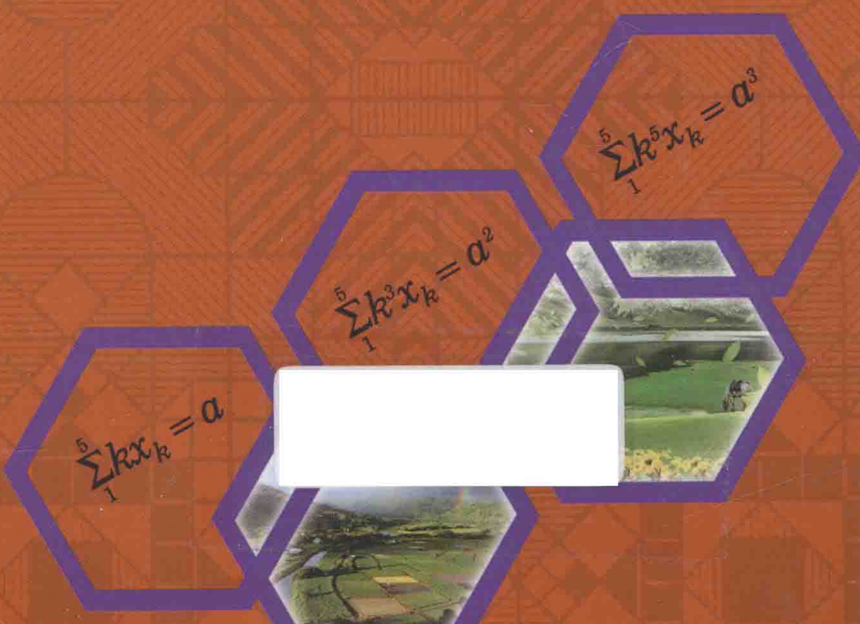
FARMING-READING NOTES

耕读笔记（下卷）

一位农民数学爱好者的初数探索

● 邓寿才 著



哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

FARMING-READING NOTES

耕读笔记（下卷）

一位农民数学爱好者的初数探索

邓寿才 著

$$\sum_1^5 k^5 x_k = a^3$$

$$\sum_1^5 k^3 x_k = a^2$$

$$\sum_1^5 k x_k = a$$

哈爾濱工業大學出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内容简介

本书共分五个部分,每个部分相对独立.本书主要介绍并欣赏了几类优美的三角不等式,同时补充了一些妙题,并给出了详细解答,有些题目给出了多种证明及解答方法,得到了新的结论,并进行了推广.

本书适合初等数学爱好者阅读研究.

图书在版编目(CIP)数据

耕读笔记:一位农民数学爱好者的初数探索.下卷/邓寿才著.—哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.5

ISBN 978-7-5603-5390-6

Ⅰ.①耕…　Ⅱ.①邓…　Ⅲ.①初等数学-普及读物　Ⅳ.①O12-49

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 112471 号

策划编辑　刘培杰　张永芹
责任编辑　张永芹　刘春雷
封面设计　孙茵艾
出版发行　哈尔滨工业大学出版社
社　　址　哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号　邮编 150006
传　　真　0451-86414749
网　　址　http://hitpress.hit.edu.cn
印　　刷　哈尔滨市工大节能印刷厂
开　　本　787mm×1092mm　1/16　印张 14　字数 262 千字
版　　次　2015 年 5 月第 1 版　2015 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5603-5390-6
定　　价　28.00 元

◎

作者简介

邓寿才老师于1962年7月13日生于四川省泸州市纳溪区上马镇八角仓村(原文昌乡银坪村).1980年上马高中毕业后回家务农(现为百度百科收录人物).在家乡代授过中小学课程,担任过农村基层干部,在北京餐饮业做过会计,砖厂做过苦工,在山洞拉过煤,在建筑社做过苦工.

在广东中山市东升求实学校任教两年,从2010年秋至今在成都优优数学学校和成都聚名师学校(共28个校区)担任数学教学总监.在2011年和2012年邓老师两次参加四川省高中数学冬令营赛前培训,主讲不等式专题内容.

邓寿才老师的人生道路艰辛曲折,饱经风霜,但他一直坚强,从不向困难屈服.他不抽烟,不打牌,却喜欢利用业余时间从事文化活动,如看书学习,听歌唱歌,写旧体诗(至今创作诗篇一百余首,1995年以来在北京荣获首届诗歌大赛二等奖,在专辑《闪光的青春》上登载"敬纪邓盛钢的诗三首"),但邓老师最喜欢的文化活动是学习数学,思考数学,研究数学,写作数学(欣赏和研究数学的美,妙,趣等特点).年轻时在《数学通讯》《数学通报》《中等数学》等期刊上发表论文.从2008年至今,在年刊《数学奥林匹克与数学文化》第2-6期(刘培杰主编,第6期将于2015年底出版,每期500余页)上发表六十余中长篇数学论文.目前已在哈尔滨工业大学出版社出版专著《新编平面解析几何解题方法》《数学奥林匹克不等式散论》《数学奥林匹克不等式欣赏》《初等方程妙题集锦》《趣味初等数论选美与欣赏》《初等函数研究与欣赏》《初等数学解题方法全书》.本集《耕读笔记》是邓老师的最新力作,倾注了他的全

部心血与激情，具有结构完美、内容丰富、风格精彩等特点. 此外，2015 年底将出版他的代表作《三角不等式研究与欣赏》《几何不等式研究与欣赏》《初等数学解题方法全书》. 届时读者可品味到书中的经典趣味，奇异与美妙. 感受到作品让人陶醉，令人神往！

◎ 目录

十三　一类奇异三角不等式的探讨

众所周知，代数、几何、三角是数学的三大基石，它们关系密切，错综复杂，千丝万缕，五彩缤纷，各具特色，但无严格的界线与区别.

在过去几年，笔者利用业余时间，探究了一部分初等数学中的名题与妙题，写成文章分别登载在《数学奥林匹克与数学文化》第 2 - 5 辑与专著《数学奥林匹克不等式散论》《数学奥林匹克不等式欣赏》《新编平面解析几何解题方法全书》中. 我们知道，数学是广阔无边的大海，自然我们对他探索无限，直到永远. 所以，在本章中，我们再接再厉继续前行，希望数学之花开满人间，数学之香弥漫天地.

(一)三角不等式

经过认真考虑，笔者决定首先补充和公布有关三角不等式的最新研究成果，希望与大家互动同乐，但由于笔者是业余数学发烧友，谈不上数学水平和功底，错误之处在所难免，热切希望大家批评指正，我深表谢意.

欣赏

题 1　(Garfunkel—Bankoff 不等式)证明：对于任意 $\triangle ABC$，有不等式

$$\tan^2\frac{A}{2}+\tan^2\frac{B}{2}+\tan^2\frac{C}{2}\geqslant 2-8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\quad\text{(A)}$$

(1)

1983 年，Garfunkel 曾在《Grux—Mathematicorum》上问："能否将两个熟知的反向三角不等式

$$\begin{cases}\tan^2\dfrac{A}{2}+\tan^2\dfrac{B}{2}+\tan^2\dfrac{C}{2}\geqslant 1 & (1)\\ 8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}\leqslant 1 & (2)\end{cases}$$

统一成一个更强的不等式(A)呢?"

理解和观察不等式(A)知，从外形与结构上讲，式(A)关于角变量 A,B,C 完全对称，因此它具有对称美；从已知条件上讲，仅仅只有"对于任意 $\triangle ABC$"，所以式(A)具有简洁美；而式(A)又将方向相反的一对不等式(1)、(2)和谐地统一在一起，使人倍感它神秘、奇妙，因此不等式(A)又具有简洁美、和谐美、神秘美、奇异美. 总之，式(A)是美神的化身，让人偏爱.

在《数学奥林匹克与数学文化》第二辑第 216—264 页中的《一道联赛题与 Garfunkel—Bankoff 不等式》文里，我们先用三种方法证明了不等式(A)，接着又建立了它的配对形式与一系列推广结论和加强与完善. 其中式(A)的第四个指数推广

$$\sum\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}\geqslant 3^{1-k}+8^{1-k}-8\left(\prod\sin\frac{A}{2}\right)^{k}(k\geqslant 1) \qquad (\mathrm{B})$$

自然美妙，令人偏爱.

接着，笔者又继续研究不等式(A)，将新发现写成《探索无限》登在《数学奥林匹克不等式散论》的第一篇. 但是，在前两篇文章中不等式(A)的较满意的加权推广(系数推广)却"踏破铁鞋无觅处"成为笔者"朝思暮想，梦寐以求"的心病. 但只要我们持之以恒，锲而不舍，定会金石可镂，铁树开花；定会走出"山重水复之地"，见到"柳暗花明之村".

(2)

为了建立不等式(A)的更好的加权推广，需要更新的思路，从而需要：

引理 1 对任意实数 a,b,c，有

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geqslant 9(ab+bc+ca) \tag{a}$$

分析　记式(a)的左边为P,观察P的外形结构,使我们联想到过去建立的小结论:

设$a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geqslant 2,n\in\mathbf{N}^+)$均为正数,那么

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i^n+n-1)\geqslant(\sum_{i=1}^{n}a_i)^n \tag{b}$$

这是因为应用赫尔德不等式有

$$\prod_{i=1}^{n}(a_i^n+n-1)=(a_1^n+1+1+\cdots+1)\cdot(1+a_2^n+1+\cdots+1)\cdot\cdots\cdot$$
$$(1+\cdots+1+a_{n-1}^n+1)\cdot(1+\cdots+1+a_n^n)$$
$$\geqslant(a_1+a_2+\cdots+a_n)^n(\sum_{i=1}^{n}a_i)^n$$

即式(b)成立,等号成立仅当

$$a_1=a_2=\cdots=a_n=1$$

在式(b)中取$n=3$,并作代换

$$(a_1,a_2,a_3)=(a,b,c)$$
$$\Rightarrow(a^3+2)(b^3+2)(c^3+2)\geqslant(a+b+c)^3 \tag{c}$$

观察式(a)与式(c)可见,它们的右边相异,左边结构相似,且均含有2,这是它们的相同之处.所以,式(c)非式(a).真是"曾经沧海难为水,除却巫山不是云",但是,可以说式(a)与式(c)互相配对,交相辉映.

从式(b)的证明我们受到启发:如果能将式(a)加强为

$$P=(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geqslant 3(a+b+c)^2 \tag{d}$$

那么再应用3元对称不等式

$$(a+b+c)^2\geqslant 3(ab+bc+ca)$$

就大功告成了.

为此,我们设$a,b,c>0,S=\dfrac{a+b+c}{3}$关于$x>0$的函数为

$$f(x)=\ln(x^2+2)$$

于是

$$f'(x)=\frac{2x}{x^2+2}>0,f''(x)=\frac{2(2-x^2)}{(x^2+2)^2}$$

只有当$x\in(0,\sqrt{2})$时,$f''(x)>0$,$f(x)$是凸函数,才有

$$f(a)+f(b)+f(c)\geqslant 3f(S)$$
$$\Rightarrow\ln(a^2+2)+\ln(b^2+2)+\ln(c^2+2)$$
$$\geqslant 3\ln(S^2+2)$$
$$\Rightarrow P\geqslant(S^2+2)^3=(S^2+1+1)^3$$

$$\geqslant (3\sqrt[3]{S^2\times 1\times 1})^3=3(a+b+c)^2$$

但是,原题并无已知条件

$$a,b,c\in(0,\sqrt{2})$$

所以不能用上述方法证明式(a).

另外,如果直接应用赫尔德不等式,那么

$$\begin{aligned}P&=(a^2+1+1)(1+b^2+1)(1+1+c^2)\\&\geqslant(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2})^3\end{aligned}\tag{e}$$

于是需要证明

$$(\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{b^2}+\sqrt[3]{c^2})^3\geqslant 9(ab+bc+ca)$$

才行.但是,上式是否成立就不得而知了.

其实,式(d)是成立的.

证明(陈计)　因为

$$\begin{aligned}&(b-c)^2+2(bc-1)^2\geqslant 0\\&\Rightarrow(b^2+2)(c^2+2)\geqslant 3\left[1+\frac{1}{2}(b+c)^2\right]\\&\Rightarrow P=(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\\&\quad\geqslant 3(a^2+2)\left[1+\frac{(b+c)^2}{2}\right]\text{(应用柯西不等式)}\\&\quad\geqslant 3(a+b+c)^2\\&\Rightarrow P\geqslant 3(a+b+c)^2\end{aligned}$$

即式(d)成立,等号成立仅当 $a=b=c=1$.

其实,式(d)并非最强,它还可以再加强为

$$P=\prod(a^2+2)\geqslant 3(\sum a)^2+Q\tag{f}$$

其中

$$Q=\frac{1}{2}\sum(b-c)^2$$

证明　式(f)等价于

$$\begin{aligned}&\prod(a^2+2)\geqslant 4\sum a^2+5\sum bc\\&\Leftrightarrow 0\leqslant 8-5\sum bc+2\sum b^2c^2+a^2b^2c^2\\&\quad\equiv\frac{8}{9}(3-\sum bc)^2+M\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}M&=a^2b^2c^2+\frac{2}{9}(5\sum b^2c^2-8abc\sum a)+13\sum bc\\&=\left(abc+\frac{5}{9}\sum\frac{bc}{a}-\frac{8}{9}\sum a\right)^2+\end{aligned}$$

$$\frac{5}{81}\left(\sum \frac{bc}{a}-\sum a\right)\left(8\sum a-5\sum \frac{bc}{a}\right)+$$
$$\frac{1}{27}\left[5\sum a^2\left(\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)-8\sum a^2-2\sum bc\right]$$
$$\geqslant 0$$

即式(f)成立,等号成立仅当 $a=b=c=1$.

现在,让我们再回过头来证明式(a).

证明(陈计)　作代换

$$(a,b,c)=(\sqrt{2}\tan A,\sqrt{2}\tan B,\sqrt{2}\tan C)$$

其中 $A,B,C\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$.

令 $\theta=\frac{1}{3}(A+B+C)$,注意到

$$\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$$

及
$$1+\tan^2\theta=\sec^2\theta$$

$$\cos(A+B+C)=\cos A\cos B\cos C-\cos A\sin B\sin C-\sin A\cos B\sin C-\sin A\sin B\cos C$$

这样,式(a)转化为三角不等式

$$f=\cos A\cos B\cos C(\cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C)\leqslant\frac{4}{9} \tag{1}$$

又因为

$$\begin{aligned} f&=\cos A\cos B\cos C[\cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)]\\ &=\cos A\cos B\cos C(\cos A\cos B\cos C-\cos 3\theta) \end{aligned} \tag{2}$$

而且

$$\begin{aligned} \cos A\cos B\cos C&\leqslant\left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{2}\right)^3\\ &\leqslant\cos^3\theta\\ \Rightarrow f&\leqslant\cos^3\theta(\cos^3\theta-\cos 3\theta)\\ &=3\cos^4\theta(1-\cos^2\theta)\\ &=12\left(\frac{\cos^2\theta}{2}\right)\left(\frac{\cos^2\theta}{2}\right)(1-\cos^2\theta)\\ &\leqslant 12\left[\frac{\frac{\cos^2\theta}{2}+\frac{\cos^2\theta}{2}+(1-\cos^2\theta)}{3}\right]^3\\ \Rightarrow f&\leqslant\frac{4}{9} \end{aligned}$$

即式(1)成立,从而式(a)成立,其中等号成立仅当

$$\begin{cases}A=B=C=\theta\\ \dfrac{1}{2}\cos^2\theta=1-\cos^2\theta\end{cases}$$

$$\Rightarrow\cos^2\theta=\frac{2}{3}\Rightarrow\tan\ \theta=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow a=b=c=\sqrt{2}\tan\ \theta=1$$

现在,我们不仅证明了引理中的式(a),而且还得到了一条不等式链

$$\prod\ (a^2+2)\geqslant3(\ \sum\ a)^2+\frac{1}{2}\ \sum\ (b-c)^2$$

$$\geqslant3(\ \sum\ a)^2\geqslant9(bc+ca+ab) \qquad (\mathrm{g})$$

这简直是数学花园中一道亮丽的风景.

(3)

在上一小节,我们建立了不等式

$$\prod\ (a^2+2)\geqslant3(\ \sum\ a)^2 \qquad (\mathrm{d})$$

$$\geqslant9\ \sum\ bc \qquad (\mathrm{a})$$

再联想到我们过去建立的引理:

设 $x_i>0,y_i>0(i=1,2,\cdots,n;n\geqslant3,n\in\mathbf{N})$,记 $S=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i$,则有

$$\left[\sum_{i=1}^{n}(S-y_i)x_i\right]^2\geqslant4(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_iy_i)(\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}y_iy_j) \qquad (※)$$

特别地,当取 $n=3$ 时有

$$[(y_2+y_3)x_1+(y_3+y_1)x_2+(y_1+y_2)x_3]^2$$
$$\geqslant4(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)(y_1y_2+y_2y_3+y_3y_1) \qquad (1)$$

等号成立仅当

$$\frac{x_1}{y_1}=\frac{x_2}{y_2}=\frac{x_3}{y_3}$$

若再作代换

$$\begin{cases}(x_1,x_2,x_3)=(a,b,c)\\(y_1,y_2,y_3)=(p,q,r)\end{cases}$$

$$\Rightarrow[(q+r)a+(r+p)b+(p+q)c]^2$$
$$\geqslant4(qr+rp+pq)(ab+bc+ca) \qquad (2)$$

等号成立仅当

$$\frac{a}{p}=\frac{b}{q}=\frac{c}{r}$$

如果再令

$$(\lambda,\mu,\nu)=(q+r,r+p,p+q)$$
$$\Rightarrow 4(qr+rp+pq)=2(\mu\nu+\nu\lambda+\lambda\mu)-(\lambda^2+\mu^2+\nu^2)$$
$$\Rightarrow(\lambda a+ub+\nu c)^2\geqslant S(ab+bc+ca) \tag{3}$$

其中
$$S=2\sum\mu\nu-\sum\lambda^2$$

等号成立仅当

$$\frac{a}{\mu+\nu-\lambda}=\frac{b}{\nu+\lambda-\mu}=\frac{c}{\lambda+\mu-\nu}$$

无独有偶，陈计老师为我们建立了式(2)漂亮的配对式

$$[(q+r)a+(r+p)b+(p+q)c]^2$$
$$\geqslant 4(p+q+r)(pbc+qca+rab)$$

证明(陈计)　不妨设 $a=\max\{a,b,c\}$

则
$$[(q+r)a+(r+p)b+(p+q)c]^2-4(p+q+r)(pbc+qca+rab)$$
$$=[(q-r)a+(r+p)b-(p+q)c]^2+4qr(a-b)(a-c)\geqslant 0$$

(4)

为了将前面著名的不等式(A)进行更好的推广，我们必须做好充分的准备，现在，我们万事俱备，只欠东风，先将不等式

$$(a^2+2)(b^2+2)(c^2+2)\geqslant 3(a+b+c)^2 \tag{d}$$

进行研究，在式(d)中作代换，令 $\lambda,\mu,\nu>0$，则

$$(a,b,c)\to\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda}}a,\sqrt{\frac{2}{\mu}}b,\sqrt{\frac{2}{\nu}}c\right)$$
$$\Rightarrow(a^2+\lambda)(b^2+\mu)(c^2+\nu)$$
$$\geqslant\frac{3}{4}(\sqrt{\mu\nu}a+\sqrt{\nu\lambda}b+\sqrt{\lambda\mu}c)^2 \tag{h}$$

等号成立仅当

$$(a,b,c)=\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}},\sqrt{\frac{\mu}{2}},\sqrt{\frac{\nu}{2}}\right)$$

再应用三元对称不等式有

$$(a^2+\lambda)(b^2+\mu)(c^2+\nu)\geqslant\frac{3}{4}(\sqrt{\mu\nu}a+\sqrt{\nu\lambda}b+\sqrt{\lambda\mu}c)^2$$

$$\geqslant\frac{9}{4}\sqrt{\lambda\mu\nu}(\sqrt{\lambda}bc+\sqrt{\mu}ca+\sqrt{\nu}ab) \tag{i}$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}(a,b,c)=\left(\sqrt{\dfrac{\lambda}{2}},\sqrt{\dfrac{\mu}{2}},\sqrt{\dfrac{\nu}{2}}\right)\\ \sqrt{\mu\nu}a=\sqrt{\nu\lambda}b=\sqrt{\lambda\mu}c\end{cases}$$

$$\Rightarrow(a,b,c)=\left(\sqrt{\frac{\lambda}{2}},\sqrt{\frac{\mu}{2}},\sqrt{\frac{\nu}{2}}\right)$$

如果应用上一小节的不等式(3),又得到不等式

$$(a^2+\lambda)(b^2+\mu)(c^2+\nu)\geqslant S(bc+ca+ab) \tag{j}$$

其中

$$S=\frac{3}{4}[2\sqrt{\lambda\mu\nu}(\sqrt{\lambda}+\sqrt{\mu}+\sqrt{\nu})-(\lambda\mu+\mu\nu+\nu\lambda)]>0$$

等号成立仅当

$$\begin{cases}(a,b,c)=\left(\sqrt{\dfrac{\lambda}{2}},\sqrt{\dfrac{\mu}{2}},\sqrt{\dfrac{\nu}{2}}\right)\\ \dfrac{\mu+\nu-\lambda}{a}=\dfrac{\nu+\lambda-\mu}{b}=\dfrac{\lambda+\mu-\nu}{c}\end{cases}$$

特别地,当取 $\lambda=\mu=\nu$ 时,式(i)与式(j)均简化为

$$(a^2+\lambda)(b^2+\lambda)(c^2+\lambda)\geqslant\left(\frac{3\lambda}{2}\right)^2(bc+ca+ab) \tag{k}$$

等号成立仅当 $a=b=c=\sqrt{\dfrac{\lambda}{2}}$.

现在,我们再从指数方面推广不等式(k).

推广 1 设 $a,b,c,\lambda>0$,指数 $\alpha,\beta,\gamma\in\left(\dfrac{1}{2},2\right)$,且 $\alpha+\beta+\gamma=3$,则有

$$\begin{aligned}P_\lambda&=(a^2+\lambda)^\alpha\cdot(b^2+\lambda)^\beta\cdot(c^2+\lambda)^\gamma\\&\geqslant K(bc+ca+ab)\end{aligned} \tag{l}$$

其中

$$K=\left(\frac{3}{2}\lambda\right)^2m^{-1}$$

$$m=(2\alpha-1)^{2\alpha-1}(2\beta-1)^{2\beta-1}(2\gamma-1)^{2\gamma-1}$$

特别地,当取 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 时,$m=1$,式(l)简化成式(k).

证明 设 $A,B,C\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$,有

$$\theta=\frac{1}{3}(A+B+C)\in\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\begin{aligned}M &= \cos A\cos B\cos C-\cos(A+B+C)\\&\leqslant \cos^3\theta-\cos 3\theta\\&=3(1-\cos^2\theta)\cos\theta\end{aligned}$$

从前面式(a)的证明过程知

$$\begin{aligned}M &= \cos A\sin B\sin C+\sin A\cos B\sin C+\sin A\sin B\cos C\\&\leqslant 3(1-\cos^2\theta)\cos\theta \qquad (1)\end{aligned}$$

作代换

$$(a,b,c)=(\sqrt{\lambda}\tan A,\sqrt{\lambda}\tan B,\sqrt{\lambda}\tan C)$$

式(1)化为

$$\begin{aligned}&\lambda^{\alpha+\beta+\gamma}(1+\tan^2A)^{\alpha}(1+\tan^2B)^{\beta}(1+\tan^2C)^{\gamma}\\&\geqslant k\lambda(\tan B\tan C+\tan C\tan A+\tan A\tan B)\\&\Leftrightarrow\frac{\lambda^2}{K}\geqslant Mf \qquad (2)\end{aligned}$$

其中
$$f=(\cos A)^{2\alpha-1}(\cos B)^{2\beta-1}(\cos C)^{2\gamma-1}$$

注意到
$$\frac{2\alpha-1}{3}+\frac{2\beta-1}{3}+\frac{2\gamma-1}{3}=1$$

且

$$\alpha,\beta,\gamma\in\left(\frac{1}{2},2\right)\Rightarrow 2\alpha-1,2\beta-1,2\gamma-1\in(0,3)$$

于是应用加权不等式有

$$\begin{aligned}\frac{f}{m}&=\left[\left(\frac{\cos A}{2\alpha-1}\right)^{\frac{2\alpha-1}{3}}\left(\frac{\cos B}{2\beta-1}\right)^{\frac{2\beta-1}{3}}\left(\frac{\cos C}{2\gamma-1}\right)^{\frac{2\gamma-1}{3}}\right]^3\\&\leqslant\left[\sum\frac{2\alpha-1}{3}\left(\frac{\cos A}{2\alpha-1}\right)\right]^3\\&=\left(\frac{\cos A+\cos B+\cos C}{3}\right)^3\leqslant\cos^3\theta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Rightarrow Mf&=m\left(M\frac{f}{m}\right)\leqslant\frac{3}{m}(1-\cos^2\theta)\cos^4\theta\\&=\frac{3m}{2}(2-2\cos^2\theta)\cos^2\theta\cdot\cos^2\theta\\&\leqslant\frac{3m}{2}\left[\frac{(2-2\cos^2\theta)+\cos^2\theta+\cos^2\theta}{3}\right]^3\\\Rightarrow Mf&\leqslant\frac{4}{9}m=\frac{\lambda^2}{K}\end{aligned}$$

即式(2)成立,所以式(1)成立,且易推得式(1)等号成立仅当 $\alpha=\beta=\gamma=1$ 及 $a=b=c=\sqrt{\frac{\lambda}{2}}$.

(5)

名言道:"他山之石,可以攻玉",应用推广 1 中的不等式(1),就可以建立前面不等式(A)的系数推广.

推广 2　设 $\alpha,\beta,\gamma\in\left(\frac{1}{2},2\right)$满足 $\alpha+\beta+\gamma=3$ 及 $t=8\prod\sin\frac{A}{2}$

$$m=(2\alpha-1)^{2\alpha-1}(2\beta-1)^{2\beta-1}(2\gamma-1)^{2\gamma-1}>\frac{8}{t^2}$$

那么对于$\triangle ABC$ 有

$$\alpha\tan^2\frac{A}{2}+\beta\tan^2\frac{B}{2}+\gamma\tan^2\frac{C}{2}+8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{m}}-1\tag{C}$$

证明　令 $\lambda=2t,t=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\leqslant 1$,在不等式(1)中令

$$(a,b,c)=\left(\sqrt{3}\tan\frac{A}{2},\sqrt{3}\tan\frac{B}{2},\sqrt{3}\tan\frac{C}{2}\right)$$

$$\Rightarrow bc+ca+ab=3\left(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}+\tan\frac{C}{2}\tan\frac{A}{2}+\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2}\right)=3$$

代入式(1)得

$$\prod\left(3\tan^2\frac{A}{2}+2t\right)^{\alpha}\geqslant 3(3t)^2m^{-1}$$

$$\Leftrightarrow\prod\left(3\tan^2\frac{A}{2}+2t\right)^{\frac{\alpha}{3}}\geqslant 3\sqrt[3]{m^{-1}}t^{\frac{2}{3}}$$

注意到$\frac{\alpha}{3}+\frac{\beta}{3}+\frac{\gamma}{3}=1$,应用加权不等式

$$\sum\frac{\alpha}{3}\left(3\tan^2\frac{A}{2}+2t\right)\geqslant\prod\left(3\tan^2\frac{A}{2}+2t\right)^{\frac{\alpha}{3}}$$

$$\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{m}}t^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow\sum\alpha\tan^2\frac{A}{2}+\frac{2}{3}t\sum\alpha\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{m}}t^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow\sum\alpha\tan^2\frac{A}{2}+2t\geqslant\frac{3}{\sqrt[3]{m}}t^{\frac{2}{3}}$$

$$\Rightarrow\sum\alpha\tan^2\frac{A}{2}+t\geqslant f(t)\tag{1}$$

其中$f(t)=\frac{3}{\sqrt[3]{m}}t^{\frac{2}{3}}-t$,求导得

$$f'(t)=\frac{2}{\sqrt[3]{mt^2}}-1<\frac{2}{\sqrt[3]{8}}-1=0$$

因此$f(t)$在$\left(\sqrt{\frac{8}{m}},1\right]$内是减函数,从而

$$\sum\ \alpha\tan^2\frac{A}{2}+t\geqslant f(t)\geqslant f(1)=\frac{3}{\sqrt[3]{m}}-1$$

即不等式(c)成立.

相应地,推广式(c)还可以再从指数方面推广为:

推广3　设$\alpha,\beta,\gamma\in\left(\frac{1}{2},2\right)$满足

$$\alpha+\beta+\gamma=3,t=8\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$$

$$m=(2\alpha-1)^{2\alpha-1}(2\beta-1)^{2\beta-1}(2\gamma-1)^{2\gamma-1}>\frac{24}{(3t)^k}\quad(k\geqslant1)\tag{2}$$

则有

$$\alpha\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}+\beta\left(\tan\frac{B}{2}\right)^{2k}+\gamma\left(\tan\frac{C}{2}\right)^{2k}+t^k\geqslant\sqrt[3]{\frac{3^{4-k}}{m}}-1\tag{D}$$

证明　在不等式(1)中令$\lambda=2t^k$,则

$$(a,b,c)=\left(\sqrt{3}\tan^k\frac{A}{2},\sqrt{3}\tan^k\frac{B}{2},\sqrt{3}\tan^k\frac{A}{2}\right)$$

$$\Rightarrow\sum\ bc=9\cdot\frac{\sum\left(\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}\right)^k}{3}\text{(应用幂平均不等式)}$$

$$\geqslant9\left(\frac{\sum\tan\frac{B}{2}\tan\frac{C}{2}}{3}\right)^k=3^{2-k}$$

这样从不等式

$$(a^2+\lambda)^\alpha(b^2+\lambda)^\beta(c^2+\lambda)^\gamma\geqslant k(bc+ca+ab)\tag{1}$$

得到

$$\prod\ \left[3\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}+2t^k\right]^\alpha\geqslant\frac{(3t^k)^2}{m}\cdot3^{2-k}$$

$$\Rightarrow\prod\ \left[3\left(\tan\frac{A}{2}\right)^{2k}+2t^k\right]^{\frac{\alpha}{3}}\geqslant p\cdot t^{\frac{2k}{3}}\tag{3}$$

其中$p=\sqrt[3]{\frac{3^{4-k}}{m}}$.