普通高等教育“十二五”规划教材

简明线性代数

游　宏　顾　燕　编

科学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

简明线性代数

游 宏 顾 燕 编

科 学 出 版 社
北 京

内 容 简 介

本书涵盖了目前国内通行的线性代数教学的基本内容，全书共 4 章，包括：线性方程组与矩阵、向量组的线性相关性与线性方程组解的结构、行列式、方阵的对角化等．书中每两小节配有习题，每章后配有总习题，并配有应用实例及用 Matlab 软件解题的介绍．本书采取了分层次与模块相结合的结构，力求紧凑、简明，适于学时较少的课程教学．

本书适用于普通高等学校理工、经管类本、专科学生的线性代数课程教学，也可供相关读者参考．

图书在版编目(CIP)数据

简明线性代数/游宏，顾燕编．—北京：科学出版社，2015.7
普通高等教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-03-044308-3

Ⅰ. ①简…　Ⅱ. ①游…　②顾…　Ⅲ. ①线性代数-高等学校-教材　Ⅳ. ①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 101850 号

责任编辑：姚莉丽／责任校对：蒋　萍
责任印制：霍　兵／封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2015 年 7 月第　一　版　开本：720 × 1000 1/16
2015 年 7 月第一次印刷　印张：12
字数：241 000

定价：24.00 元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　　言

近年, 国内出版了不少供非数学专业本科教学使用的线性代数教材, 从不同角度对传统的教学内容进行了一定的改革. 如, 增添了数学软件 (Matlab) 的使用, 增加了联系实际问题的例子, 变换了基本内容的讲授顺序等. 这些尝试都为线性代数教学提供了一些新的模式与思路. 但线性代数课程教学在很多普通院校教学学时偏少, 不少院校的线性代数教学只有二十多个学时, 甚至更少. 科学出版社曾对国内一些普通院校的线性代数课程做过调查, 教师反映比较集中的就是学时少, 教材内容讲不完, 因而希望能有一些少学时的"简明"教材以供选择. 应科学出版社的要求, 笔者编写了这本内容相对精简的线性代数教材, 其对象主要是普通高等院校理工、经管类的本、专科大学生. 遵循国内现行的线性代数课程教学的基本要求, 本书仍然基本涵盖目前通行的线性代数教学的基本内容, 但内容的讲授方法与顺序却有较大变化, 力求紧凑、简明, 采取分层次与模块相结合的结构, 其目的是方便使用本书的教师根据所在院校的实际情况对授课内容进行取舍.

在编写本书时, 我们做了以下方面的努力:

1. 与中学数学教学接轨, 从二、三元线性方程组入手引入 n 元线性方程组与矩阵、向量等概念及运算, 而不像传统教材那样先讲行列式.

2. 在介绍矩阵线性运算的同时, 将 n 维向量作为特殊矩阵一并介绍它的运算, 进而引进向量空间的概念. 这样, n 维向量空间的概念介绍得较为简单 (但基本内容仍然保持), 节省教学学时.

3. 由线性方程组的解法引入矩阵的初等变换及初等矩阵的概念, 进而引入矩阵等价标准形和秩的概念, 应用齐次线性方程组在行初等变换下解的不变性证明矩阵等价标准形 (秩) 的唯一性, 在第 1 章就给出线性方程组求解的过程及通解的表达式. 这样, 第 1 章就构成一个模块, 涵盖矩阵、向量空间、线性方程组求解等内容, 为学时数少、教学要求相对较低的教学提供方便.

4. 方阵的行列式的定义采用代数余子式的归纳方法, 这一定义目前已较多出现于国内教材与美国教材, 原因是较传统定义易于接受. 但是本书用小字体仍给出传统定义与"主元法"定义. 若不讨论"主元法"定义的合理性, 这一定义最为简洁, 它把方阵行列式的定义与计算统一起来. 由于"主元法"定义的合理性的证明较为复杂, 笔者没有将其作为主要定义方式, 但对于少学时的教学, 如只需简单介绍一下行列式, 可采用这一方法. 三种定义方式可供任课教师选择、取舍.

5. 增添线性方程组的最小二乘解、Matlab 软件使用的初步介绍, 这在国内新

近出版的某些教材中已经出现.

6. 每章都给出所讲授内容的应用实例, 每两小节配有习题, 以便学生练习, 掌握所学内容.

对于学时少、要求相对较低的专业和读者, 教学时可只讲授前两章和行列式的主元法定义及计算, 甚至可只讲第 1 章及介绍一下什么是方阵的行列式与有助于行列式计算的几个性质即可 (不讲证明). 根据笔者的教学经验, 讲授本书的全部内容 (包括 Matlab 使用), 25~30 学时基本可行, 如不涉及 Matlab 使用 (放在数学实践课中讲授), 或某些证明过程省略, 则学时可以更少. 教材中对绝大多数引理、定理、结论都给出证明, 教学过程中, 使用本书的教师可视情况对引理、定理、结论的证明做出取舍, 这样, 所需学时会更少.

本书与目前国内流行的教材相比, 体系及内容安排 (包括一些主要结论的证明) 变化较大, 难免出现不妥之处, 笔者衷心感谢数学界的同行和学生对本教材批评指正.

游　宏

2015 年 5 月

目　　录

第 1 章　线性方程组与矩阵

在日常生活中, 除了四则运算, 线性 (一次) 方程组可能是应用最为广泛的数学工具了. 本章将从大家熟悉的二元、三元线性方程组起步, 介绍一般的 n 元线性方程组及求解的过程, 并由此引出向量、矩阵的概念, 随之介绍矩阵的线性运算、乘积运算和矩阵的一些性质.

1.1　二元、三元线性方程组与几何

最简单的一次方程是

$$ax = b \quad (a, b \text{ 均为实数}),$$

当 $a \neq 0$ 时, 方程两边同除以 a, 得这个方程的唯一解 $x = \dfrac{b}{a}$, 且这个解在数轴上可用一个点表示.

二元一次方程的一般形式是

$$ax + by = c \quad (a, b, c \text{ 均为实数}), \tag{1.1}$$

解这个方程一般把某一未知量移至等号右边, 若 $b \neq 0$, 将式 (1.1) 写成 $by = c - ax$, 等式两边再同除以 b, 得 $y = -\dfrac{a}{b}x + \dfrac{c}{b}$. 若 $a = 0$, 它就是上面的最简方程. 若 $a \neq 0$, 式 (1.1) 有无穷多个解, 它的解是一些数对 (x_0, y_0), 它们在平面直角坐标系中可表为一条直线. 例如, 在式 (1.1) 中取 $a = 2$, $b = 3$, $c = 10$, 则 $y = -\dfrac{2}{3}x + \dfrac{10}{3}$. 它的图像 (即满足方程的点组成的图像) 如图 1.1 所示.

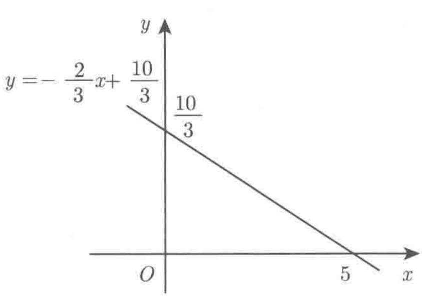


图 1.1

在某些特定的条件或选定的数集下, 方程 (1.1) 也可能只有有限个解. 例如, 图 1.1 中方程, $a=2$ 表示青菜每斤 (1 斤 =500g) 的价格, $b=3$ 表示菠菜每斤的价格, 常数 10 表示你某天买菜总的花费, 若买菜习惯上总是以 “斤” 来买, 那么, 你买的青菜与菠菜只可能有两种情况, 即 $(2,2)$, 2 斤青菜, 2 斤菠菜; $(5,0)$, 5 斤青菜, 0 斤菠菜. 这是因为该方程的解要求只取整数. 本书研究的问题基本上都是在实数集上考虑的. 过去谈数集, 往往注意它的对象, 不大关注这些对象的运算. 事实上, 有理数集、实数集、复数集, 当把运算考虑进去, 可分别称为有理数域、实数域、复数域.

设 $\mathbb{F}$ 是复数集的一个至少含有两个元素的子集, 如 $\mathbb{F}$ 对 “$+$”“$-$”“$\times$”“$\div$” 四种运算封闭, 即若 $a,b\in\mathbb{F}$, 则 $a\pm b$, ab, $\dfrac{a}{b}\in\mathbb{F}$ $(b\neq 0)$, 则称 $\mathbb{F}$ 为一个**数域**.

复数运算满足加法、乘法的交换律、结合律以及乘法对加法的分配律, 这些运算规律自然地遗传给对 “$+$”“$\times$” 运算封闭的子集. 易于验证有理数集、实数集、复数集都满足上述运算性质, 它们都是数域. 但整数集对 “$\div$” 运算不封闭, 它不是数域. 数集

$$\mathbb{Q}(\sqrt{2})=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\text{为有理数}\}$$

按数的四则运算也构成一个数域 (请同学们按数域的定义自己证明). 这说明在有理数域与实数域之间还有很多数域. 今后, 记有理数域为 $\mathbb{Q}$, 实数域为 $\mathbb{R}$, 复数域为 $\mathbb{C}$.

例 1.1　在 $\mathbb{R}$ 中求解下列四个二元一次方程组

$$\text{(a)}\begin{cases}x_1-2x_2=1,\\2x_1+3x_2=0;\end{cases}\qquad\text{(b)}\begin{cases}x_1+2x_2=1,\\2x_1+4x_2=2;\end{cases}$$

$$\text{(c)}\begin{cases}x_1-2x_2=1,\\2x_1-4x_2=3;\end{cases}\qquad\text{(d)}\begin{cases}x_1-2x_2=1,\\2x_1+2x_2=-1,\\2x_1-x_2=\dfrac{1}{2}.\end{cases}\tag{1.2}$$

解　用消元法求解方程组 (a). 将 (a) 的第一个方程乘以 -2 加至第二个方程得 $7x_2=-2$, 即 $x_2=-\dfrac{2}{7}$, 代入第一个方程得 $x_1=\dfrac{3}{7}$. 经检验, $\left(\dfrac{3}{7},-\dfrac{2}{7}\right)$ 为方程组 (a) 的唯一解; 它表示直线 $x_1-2x_2=1$ 与 $2x_1+3x_2=0$ 的交点. 如图 1.2 所示.

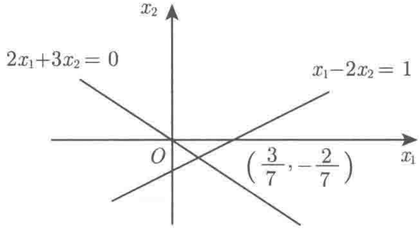


图 1.2

方程组 (b) 有无穷多个解, 它的第二个方程是多余的. 解的图像与图 1.1 相似, 是一条直线.

用消元法可得方程组 (c) 无解, 因方程组 (c) 表示的两条直线平行. 如图 1.3 所示.

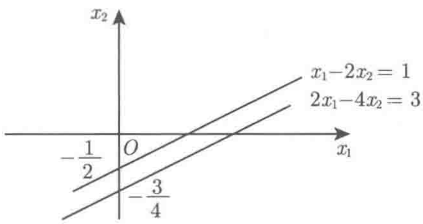


图 1.3

方程组 (d) 有唯一解. 将 (d) 的第二个方程乘以 $\dfrac{1}{2}$ 加至第一个方程, 得到它的第三个方程, 从而第三个方程是多余的.

三元一次方程的一般形式是

$$ax+by+cz=d \quad (a,b,c,d\text{均为实数}). \tag{1.3}$$

当 $c\neq 0$ 时, 对 x,y 的任一组值 (x_0,y_0), 代入方程 (1.3) 后可得 z 的唯一的值 z_0, 即得到方程 (1.3) 的一个解 (x_0,y_0,z_0). 故方程 (1.3) 一般有无穷多解. 在 $abc\neq 0$ 的条件下, 方程 (1.3) 在空间直角坐标系中的图像是一个平面 (a,b,c 中有两个不为 0, 也表示一平面, 柱面. 为更几何直观, 增加了 $abc\neq 0$ 的条件).

例 1.2 求解三元一次方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 3x_1+5x_2+x_3=-2, \\ -x_1+2x_2+6x_3=1. \end{cases} \tag{1.4}$$

解 用消元法, 将第一个方程分别乘以 -3 和 1 加至第二、第三个方程, 得到

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ 8x_2+4x_3=-14, \\ x_2+5x_3=5. \end{cases}$$

交换第二、第三个方程得

$$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 4, \\ x_2+5x_3=5, \\ 8x_2+4x_3=-14. \end{cases} \tag{1.5}$$

将方程组 (1.5) 的第二个方程乘以 -8 加至第三个方程得 $-36x_3=-54$, 即 $x_3=\dfrac{3}{2}$. 代入第二个方程, 解得 $x_2=-\dfrac{5}{2}$. 继而求得 $x_1=3$. 故 $\left(3,-\dfrac{5}{2},\dfrac{3}{2}\right)$ 为方程组 (1.4) 的唯一解. 它所对应的点是方程组 (1.4) 中的三个方程所对应的三个平面的公共点.

例 1.3　考察下面三个三元一次方程组

$$
\text{(a)}\begin{cases} x_1-x_2-x_3=4,\\ 3x_1+5x_2+x_3=-2,\\ 2x_1+6x_2+2x_3=-6; \end{cases}\qquad
\text{(b)}\begin{cases} x_1-x_2-x_3=4,\\ 3x_1+5x_2+x_3=-2,\\ 2x_1+6x_2+2x_3=5; \end{cases}
$$

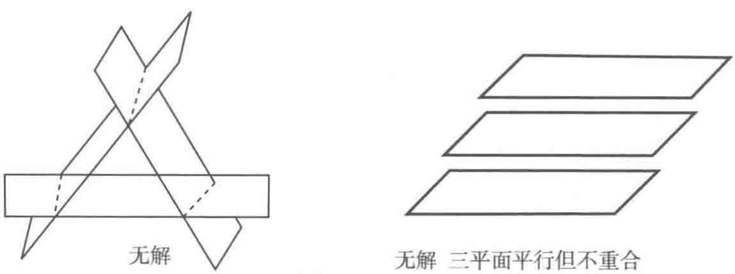
$$
\text{(c)}\begin{cases} x_1-x_2-x_3=4,\\ 3x_1+5x_2+x_3=-2,\\ 2x_1+2x_2=-1,\\ 3x_1+x_2-x_3=3. \end{cases}\tag{1.6}
$$

解　用消元法可得: (a) 有无穷多个解, 解的图像是方程 $x_1-x_2-x_3=4$ 与 $4x_2+2x_3=-7$ 所对应的平面的交线. (a) 的第三个方程是多余的. 方程组 (b) 无解, 它的后两个方程对应的平面交于一条直线, 但该直线平行于第一个方程所对应的平面. 方程组 (c) 含四个方程, 但第一个方程与第三个方程的和等于第四个方程, 从而第四个方程是多余的. 而前三个方程组成的方程组同 (b) 一样无解.

上面的二元、三元线性方程组的例子说明, 一般的方程组并不都像中学里遇到的方程组那样 "单纯", 即只有唯一的解. 它可能无解, 可能有无穷多个解, 当然也可能只有唯一解.

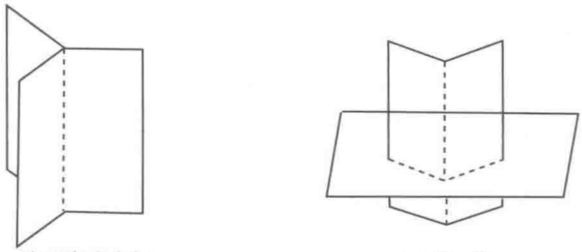
从几何的观点看, 三元一次方程组的解的情况是由方程所对应的平面的位置决定的: 当两个平面的交线与第三个平面平行 (或三个平面平行) 时, 方程组无解; 当三个平面交于一条直线或三个平面重合时, 方程组有无穷多个解; 当三个平面交于一点时, 方程组有唯一解.

如图 1.4 所示.



无解　　　　无解　三平面平行但不重合

(a)　　　　(b)



有无穷多个解 (c)　　有唯一解 (d)

图 1.4

二元、三元一次方程组的解所对应的图像都仅与直线、平面相关, 而与弧、曲线、曲面无关. 所以一次式常称为线性式, 这也是线性代数的 “线性” 一词的来源.

对于多于三个变量的线性方程组, 现实世界中没有图像与之对应; 但现实生活中, 这类线性方程组的确存在, 需作进一步讨论.

1.2 n 元线性方程组

先看一个例子.

例 1.4 图 1.5 是某地的农田灌溉水渠流量图, 其中 Ⓐ, Ⓑ, $\cdots$, Ⓔ 表示水渠交汇点, 水的流量以 “万 m^3” 标于图上. 现要计算各交汇点处未知的水的流量.

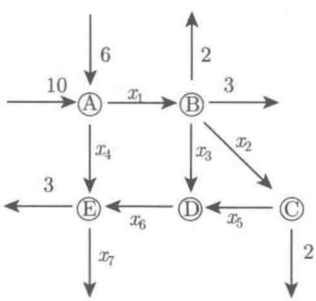


图 1.5

因在任一点处流入与流出的水量必须相同, 由已知条件可得到 5 个方程

$$\begin{aligned}
10+6&=x_1+x_4, && \text{(交汇点 Ⓐ)}\\
x_1&=2+3+x_2+x_3, && \text{(交汇点 Ⓑ)}\\
x_2&=2+x_5, && \text{(交汇点 Ⓒ)}\\
x_3+x_5&=x_6, && \text{(交汇点 Ⓓ)}\\
x_4+x_6&=3+x_7. && \text{(交汇点 Ⓔ)}
\end{aligned}$$

将上面的 5 个方程加以整理 (移项, 按未知量标号排列) 得

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad + x_4 \qquad\qquad\qquad = 16, \\ x_1 - x_2 - x_3 \qquad\qquad\qquad\quad = 5, \\ \quad x_2 \qquad\qquad - x_5 \qquad\quad = 2, \\ \qquad\quad x_3 \qquad + x_5 - x_6 \quad = 0, \\ \qquad\qquad x_4 \qquad + x_6 - x_7 = 3, \end{cases} \tag{1.7}$$

这是一个含 7 个未知量 5 个方程的线性方程组.

一般地, n 元 (即含 n 个未知量) 线性方程组可写成如下形式:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1.8}$$

其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 表示 n 个未知量, m 是方程的个数; $a_{ij}\,(i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$ 称为方程组的系数, 它的第一个足标 i 表示它在第 i 个方程 (行) 中, 第二个足标 j 表示它是第 j 个未知量 (列) 的系数, $b_i\,(i = 1, \cdots, m)$ 称为方程组的常数项. 方程组 (1.8) 的全称为**含 n 个未知量 m 个方程的线性方程组**. 一般来讲, m 未必等于 n. 若所有的 $b_i = 0\,(i = 1, \cdots, m)$, 则称方程组 (1.8) 为**齐次线性方程组**. 否则称方程组 (1.8) 为**非齐次线性方程组**.

若取一组数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 分别代替方程组 (1.8) 中的 n 个未知量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$, 使方程组 (1.8) 的 m 个等式都成立, 则称有序数组 $(c_1, c_2, \cdots, c_n)$ 是方程组 (1.8) 的一个**解**. 方程组 (1.8) 的全部解所组成的集合称为式 (1.8) 的**解集合**. 如果方程组 (1.8) 有解, 则称它是**相容**的; 否则, 称它是**不相容**的. 若两个线性方程组的解构成的集合相同, 则称它们是**同解的方程组**.

现在来求解线性方程组 (1.7), 方法是求解二元、三元一次方程组的消元法 (一般称为高斯消元法). 将方程组 (1.7) 的第一个方程乘以 -1 加至第二个方程得 $-x_2 - x_3 - x_4 = -11$, 再将它加至方程组 (1.7) 的第三个方程得 $-x_3 - x_4 - x_5 = -9$, 将这个方程加至方程组 (1.7) 的第四个方程得 $-x_4 - x_6 = -9$, 再将此方程加至方程组 (1.7) 的第五个方程得 $-x_7 = -6$. 这样, 变换后得到的方程组为

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad\quad + x_4 \qquad\qquad\qquad = 16, \\ \quad - x_2 - x_3 - x_4 \qquad\qquad\quad = -11, \\ \qquad\quad - x_3 - x_4 - x_5 \qquad\quad = -9, \\ \qquad\qquad\quad - x_4 \qquad - x_6 \quad = -9, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad - x_7 = -6. \end{cases} \tag{1.9}$$

可将 x_5, x_6 移至方程的右边, 并将后四个方程两边同除以 -1 得

$$\begin{cases} x_1 \quad\quad\quad + x_4 = 16, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 11, \\ x_3 + x_4 = 9 - x_5, \\ x_4 = 9 - x_6, \\ x_7 = 6, \end{cases} \tag{1.10}$$

这里 x_5, x_6 称为自由未知量, x_1, x_2, x_3, x_4 可用 x_5, x_6 表出, 得

$$x_1 = 7 + x_6, \quad x_2 = 2 + x_5, \quad x_3 = x_6 - x_5, \quad x_4 = 9 - x_6, \quad x_7 = 6.$$

对于 x_5, x_6 的任一组值 (c_1, c_2), 由上式可唯一确定 x_1, x_2, x_3, x_4 的值. 方程组 (1.7) 虽然在理论上有无穷多个解, 但在这个实际问题中, 水渠中水的流量不为负数, 所以, $x_5, x_6 \leqslant 9$ 且 $x_5 \leqslant x_6$. 方程组 (1.9) 中 x_4, x_5 也可作为自由未知量. 这说明调节这一水渠中各段的水的流量既可在 Ⓒ—Ⓓ 段, Ⓓ—Ⓔ 段, 也可在 Ⓐ—Ⓔ 段上实施. 但也不是任意两个未知量都可选作自由未知量 (如同时取 x_1, x_6 作自由未知量就不能确定 x_2, x_3, x_5), 这些问题都值得探讨.

例 1.4 中方程组的解不唯一, 例 1.5 中的线性方程组的解却是唯一的. 下面仍用消元法求解.

例 1.5 求解线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \quad\quad + 6x_4 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 = -1, \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases} \tag{1.11}$$

解 将方程组 (1.11) 的第一个方程分别乘以 $-1, -\dfrac{3}{2}$ 加至第二、第三个方程, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \quad\quad + 6x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -4, \\ 5x_2 + 3x_3 - 8x_4 = -4, \\ 2x_2 + x_3 + 5x_4 = 4. \end{cases} \tag{1.12}$$

将方程组 (1.12) 的第二个方程分别乘以 $-5, -2$ 加至第三、第四个方程, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \quad\quad + 6x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -4, \\ -7x_3 + 17x_4 = 16, \\ -3x_3 + 15x_4 = 12. \end{cases} \tag{1.13}$$

将方程组 (1.13) 的三、四两个方程交换, 变换后将第三个方程乘以 $-\dfrac{7}{3}$ 加至第四个方程, 得

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \qquad\quad + 6x_4 = 2, \\ \qquad x_2 + 2x_3 - 5x_4 = -4, \\ \qquad\quad -3x_3 + 15x_4 = 12, \\ \qquad\qquad\quad -18x_4 = -12, \end{cases} \tag{1.14}$$

求得 $x_1 = -\dfrac{1}{3}, x_2 = \dfrac{2}{3}, x_3 = -\dfrac{2}{3}, x_4 = \dfrac{2}{3}$.

注　线性方程组 (1.10) 和 (1.14) 的形状都像一个阶梯, 称为**行阶梯形方程组**.

在上面求解线性方程组 (1.7) 与 (1.11) 的过程中, 应体会到还存在一些问题, 例如,

(i) 对线性方程组作消元变换后得到的线性方程组与原方程组是否同解? 虽然中学里对二元、三元线性方程组也是通过消元变换来求解, 但是没有严格证明消元变换不改变方程组的解.

(ii) 带着未知量、运算符号和等号作消元变换是否累赘?

(iii) n 元线性方程组在什么条件下无解, 有解? 有解的情况下, 何时有无穷多个解? 何时有唯一解?

练　习　1.1—1.2

1. 指出下列线性方程组所表示的几何图形:

(1) $\begin{cases} x \qquad\; = 0, \\ \quad y + z = 2; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ x - y + z = 2, \\ 4x + 5y - 5z = -1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x - y + 2z = 0, \\ 2x + y + 3z = -1; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y - z = 0, \\ 3x + 4y + z = -2. \end{cases}$

2. 解下列线性方程组:

(1) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 = 0, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 - 7x_4 = 0, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 + 6x_4 = 0, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 - 7x_4 = 0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 10, \\ 11x_1 + 3x_2 \qquad = 8; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 1, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 \qquad = 0; \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 2x_2 + 7x_3 = -7, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = -3. \end{cases}$

3. 设三个平面的方程分别是: $x+2y+z=1, -2x+3y-2z=2, -x+5y-z=1$, 它们是否有公共点.

4. 求一个二次多项式 $f(x)$, 使得 $f(1)=-8, f(2)=1, f(3)=20$.

1.3 矩阵与向量

将线性方程组 (1.8) 等号左边的未知量 $x_i(i=1,\cdots,n)$ 及 "+" 号去掉, 就得到一个含有 $m\times n$ 个数据的 m 行 n 列的数表.

定义 1.1 由数域 $\mathbb{F}$ 中 $m\times n$ 个数 $a_{ij}\ (i=1,\cdots,m; j=1,\cdots,n)$ 排列成的 m 行 n 列的数表

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \tag{1.15}$$

称为 $m\times n$ **矩阵**, 其中 a_{ij} 为该矩阵的第 i 行第 j 列的元素.

通常用大写黑体的英文字母来表示矩阵, 矩阵 (1.15) 可简写为 $\boldsymbol{A}$, 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$, 或 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$.

数域 $\mathbb{F}$ 中 $m\times n$ 矩阵的集合记为 $M_{m\times n}(\mathbb{F})$, 实数域 $\mathbb{R}$ 中 $m\times n$ 矩阵的集合记为 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$. 若 $m=n$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**方阵**. 数域 $\mathbb{F}$ 上 n 阶方阵的集合记作 $M_n(\mathbb{F})$. $a_{ii}(i=1,\cdots,n)$ 称为 $\boldsymbol{A}$ 的**主对角线元素**, 简称**对角线元素**.

若 $m=1$, $\boldsymbol{A}$ 是 1 行 n 列的矩阵, 此时称 $\boldsymbol{A}=(a_{11}\ \ a_{12}\ \ \cdots\ \ a_{1n})$ 为**行矩阵**, 又称为**行向量**. 行向量也记作 $\boldsymbol{A}=(a_{11},a_{12},\cdots,a_{1n})$. 若 $n=1$, $\boldsymbol{A}$ 是 m 行 1 列的矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

也称为**列向量**. 行向量和列向量统称为向量. 它的一般描述如下.

定义 1.2 数域 $\mathbb{F}$ 中 n 个数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的有序数组 $(a_1,a_2,\cdots,a_n)$ 称为数域 $\mathbb{F}$ 上的 n **维** (或 n **元**) **向量**, 简称**向量**. 数 a_i 称为 n 维向量的第 i 个分量. 例如, $\mathbb{F}$ 是实数域, 称其为实向量; $\mathbb{F}$ 是复数域, 称其为复向量. 若非特别声明, 我们一般在实数域上讨论实向量, 并记 $\mathbb{R}^n$ 为实数域 $\mathbb{R}$ 上 n 维向量的全体构成的集合.

n 维向量的概念是几何学中二、三维向量的推广. 虽然, 在现实空间中 $n>3$ 维的向量无法几何表现, 但仍有实际意义. 例 1.5 中的线性方程组的解可以依未知

量的标记顺序写成 $\left(-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$, 它是一个 4 维向量. 含 n 个未知量的线性方程组如果有解, 它的解依序必然组成一 n 维向量, 称为该方程组的解向量.

n 维向量习惯上用黑斜体小写希腊或英文字母表示. 它可以写成一行, 也可以写成一列. 与矩阵概念统一起来, 式 (1.16) 既为列向量, 也是一 $m \times 1$ 列矩阵. m 维行向量是一 $1 \times m$ 矩阵, 也称为**行矩阵**. 若借用式 (1.16) 中的记法, 则 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}} = (a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{m1})$(用 $\boldsymbol{\alpha}$ 代替 $\boldsymbol{A}$, 这里 "T" 表示转置). 按照定义, $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$ 是同一向量, 但从矩阵的角度来看, 它们并不相同. 本书中如无特殊声明, 所讨论的向量都看成列向量.

$m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$, 当 $m = n = 1$ 时, $\boldsymbol{A}$ 由一个数 a_{11} 构成, 这时就写作 $\boldsymbol{A} = a_{11}$. 若 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 的所有元素都等于 0, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为**零矩阵**, 记为 $\boldsymbol{O}_{m \times n}$ 或 $\boldsymbol{O}$.

两个矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{m \times n}$, $\boldsymbol{B} = (b_{ij})_{s \times t}$, 如果满足 $m = s$, $n = t$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 是**同型矩阵**. 例如,

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix} \quad 与 \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

是同型矩阵.

若两个 $m \times n$ 矩阵 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$ 的对应位置的元素相等, 即 $a_{ij} = b_{ij}\ (i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n)$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**, 记作 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$.

例 1.6　设

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

若 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$, 则 $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1, y_1 = 0$.

n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 中, 如果除主对角线元素外其余的元素都为 0, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**对角矩阵**, 即

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}, \tag{1.17}$$

记为 $\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn})$.

若式 (1.17) 中的 $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn}$, 即

$$\boldsymbol{A} = \mathrm{diag}(a, a, \cdots, a) \quad (a = a_{11}), \tag{1.18}$$

则称 $\boldsymbol{A}$ 为**纯量矩阵**, 若式 (1.18) 中的 $a = 1$, 则称 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶**单位矩阵** (**或恒等矩阵**), 记为 $\boldsymbol{I}_n$, 即