复变函数习题
精选精解

主编 张天德 孙 娜

FUBIAN HANSHU XITI JINGXUAN JINGJIE

山东科学技术出版社
www.lkj.com.cn

复变函数习题精选精解

主编 张天德 孙 娜

FUBIAN HANSHU XITI JINGXUAN JINGJIE

山东科学技术出版社

图书在版编目（CIP）数据

复变函数习题精选精解/张天德，孙娜主编. —济南：山东科学技术出版社，2015

ISBN 978－7－5331－7611－2

Ⅰ.①复… Ⅱ.①张… ②孙… Ⅲ.①复变函数—高等学校—题解 Ⅳ.①O174.5－44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 198471 号

复变函数习题精选精解

主　编　张天德　孙　娜

主管单位：山东出版传媒股份有限公司

出　版　者：山东科学技术出版社

地址：济南市玉函路 16 号

邮编：250002　电话：(0531)82098088

网址：www.lkj.com.cn

电子邮件：sdkj@sdpress.com.cn

发　行　者：山东科学技术出版社

地址：济南市玉函路 16 号

邮编：250002　电话：(0531)82098071

印　刷　者：山东金坐标印务有限公司

地址：莱芜市赢牟西大街 28 号

邮编：271100　电话：(0634)6276023

开本：720mm×1020mm　1/16

印张：10.25

版次：2015 年 8 月第 1 版　2015 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978－7－5331－7611－2

定价：18.00 元

前　言

复变函数论是数学专业的一门重要的基础课之一，是数学分析的后续课程。它不但渗透到数学领域的各个分支，而且在其他学科中有着重要的应用。为了帮助广大读者学好这门课程，我们编写了这本与钟玉泉主编的《复变函数论》（第三版）完全配套的辅导用书，以进一步加深对基本概念的理解，加强对基本解题方法与技巧的掌握，进而提高学习能力和应试水平。

本书共分六章，章节的划分与教材一致，每章包括四大部分：

一、主要知识点：用直观、形象的网络结构图的形式给出本章的主要知识点以及之间的内在联系，便于学生从总体上系统地掌握本章知识体系和核心内容，更准确地把握知识点。

二、基本题型：首先全面系统地总结和归纳本章的基本题型，然后选择若干具有代表性和技巧性的例题，逐层分析，分类讲解。例题的列举按由浅入深的层次编排，对每题的解题思路、解题方法以及解法旁注，都简明清晰。使读者真正将知识掌握和解题能力高效结合，浑然一体。

三、综合提高型：通过选取代表性的例题，可以逐步领会多个知识点之间的相互结合，更好地灵活掌握理论知识，为提高综合解题的能力和数学思维水平打下坚实基础。

四、同步自测题及参考答案：精选有代表性、提高性的题目，以检测学习效果，提高读者的综合解题能力，巩固和提高学习效果。

本书注意吸纳众家之长，参考了多本同类书籍。在此向这些书籍的编著者表示感谢。限于编者水平有限，书中疏漏与不足之处，在所难免，敬请读者批评指正。

目 录

MULU

第一章　复数与复变函数

§1. 复　　数

知识要点

(一)复数及其四则运算

1. 复数的概念　形如 $z=x+\mathrm{i}y$ 或 $z=x+y\mathrm{i}$ 的数,称为复数,其中 x 和 y 是任意实数,i 满足 $\mathrm{i}^2=-1$,称为复数单位.

实数 x,y 分别称为复数 z 的实部和虚部,记为 $x=\mathrm{Re}z,y=\mathrm{Im}z$.

2. 复数相等的概念　设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$,则 $z_1=z_2$ 当且仅当 $x_1=x_2,y_1=y_2$.

3. 共轭复数的概念　复数 z 的共轭复数常记为 $\bar{z}$,$\overline{x+\mathrm{i}y}=x-\mathrm{i}y$.

4. 复数的运算法则

对于复数 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1,z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$ 有

$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2)$

$z_1z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+y_1x_2)$

$\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\dfrac{y_1x_2-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\quad(z_2\neq 0)$

(二)复数的模与辐角

1. 模的定义　我们用向量 $\overrightarrow{Oz}$ 来表示复数 $z=x+\mathrm{i}y$. 其中 x,y 顺次等于 $\overrightarrow{Oz}$ 沿 x 轴与 y 轴的分量,向量 $\overrightarrow{Oz}$ 的长度称为复数 z 的模或绝对值,以符号 $|z|$ 或 r 表示,因而有

$$r=|z|=\sqrt{x^2+y^2}\geqslant 0$$

且 $|z|=0$ 的充要条件是 $z=0$.

2. 模的有关不等式

(1) $|x|\leqslant|z|,|y|\leqslant|z|,|z|\leqslant|x|+|y|$.

(2)三角不等式　　$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|$

$$||z_1|-|z_2||\leqslant|z_1-z_2|$$

(3) $|z_1-z_2|$ 表示点 z_1 与 z_2 的距离,记为

$$\mathrm{d}(z_1,z_2)=|z_1-z_2|$$

3. 辐角的定义　　实轴正向到非零复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 所对应的向量 $\overrightarrow{Oz}$ 间的夹角 θ 合于

$$\tan\theta=\frac{y}{x}$$

称为复数 z 的辐角,记为 $\theta=\mathrm{Arg}z$.

注 任一非零复数 z 有无穷多个辐角，现以 $\arg z$ 表示其中的一个特定值并称合条件 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$ 的一个为 $\operatorname{Arg} z$ 的主值，称之为 z 的主辐角，于是 $\theta=\operatorname{Arg} z=\arg z+2k\pi\quad(k=0,\pm1,\pm2,\cdots)$.

4. 复数的三角形式及指数形式 设 $z\neq0$，r 是 z 的模，θ 是 z 的任意一个辐角，则 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$ 称为 z 的三角形式，$z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ 称为 z 的指数形式.

(三)复数的乘幂与方根

1. 复数的乘幂 作为乘积的特例，我们考虑非零复数 z 的正整数次幂 z^n，它是 n 个相同因子的乘积，设 $z=r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$，则 $z^n=r^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}=r^n(\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta)$.

当 $r=1$ 时，则得棣莫弗公式 $(\cos\theta+\sin\theta)^n=\cos n\theta+\mathrm{i}\sin n\theta$.

2. 复数的方根 若 $w^n=z$，则 w 称为复数 z 的 n 次方根，记其根的总体为 $\sqrt[n]{z}$，令 $z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$，则

$$w_k=(\sqrt[n]{z})_k=\sqrt[n]{r}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\theta+2k\pi}{n}}$$

$$k=0,1,2,\cdots,n-1.$$

在几何上，$\sqrt[n]{z}$ 的几个值就是以原点为中心，$\sqrt[n]{r}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的几个顶点.

(四)共轭复数的性质

$\overline{(\bar{z})}=z$，$\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$.

$\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\bar{z}_2$，$\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\quad(z_2\neq0)$.

$|z|^2=z\bar{z}$，$\operatorname{Re}z=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$，$\operatorname{Im}z=\dfrac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}$.

设 $R(a,b,c,\cdots)$ 表示对于复数 $a,b,c,\cdots$ 的任一有理运算，则

$\overline{R(a,b,c,\cdots)}=R(\bar{a},\bar{b},\bar{c},\cdots)$.

基本题型

求复数的实部与虚部

【例 1.1】 设复数 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$，则 $\operatorname{Re}z=$ ________，$\operatorname{Im}z=$ ________.

解 由于 $z=\dfrac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}+\dfrac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}=\dfrac{\mathrm{i}^2+(1-\mathrm{i})^2}{(1-\mathrm{i})\mathrm{i}}=\dfrac{-1-2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}=\dfrac{(-1-2\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}{(1+\mathrm{i})(1-\mathrm{i})}=-\dfrac{3}{2}-\dfrac{\mathrm{i}}{2}$，

所以 $\operatorname{Re}z=-\dfrac{3}{2}$，$\operatorname{Im}z=-\dfrac{1}{2}$.

【例 1.2】 若 $(3+6\mathrm{i})x+(5-9\mathrm{i})y=6-7\mathrm{i}$，则 $x=$ ________，$y=$ ________.

解 原式整理化简得 $(3x+5y)+\mathrm{i}(6x-9y)=6-7\mathrm{i}$，

由复数相等定义知 $\begin{cases}3x+5y=6,\\6x-9y=-7,\end{cases}$ 解此二元实方程组得 $\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3},\\y=1.\end{cases}$

求复数的模与辐角

【例 1.3】 设 $z=-1+3i$,则 $|z|=$ ________,$\mathrm{Arg}z=$ ________,$\arg z=$ ________.

解 根据公式,有 $|z|=\sqrt{(-1)^2+3^2}=\sqrt{10}$.

由于 $z=-1+3i$ 在第二象限,所以 $\arg(-1+3i)=\arctan\left(\frac{3}{-1}\right)+\pi=\pi-\arctan 3$,

从而 $\mathrm{Arg}(-1+3i)=-\arctan 3+(2k+1)\pi, k=0,\pm1,\cdots$.

【例 1.4】 设 $z=\frac{1}{2}(1-3i)$,则 $\arg z=$ ________.

(A)$\pi-\arctan 3$　　(B)$-\arctan 3$

(C)$-\pi-\arctan 3$　　(D)$2k\pi-\arctan 3, k\in\mathbf{Z}$

解 由于 $z=\frac{1}{2}(1-3i)$落在第四象限,所以 $\arg z=\arctan\dfrac{-\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}=-\arctan 3$.

故应选(B).

求复数的三角形式和指数形式

【例 1.5】 设 $z=-3-2i$,则 z 的三角形式为 ________,z 的指数形式为 ________.

解 $|z|=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{13}$.

由于 $z=-3-2i$ 在第三象限,所以 $\arg(-3-2i)=\arctan\frac{-2}{-3}-\pi=\arctan\frac{2}{3}+\pi$,

从而 z 的三角形式为$\sqrt{13}\left[\cos\left(\arctan\frac{2}{3}+\pi\right)+i\sin\left(\arctan\frac{2}{3}+\pi\right)\right]$.

z 的指数形式为 $\sqrt{13}e^{i(\arctan\frac{2}{3}+\pi)}$.

【例 1.6】 复数 $z=\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}$的三角形式为________,指数形式为________.

解 原复数 $z=\sin\frac{\pi}{3}-i\cos\frac{\pi}{3}$变形,得

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

从而复数 z 的三角形式为 $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$,指数形式为 $e^{i\left(-\frac{\pi}{6}\right)}$.

【例 1.7】 把复数 $z=1+\sin\alpha+i\cos\alpha, -\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$化为三角形式与指数形式,并求 z 的主辐角与模.

分析 在求解涉及到三角函数表达式复数的三角形式与指数形式时,为减少计算量,一般都是借助三角公式对复数进行化简变形,从而找到复数的模与辐角表示.

解 $z=1+\sin\alpha+i\cos\alpha=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

$$=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}2\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

因为 $-\pi<\alpha<-\frac{\pi}{2}$,所以 $\frac{\pi}{2}<\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}<\frac{3}{4}\pi$. 因此 $\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)<0$,

故 $r=|z|=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$.

由于 $-\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\cos\left(\frac{5}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)$,

$$-\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\pi+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)=\sin\left(\frac{5}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right),$$

从而 z 的三角形式为:

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(\frac{5}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{5}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

及指数形式为:

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{5}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

注意,这里的辐角 $\theta=\frac{5}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}$ 不是主辐角,因为 $\frac{3}{2}\pi<\frac{5}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}<\frac{7}{4}\pi$,但它只能与主辐角相差一个 2π 的整数倍,从上式容易看出,如果不等式的每项各加 (-2π),得 $-\frac{\pi}{2}<-\frac{3}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}<-\frac{\pi}{4}$. 因此 $\arg z=-\frac{3}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}$. 若 θ 取主辐角,那么 z 的三角表示与指数表示为:

$$z=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\left[\cos\left(-\frac{3}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{3}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$$
$$=-2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{3}{4}\pi-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

复数指数形式和三角形式在解题中的应用

【例 1.8】 设 $z=\frac{1+\sqrt{3}\mathrm{i}}{1-\sqrt{3}\mathrm{i}}$,则 $z^{10}=$________.

(A) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　(B) $\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　(C) $-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$　　(D) $-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$

解 先把分式中的分子与分母化成指数形式:

$$1+\sqrt{3}\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}},$$
$$1-\sqrt{3}\mathrm{i}=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)},$$

再由复数的除法和求乘幂的运算,得

$$z^{10}=\left(\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{3}\right)}}\right)^{10}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{20}{3}\pi}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2}{3}\pi}=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i},$$

故应选(C).

【例 1.9】 设 $z=(1+\mathrm{i})^{1000}+(1-\mathrm{i})^{1000}$,则 $z=$________.

解 由于 $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$，

$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{4})}$.

所以 $z=(1+\mathrm{i})^{1000}+(1-\mathrm{i})^{1000}=(\sqrt{2})^{1000}\mathrm{e}^{\mathrm{i}250}+(\sqrt{2})^{1000}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}250}=2^{251}$.

【例 1.10】 设 $(1+\mathrm{i})^n=(1-\mathrm{i})^n$，则 $n=$________.

(A) $4k, k\in\mathbf{Z}$　　(B) $2k, k\in\mathbf{Z}$　　(C) $3k, k\in\mathbf{Z}$　　(D) $k, k\in\mathbf{Z}$

解 先将等式两端小括号里边的复数写成指数形式：

$$1+\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}},$$

$$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{4})},$$

再利用复数的幂运算及复数相等的刻画条件，可得

$$(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{4}}=(\sqrt{2})^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(-\frac{n\pi}{4})}\Rightarrow\frac{n\pi}{4}=-\frac{n\pi}{4}+2k\pi\Rightarrow n=4k, k\in\mathbf{Z}.$$

故应选(A).

【例 1.11】 若 n 为自然数，且 $x_n+\mathrm{i}y_n=(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n$，其中 x_n, y_n 为实数，

求证：$x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}=4^{n-1}\sqrt{3}$.

分析 复数 n 次幂的实部与虚部 y_n，可以通过先将复数化为三角形式，再利用幂的运算可得.

证明 由 $x_n+\mathrm{i}y_n=(1+\mathrm{i}\sqrt{3})^n=(2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}})^n=2^n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{n\pi}{3}}=2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{3}\right)$,

利用复数相等的概念，可得

$$x_n=2^n\cos\frac{n\pi}{3}, y_n=2^n\sin\frac{n\pi}{3}.$$

于是

$$\begin{aligned}x_{n-1}y_n-x_ny_{n-1}&=2^{2n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{3}\sin\frac{n\pi}{3}-2^{2n-1}\cos\frac{n\pi}{3}\sin\frac{(n-1)\pi}{3}\\&=2^{2n-1}\sin\left[\frac{n\pi}{3}-\frac{(n-1)\pi}{3}\right]=2^{2n-1}\sin\frac{\pi}{3}=4^{n-1}\sqrt{3}.\end{aligned}$$

故命题得证.

【例 1.12】 把 $\cos5\theta$ 与 $\sin5\theta$ 用 $\sin\theta$ 与 $\cos\theta$ 来表示.

分析 利用 Demoivre 公式，如果把等式左端用二项式定理展开，再利用复数相等的概念，就可得到 $\cos n\theta$ 与 $\sin n\theta$ 用 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$ 来表示的表达式.

解 $\cos5\theta+\mathrm{i}\sin5\theta=(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)^5$

$$=\cos^5\theta+\mathrm{i}5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta-10\mathrm{i}\cos^2\theta\sin^3\theta+5\cos\theta\sin^4\theta+\mathrm{i}\sin^5\theta,$$

从而有

$$\cos5\theta=\cos^5\theta-10\cos^3\theta\sin^2\theta+5\cos\theta\sin^4\theta,$$

$$\sin5\theta=5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta.$$

【例 1.13】 设 n 为自然数，证明等式

$$\left(\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}\right)^n=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$$

分析 此题涉及到复数 n 次幂的等式，通常先将复数化为三角形式，再利用 De Moivre 公式

$(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi$ 证明.

证明 令 $\theta=\frac{\pi}{2}-\varphi$,可知

$$\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}=\frac{1+\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi}{1+\cos\varphi-\mathrm{i}\sin\varphi}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{\varphi}{2}+2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\cos^2\frac{\varphi}{2}-2\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}\quad\frac{\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}}{\cos\frac{\varphi}{2}-\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}}$$

$$=\left(\cos\frac{\varphi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\varphi}{2}\right)^2=\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi,$$

故 $\left(\frac{1+\sin\theta+\mathrm{i}\cos\theta}{1+\sin\theta-\mathrm{i}\cos\theta}\right)^n=\cos n\varphi+\mathrm{i}\sin n\varphi=\cos n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\mathrm{i}\sin n\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right).$

复数方根公式的应用

【例 1.14】 方程 $z^3+1=0$ 的所有根为________.

解 由方程 $z^3+1=0$,可得 $z^3=-1=1\cdot e^{\mathrm{i}\pi}$,它的三次方根为 $z=\sqrt[3]{-1}$.

由方根公式得

$$z=\sqrt[3]{1}e^{\mathrm{i}\frac{\pi+2k\pi}{3}},k=0,1,2.$$

即 $k=0$ 时, $z_0=e^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$,

$k=1$ 时, $z_1=e^{\mathrm{i}\pi}=-1$,

$k=2$ 时, $z_2=e^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{3}}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$.

【例 1.15】 方程 $z^2-4\mathrm{i}z-(4-9\mathrm{i})=0$ 的所有根为________.

解 用配方法把原方程写成

$$z^2-4\mathrm{i}z+(2\mathrm{i})^2+4-(4-9\mathrm{i})=0,$$

即得二项方程 $(z-2\mathrm{i})^2=-9\mathrm{i}=9e^{\mathrm{i}(-\frac{\pi}{2})}$.

利用复数方根公式,得

$$z-2\mathrm{i}=\sqrt{9}e^{\mathrm{i}\frac{-\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}}=3e^{\mathrm{i}-\frac{\pi}{4}}e^{\mathrm{i}k\pi}=\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})e^{\mathrm{i}k\pi},(k=0,1).$$

故原方程有两根:

$$k=0\text{ 时},\quad z_0=\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})e^{\mathrm{i}0}+2\mathrm{i}=\frac{3\sqrt{2}}{2}+\left(2-\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{i},$$

$$k=1\text{ 时},\quad z_1=\frac{3\sqrt{2}}{2}(1-\mathrm{i})e^{\mathrm{i}\pi}+2\mathrm{i}=-\frac{3\sqrt{2}}{2}+\left(2+\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)\mathrm{i}.$$

【例 1.16】 解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$

解 由直接验证可知方程的根 $z\neq1$,从而原方程可改写为

$$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1.$$

令 $w=\dfrac{1+z}{1-z}$,则 $w^5=1$. 后一方程的根为 $w=1,e^{i\frac{2}{5}\pi},e^{i\frac{4}{5}\pi},e^{i\frac{6\pi}{5}},e^{i\frac{8\pi}{5}}$.

即 $w=e^{i\alpha}$,其中 $\alpha=0,\dfrac{2}{5}\pi,\dfrac{4}{5}\pi,\dfrac{6}{5}\pi,\dfrac{8}{5}\pi$.

从而 $z=\dfrac{w-1}{w+1}=\dfrac{e^{i\alpha}-1}{e^{i\alpha}+1}=\dfrac{\cos\alpha+i\sin\alpha-1}{\cos\alpha+i\sin\alpha+1}=\dfrac{2\sin\dfrac{\alpha}{2}\left(-\sin\dfrac{\alpha}{2}+i\cos\dfrac{\alpha}{2}\right)}{2\cos\dfrac{\alpha}{2}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}+i\sin\dfrac{\alpha}{2}\right)}=i\tan\dfrac{\alpha}{2}$,

故原方程的根为 $z=i\tan\dfrac{\alpha}{2}$,其中 $\alpha=0,\dfrac{2}{5}\pi,\dfrac{4}{5}\pi,\dfrac{6}{5}\pi,\dfrac{8}{5}\pi$.

【例 1.17】 设 w 为任意一个不等于 1 的 n 次单位根,则 $1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=$______.

(A)1 (B)0 (C)-1 (D)不确定

解 由于 $w^n=1$,且 $w\neq1$,所以

$1+w+w^2+\cdots+w^{n-1}=\dfrac{(1-w)(1+w+\cdots+w^{n-1})}{(1-w)}=\dfrac{1-w^n}{1-w}=0$,

故应选(B).

共轭复数运算性质的应用

【例 1.18】 设复数 $z=\dfrac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}$,则 $|z|=$______.

分析 若把 z 化成 $x+iy$ 的形式,然后求它的模,计算量比较大,注意到 $|\bar{z}|=|z|$. 可利用共轭复数的相关性质与模的相关性质化简.

解 $|z|=\left|\dfrac{(3+i)(2-i)}{(3-i)(2+i)}\right|=\left|\dfrac{(3+i)(2-i)}{\overline{(3-i)(2+i)}}\right|=\left|\dfrac{3+i}{3-i}\right|\cdot\left|\dfrac{2-i}{2+i}\right|=1.$

【例 1.19】 设 $|z|=1$,则对任何复数 a 与 b,有 $\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=$______.

解 (法一) $\left|\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|^2=\dfrac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\cdot\dfrac{\overline{az}+\bar{b}}{b\,\bar{z}+a}=\dfrac{a\,\bar{a}z\,\bar{z}+b\,\bar{b}+az\,\bar{b}+\bar{a}b\,\bar{z}}{b\,\bar{b}z\,\bar{z}+a\,\bar{a}+az\,\bar{b}+\bar{a}b\,\bar{z}}$

$$=\frac{|a|^2|z|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}(az\bar{b})}{|b|^2|z|^2+|a|^2+2\mathrm{Re}(az\bar{b})}=\frac{|a|^2+|b|^2+2\mathrm{Re}(az\bar{b})}{|b|^2+|a|^2+2\mathrm{Re}(az\bar{b})}=1.$$

(法二) 由于 $|z|=1$,所以 $1=\left|\dfrac{1}{z}\right|$,从而

$$\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|=\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\right|\cdot\left|\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}}\cdot\frac{1}{z}\right|=\left|\frac{az+b}{\bar{b}+\bar{a}\,\bar{z}}\right|=\left|\frac{az+b}{\overline{az+b}}\right|=1.$$

【例 1.20】 设 $\dfrac{\bar{z}}{z}=a+bi\quad(z\neq0)$,

试证:$a^2+b^2=1$.

证明 (法一) 令 $z=x+iy$,由原式得

$$\bar{z}=z(a+bi).$$

从而 $x-iy=(x+iy)(a+bi)=ax-by+i(ay+bx)$.

利用复数相等的概念,得

$$x=ax-by,y=ay+bx.$$

由于 $z\neq 0$，从而经 x,y 不全为零，不妨设 $x\neq 0$，从而

$\frac{a-1}{b}=\frac{y}{x}=\frac{-b}{a+1}$（这时 $b\neq 0,a\neq -1$）.

所以，$a^2-1=-b^2$ 即 $a^2+b^2=1$.

当 $b=0,a=-1$ 时 $a^2+b^2=1$ 仍成立.

（法二） $a+bi=\frac{(\bar{z})^2}{z\bar{z}}=\frac{(x-\mathrm{i}y)^2}{x^2+y^2}=\frac{x^2-y^2-\mathrm{i}2xy}{x^2+y^2}$，

从而 $a=\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2},b=\frac{-2xy}{x^2+y^2}$，

所以 $a^2+b^2=1$.

（法三） 由要证结论知 $a^2+b^2=|a+bi|^2$，再由题设只须证 $\left|\frac{\bar{z}}{z}\right|=1.(z\neq 0)$，这显然成立.

【例 1.21】 证明实系数一元 n 次方程

$$a_0z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_{n-1}z+a_n=0\quad(a_0\neq 0)$$

的虚根成共轭复数对.

分析 注意到 $a_0,a_1,\cdots,a_n$ 为实数，从而 $\overline{a_k}=a_k(k=0,1,\cdots,n-1)$. 要证明结论，只需说明：若 $a+bi(b\neq 0)$ 为方程的根，那么 $a-bi$ 也为方程的根. 我们可利用复数的共轭运算的性质进行证明.

证明 不妨设 $a+bi(b\neq 0)$ 为所给实系数方程的根，则

$$a_0(a+\mathrm{i}b)^n+a_1(a+\mathrm{i}b)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(a+\mathrm{i}b)+a_n=0.$$

上式两边取共轭运算可知

$$a_0\overline{(a+\mathrm{i}b)^n}+a_1\overline{(a+\mathrm{i}b)^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}\overline{a+\mathrm{i}b}+a_n=0.$$

从而

$$a_0(a-\mathrm{i}b)^n+a_1(a-\mathrm{i}b)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}(a-\mathrm{i}b)+a_n=0.$$

这说明 $a-\mathrm{i}b$ 也是所给方程的根，从而结论得证.

【例 1.22】 试解方程 $\bar{z}=z^{n-1}$（n 为自然数）.

分析 若令 $z=re^{\mathrm{i}\theta}$，将方程 $\bar{z}=z^{n-1}$ 或 $re^{-\mathrm{i}\theta}=r^{n-1}e^{\mathrm{i}(n-1)}\theta$ 利用实、虚部相等化为两个实方程 $r\cos\theta=r^{n-1}\cos(n-1)\theta$ 与 $-r\sin\theta=r^{n-1}\sin(n-1)\theta$，那么从此实方程解出 r,θ 是比较困难的. 但由方程两边取绝对值可知 $|\bar{z}|=|z^{n-1}|$，注意到 $|\bar{z}|=|z|$，可先求出 $|z|$，再通过 $\bar{z}=\frac{|z|^2}{z}$ 解出 z. 另外，由于不同的自然数 n 可给出不同的解，所以同时也需要对 n 加以讨论.

解 (1)当 $n=1$ 时，方程变为 $\bar{z}=1$，此时解为 $z=1$.

(2)当 $n=2$ 时，方程变为 $\bar{z}=z$，此时解为全体实数.

(3)当 $n\geqslant 3$ 时，由 $\bar{z}=z^{n-1}$ 知 $|\bar{z}|=|z^{n-1}|$，即

$|z|=|z|^{n-1}$. 于是 $|z|=0$ 或 $|z|=1$.

显然 $|z|=0$ 给出 $z=0$.

当 $z\neq 0$ 时，满足方程 $\bar{z}=z^{n-1}$ 的复数的模为 1，

即 $|z|=1$. 由于 $z\bar{z}=|z|^2=1$，将方程两边同时乘以 z 可知

$$z\bar{z}=z^n, z^n=1.$$

从而 $z=\sqrt[n]{1}=e^{i\frac{2k\pi}{n}}$,$(k=0,1,2,\cdots,n-1)$.

显然 $k=0$ 时此解也包含了 $n=1$ 时的解,故方程的解为:

①$n=2$ 时,为全体实数;

②$n\neq 2$ 时,$z=0$ 或 $z=e^{i\frac{2k\pi}{n}}(k=0,1,\cdots,n-1)$.

【例 1.23】 若 $z^2=(\bar{z})^2$,则 z 必为实数或纯虚数.

证明 (法一) 设 $z=a+bi$,则 $(a+bi)^2=(a-bi)^2$ 整理,得 $a^2-b^2+i2ab=a^2-b^2-i2ab$.

利用复数相等概念知 $ab=0$,从而 $a=0$ 或 $b=0$.

当 $b=0$ 时,z 为实数;

当 $a=0$ 时,z 为纯虚数.

(法二) 当 $z=0$ 时显然成立. 当 $z\neq 0$ 时,由原方程得 $\left(\frac{z}{\bar{z}}\right)^2=1$. 从而 $\frac{z}{\bar{z}}=\pm 1$.

当 $\frac{z}{\bar{z}}=1$,即 $z=\bar{z}$ 时,z 为实数.

当 $\frac{z}{\bar{z}}=-1$,即 $z=-\bar{z}$ 时,z 为纯虚数.

有关模的(不)等式的证明

【例 1.24】 试证 $|1-\overline{z_1}z_2|^2-|z_1-z_2|^2=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)$.

分析 等式左端出现关于复数 z 模的平方 $|z|^2$,可利用公式 $|z|^2=z\bar{z}$ 对等式左端化简整理.

证明

$$\begin{aligned}\text{左端}&=(1-\overline{z_1}z_2)(1-z_1\overline{z_2})-(z_1-z_2)(\overline{z_1}-\overline{z_2})\\&=1-|z_1|^2-|z_2|^2+|z_1|^2|z_2|^2\\&=(1-|z_1|^2)(1-|z_2|^2)=\text{右端}.\end{aligned}$$

注 初学者常把 z 写成 $x+iy$ 后再化简,这种方法计算量大.

【例 1.25】 若 $|\beta|<1$,试证:

(1)当 $|\alpha|=1$ 时,$\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|=1$;

(2)当 $|\alpha|<1$ 时,$\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|<1$;

(3)当 $|\alpha|>1$ 时,$\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|>1$.

证明 (1)当 $|\alpha|=1$ 时,$\left|\frac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|=\frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha\bar{\alpha}-\bar{\alpha}\beta|}=\frac{|\alpha-\beta|}{|\bar{\alpha}|\,|\alpha-\beta|}=\frac{|\alpha-\beta|}{|\alpha|\,|\alpha-\beta|}=\left|\frac{\alpha-\beta}{\alpha-\beta}\right|=1$.

(2)当 $|\alpha|<1$,$|\beta|<1$ 时,

因为

$$\begin{aligned}&|\alpha-\beta|^2-|1-\bar{\alpha}\beta|^2\\&=(\alpha-\beta)(\bar{\alpha}-\bar{\beta})-(1-\bar{\alpha}\beta)(1-\alpha\bar{\beta})\\&=|\alpha|^2+|\beta|^2-(\bar{\alpha}\beta+\bar{\beta}\alpha)-[1+|\alpha|^2|\beta|^2-(\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\beta})]\\&=|\alpha|^2+|\beta|^2-1-|\alpha|^2|\beta|^2\\&=|\alpha|^2(1-|\beta|^2)-(1-|\beta|^2)\end{aligned}$$

$=(1-|\beta|^2)(|\alpha|^2-1).$

又因为 $|\alpha|<1,|\beta|<1$，显然有 $(1-|\beta|^2)(|\alpha|^2-1)<0$，

故 $|\alpha-\beta|<|1-\bar{\alpha}\beta|$. 从而 $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|>1$.

(3)当 $|\beta|>1,|\alpha|<1$ 时，由(2)知 $(1-|\beta|^2)(|\alpha|^2-1)>0$，

故 $|\alpha-\beta|>|1-\bar{\alpha}\beta|$. 从而 $\left|\dfrac{\alpha-\beta}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|>1$.

注 此题(1)主要灵活运用 $|\alpha|=1$ 时有关系式

$$|\bar{\alpha}|=\frac{1}{|\alpha|}=\frac{1}{|\bar{\alpha}|}=\alpha\bar{\alpha}=1;$$

此题(2),(3)主要利用公式 $|z|^2=z\bar{z}$ 将模去掉，利用共轭复数的运算性质进行化简整理.

【例 1.26】 若 $|\alpha_k|<1,\lambda_k\geqslant0(k=1,2,\cdots,n)$，且

$\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，则 $|\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n|<1$.

证明 $|\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n|\leqslant|\lambda_1\alpha_1|+|\lambda_2\alpha_2|+\cdots+|\lambda_n\alpha_n|$

$=\lambda_1|\alpha_1|+\lambda_2|\alpha_2|+\cdots+\lambda_n|\alpha_n|<\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_n=1$，

从而 $|\lambda_1\alpha_1+\lambda_2\alpha_2+\cdots+\lambda_n\alpha_n|<1$.

【例 1.27】 设 $|z_k|=1\quad(k=1,2,\cdots,n)$.

试证：$\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}\right|=\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k\right|$.

证明 由 $|z_k|=1$ 可知 $z_k\bar{z}_k=1,|\bar{z}_k|=1$，

从而 $\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{z_k}\right|=\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{z_k\bar{z}_k}{z_k}\right|=\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\bar{z}_k\right|=\left|\overline{\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k\right)}\right|=\left|\displaystyle\sum_{k=1}^{n}z_k\right|$.

【例 1.28】 试证 (1)$\dfrac{z_1}{z_2}\geqslant0$ 的充要条件为 $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$；

(2)$\dfrac{z_k}{z_j}\geqslant0(z_j\neq0,k\neq j,j,k=1,2,\cdots,n)$ 的充要条件为 $|z_1+z_2+\cdots+z_n|=|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|$.

证明 (1)若 $\dfrac{z_1}{z_2}\geqslant0(z_2\neq0)$，$\dfrac{z_1}{z_2}$ 为非负实数，则

$\left|\dfrac{z_1}{z_2}+1\right|=\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|+1=\dfrac{z_1}{z_2}+1$，两边同乘以 $|z_2|$，即得

$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$.

反之，由 $|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$ 两边平方得 $|z_1+z_2|^2=(|z_1|+|z_2|)^2$，利用公式 $|z|^2=z\bar{z}$ 整理化简得 $\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)=|z_1\bar{z}_2|$，这说明 $z_1\bar{z}_2\geqslant0$，从而 $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{z_1\bar{z}_2}{|z_2|^2}\geqslant0$.

(2) 必要性同(1)，反之，利用三角不等式由 $|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|=|(z_1+z_2)+\cdots+z_n|\leqslant|z_1+z_2|+|z_3|+\cdots+|z_n|$，得

$|z_1|+|z_2|\leqslant|z_1+z_2|\Rightarrow|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$，

从而由(1)知 $\dfrac{z_1}{z_2}\geqslant0$，对于其他下标的 k,j 类似可证 $|z_k+z_j|=|z_k|+|z_j|$，从而由(1)可知

$\dfrac{z_k}{z_j}\geqslant 0(z_j\neq 0,k\neq j,k,j=1,2,\cdots,n)$.

求曲线的复数方程

【例 1.29】写出圆周 $x^2+2x+y^2=1$ 的复数形式.

分析 一般情况下,从(x,y)平面上已知曲线方程 $F(x,y)=0$ 出发,经过变数代换,可立即得其复数方程为

$$F\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2\mathrm{i}}\right)=0.$$

解 令 $x=\dfrac{z+\bar{z}}{2}$,$y=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$代入得

$$\frac{1}{4}(z+\bar{z})^2+(z+\bar{z})-\frac{1}{4}(z-\bar{z})^2=1.$$

化简得所给圆周的复数方程为 $z\bar{z}+z+\bar{z}-1=0$.

【例 1.30】设动点到两定点$(4,0)$与$(-4,0)$的距离之和等于 12,试求该动点轨迹方程.

解 设 z 为动点,则所求复数方程为

$$|z-4|+|z-(-4)|=12.$$

由定义,此为椭圆方程.

注 此题目尽量避免选择设 $z=x+\mathrm{i}y$ 形式,求出关于 x,y 关系式,这样解题计算量偏大.

【例 1.31】已知三角形的三顶点为 z_1,z_2,z_3,试求其面积.

分析 令 $z_j=x_j+\mathrm{i}y_j$,则

$$x_j=\frac{1}{2}(z_j+\bar{z}_j),\ y_j=\frac{1}{2\mathrm{i}}(z_j-\bar{z}_j).$$

在实数范围内,若三角形的三顶点为(x_1,y_1),(x_2,y_2),(x_3,y_3),则此三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1\\ x_2 & y_2 & 1\\ x_3 & y_3 & 1\end{vmatrix}.$$

解 现以 x,y 与 z 的关系代入上面行列式,即得以 z_1,z_2,z_3 为顶点的 $\Delta z_1z_2z_3$ 的面积为

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} \frac{1}{2}(z_1+\bar{z}_1) & \frac{1}{2\mathrm{i}}(z_1-\bar{z}_1) & 1\\ \frac{1}{2}(z_2+\bar{z}_2) & \frac{1}{2\mathrm{i}}(z_2-\bar{z}_2) & 1\\ \frac{1}{2}(z_3+\bar{z}_3) & \frac{1}{2\mathrm{i}}(z_3-\bar{z}_3) & 1\end{vmatrix}=\frac{1}{4\mathrm{i}}\begin{vmatrix} \bar{z}_1 & z_1 & 1\\ \bar{z}_2 & z_2 & 1\\ \bar{z}_3 & z_3 & 1\end{vmatrix}.$$

复数在几何问题中的应用

【例 1.32】若 z_1,z_2,z_3 为等腰直角三角形的三个顶点,其中 z_2 为直角顶点的充要条件是它们适合等式

$$z_1{}^2+2z_2{}^2+z_3{}^2=2z_2z_3+2z_1z_2.$$

证明 $\Delta z_1z_2z_3$ 为等腰直角三角形的充要条件为: