● 主　编　曹菊生　恽平南　庄桂芬

# 线性代数学习指导

苏州大学出版社
Soochow University Press

# 线性代数学习指导

曹菊生　恽平南　庄桂芬　主　编

苏州大学出版社

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数学习指导 / 曹菊生，恽平南，庄桂芬主编
.—苏州：苏州大学出版社，2015.6
ISBN 978-7-5672-1362-3

Ⅰ.①线…　Ⅱ.①曹…　②恽…　③庄…　Ⅲ.①线性代数－高等学校－教学参考资料　Ⅳ.①O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 131940 号

安徽大学图书馆
藏书
www.lib.ahu.edu.cn

**线性代数学习指导**
曹菊生　恽平南　庄桂芬　主编
责任编辑　肖　荣

苏州大学出版社出版发行
(地址：苏州市十梓街 1 号　邮编：215006)
宜兴市盛世文化印刷有限公司印装
(地址：宜兴市万石镇南漕河滨路 58 号　邮编：214217)

开本 787 mm×960 mm　1/16　印张 10.75　字数 220 千
2015 年 6 月第 1 版　2015 年 6 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-5672-1362-3　定价：20.00 元

苏州大学版图书若有印装错误，本社负责调换
苏州大学出版社营销部　电话：0512-65225020
苏州大学出版社网址　http://www.sudapress.com

# 前 言

本书是与王茂南、曹菊生等主编的《线性代数》教材相配套的辅导教材，是在编者多年来使用的线性代数习题课教程的基础上编写而成的.编写本书的目的是帮助读者正确理解和掌握一些基本概念，总结解题方法，提高分析问题、解决问题的能力，并为学生提供一份课外复习资料.本书可供本科、专科、高职、电大等设置线性代数课程专业的学生使用，同时，本书对学生考研也具有较好的参考作用.

全书共六章，每章分为“基本要求”“主要内容”“典型例题解析”“同步练习”“参考答案”五个部分.“基本要求”列出了教学所必须遵循的要求；“主要内容”详细总结了本章的主要内容、基本概念、重要公式等；“典型例题解析”精选了各类典型例题，并给出了详尽的解答，指出了解题思路和技巧，有些例题在解答后还指出了应注意的内容；“同步练习”配置了一定量的同步练习题；“参考答案”给出了同步练习的所有解答.另外，按照通常的教学安排，最后给出了六份线性代数测试卷，并提供了解答，可供学生在期末考试前复习测试之用.

本书由曹菊生、恽平南、庄桂芬主编，方正、孙曦浩、王茂南副主编，全书由曹菊生统稿、刘琪审阅.本书在编写过程中得到编者所在单位江南大学理学院的大力支持和帮助，在此表示衷心感谢.

由于编者水平所限，书中缺陷和错误在所难免，敬请读者批评指正.

编 者

2015 年 3 月

# 目　录





此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

# 第一章 行列式

## 一、基本要求

1. 了解行列式的定义,了解余子式、代数余子式的概念.
2. 掌握行列式的性质和行列式按行(列)展开的方法.
3. 会计算简单的 $n$ 阶行列式.
4. 掌握 Cramer 法则.

## 二、主要内容

### 1. 余子式、代数余子式

将 $n$ 阶行列式 $D$ 中元素 $a_{ij}$ 所在的第 $i$ 行与第 $j$ 列删去后,剩下的 $n-1$ 阶行列式称为 $a_{ij}$ 的余子式 $M_{ij}$.

$$M_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i-1,1} & \cdots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \cdots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \cdots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \cdots & a_{i+1,n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

元素 $a_{ij}$ 的代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$.

**2. $n$ 阶行列式的定义**

$$D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}$$

$$=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}.$$

**3. 行列式的性质**

$n$ 阶行列式有如下一些基本性质：

(1) 行列式与它的转置行列式相等.

(2) 互换行列式的两行(列),行列式变号.

(3) 行列式的某一行(列)中所有元素都乘以数 $k$,等于用 $k$ 乘此行列式.

(4) 行列式中若有两行(列)元素成比例,则此行列式等于零.

(5) 若行列式的某一列(行)的元素都是两数之和,如：

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i}+b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i}+b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni}+b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则 $D$ 等于两个行列式之和,即

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

(6) 把行列式的某一列(行)的各元素乘以同一个数然后加到另一列(行)对应的元素上去,行列式不变.

(7) 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}A_{ik}\ (i=1,2,\cdots,n)$$

或

$$D=\sum_{k=1}^{n}a_{kj}A_{kj}\ (j=1,2,\cdots,n).$$

(8) 行列式某一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = 0(i \neq j)$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = 0(i \neq j).$$

**4. 几个特殊行列式**

(1) 对角行列式：

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n,$$

以及

$$\begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & \lambda_2 & \\ & \iddots & & \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

(2) 上(下)三角行列式：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

(3) $$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} & 0 & \cdots & 0 \\ c_{11} & \cdots & c_{1k} & b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nk} & b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}.$$

(4) 范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j).$$

**5. Cramer 法则**

若线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}\neq 0,$$

则方程组有唯一解

$$x_1=\frac{D_1}{D},x_2=\frac{D_2}{D},\cdots,x_n=\frac{D_n}{D},$$

其中

$$D_j=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}(j=1,2,\cdots,n).$$

## 三、典型例题解析

**【例 1】** 若行列式 $D_1=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}=2$，则行列式

$$D_2=\begin{vmatrix} 3b_1 & 2a_1+b_1 & c_1 \\ 3b_2 & 2a_2+b_2 & c_2 \\ 3b_3 & 2a_3+b_3 & c_3 \end{vmatrix}=\underline{\qquad\qquad}.$$

**解**

$$D_2=\begin{vmatrix} 3b_1 & 2a_1 & c_1 \\ 3b_2 & 2a_2 & c_2 \\ 3b_3 & 2a_3 & c_3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 3b_1 & b_1 & c_1 \\ 3b_2 & b_2 & c_2 \\ 3b_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[c_2\div 2]{c_1\div 3} 6\begin{vmatrix} b_1 & a_1 & c_1 \\ b_2 & a_2 & c_2 \\ b_3 & a_3 & c_3 \end{vmatrix} + 0 \xlongequal{c_1\leftrightarrow c_2} -6\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = -12.$$

**【例 2】** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$.

**解**

$$D \xlongequal{r_1\leftrightarrow r_2} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+r_1]{\substack{r_3-r_2 \\ r_2-2r_1}} -\begin{vmatrix} 1 & 4 & -6 & 1 \\ 0 & -5 & 14 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4+3r_2]{c_2\leftrightarrow c_4} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & 14 & -5 \\ 0 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 37 & -11 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 5 & -2 \\ 37 & -11 \end{vmatrix} = -19.$$

**【例 3】** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}$.

**解**

$$D \xlongequal[r_2\leftrightarrow r_3]{r_1\leftrightarrow r_4} (-1)^2 \begin{vmatrix} a_1+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2+x & a_3 & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3+x & a_4 \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4+x \end{vmatrix}$$



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

$$\xlongequal{c_1+c_2+c_3+c_4}\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{4}a_i+x & a_2 & a_3 & a_4 \\ \sum_{i=1}^{4}a_i+x & a_2+x & a_3 & a_4 \\ \sum_{i=1}^{4}a_i+x & a_2 & a_3+x & a_4 \\ \sum_{i=1}^{4}a_i+x & a_2 & a_3 & a_4+x \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[\substack{r_2-r_1\\ r_3-r_1\\ r_4-r_1}]{c_1\div(\sum_{i=1}^{4}a_i+x)}\left(\sum_{i=1}^{4}a_i+x\right)\begin{vmatrix} 1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x \end{vmatrix}$$

$$=x^3\left(\sum_{i=1}^{4}a_i+x\right).$$

**注**　这一类行列式均有一个特点，每一行元素之和相同，解法也完全类似本例解法.

**【例 4】**　计算行列式 $D=\begin{vmatrix} a & b & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 \\ 0 & b & a & b \\ 0 & 0 & b & a \end{vmatrix}$.

**解**　按第一行展开有

$$D=a\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ b & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} b & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & b & a \end{vmatrix}$$

$$=a\left(a\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} b & b \\ 0 & a \end{vmatrix}\right)-b^2\begin{vmatrix} a & b \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$=a^4-3a^2b^2+b^4.$$

**注**　此题若先作变换 $r_2-\frac{b}{a}r_1$ 消去第 2 行第 1 列的 $b$，则必须 $a\neq 0$.

**【例 5】** 设行列式 $D=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 7 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$,求:

(1) $A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}$;(2) $M_{41}+2M_{42}+3M_{43}+4M_{44}$.

**解** (1) 把 $D$ 的第 4 行用 1,1,1,1 替换,由按行(列)展开法则得

$$A_{41}+A_{42}+A_{43}+A_{44}=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-r_3} -\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix}=8.$$

(2) 把 $D$ 的第 4 行用 $-1,2,-3,4$ 替换得

$$M_{41}+2M_{42}+3M_{43}+4M_{44}=-A_{41}+2A_{42}-3A_{43}+4A_{44}$$

$$=\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=-\begin{vmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & -3 & 4 \end{vmatrix} \xlongequal{c_1-4c_2} -\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 5 & -1 & 1 \\ 11 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 11 & 4 \end{vmatrix}=9.$$

**【例 6】** 计算行列式 $D=\begin{vmatrix} 2+x & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2+y & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2-y \end{vmatrix}$.

**解**

$$D \xlongequal[r_3-r_4]{r_1-r_2} \begin{vmatrix} x & x & 0 & 0 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 \\ 0 & 0 & y & y \\ 2 & 2 & 2 & 2-y \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-x & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2-y \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[r_4-2r_1]{r_2-2r_3} xy \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2-x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2-y \end{vmatrix} = xy \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2-x \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2-y \end{vmatrix}$$

$$= x^2 y^2.$$

**【例 7】** 设 $f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ x & a & b & c \\ x^2 & a^2 & b^2 & c^2 \\ x^3 & a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$ 且 $a,b,c$ 均不相等，求方程 $f(x)=0$ 的全部根.

**解** $f(x)$为范德蒙行列式，则

$$f(x)=(a-x)(b-x)(c-x)(b-a)(c-a)(c-b)=0.$$

又 $a,b,c$ 均不相等，故方程 $f(x)=0$ 的全部根为 $x_1=a,x_2=b,x_3=c$.

**【例 8】** 计算：$D_n=\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$，其中 $a_1a_2\cdots a_n\neq 0$.

**解** *方法* 1

$$D_n \xlongequal[\substack{\vdots \\ r_2-r_1}]{\substack{r_n-r_{n-1} \\ r_{n-1}-r_{n-2}}} \begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ -a_1 & a_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=1,2,\cdots,n)]{c_i \div a_i} a_1a_2a_3\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\frac{1}{a_1} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_{n-1}} & \frac{1}{a_n} \\ -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1+c_2+\cdots+c_n} a_1a_2\cdots a_n \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & \frac{1}{a_2} & \cdots & \frac{1}{a_n} \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

**方法 2**

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal[(i=2,3,\cdots,n+1)]{c_i-c_1} \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{c_1-\sum_{i=1}^{n}\frac{c_{i+1}}{a_i}} \begin{vmatrix} 1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i} & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n\left(1+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

**【例 9】** 证明：$D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

**证**　用数学归纳法.

因为 $D_2=\begin{vmatrix} x & -1 \\ a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}=x^2+a_1x+a_2$，所以 $n=2$ 时成立.

假设对于 $n-1$ 阶行列式成立，按第一行展开，得

$$D_n=x\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-2} & a_{n-3} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$$

$$\xlongequal{\text{由归纳假设}}x(x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\cdots+a_{n-2}x+a_{n-1})+(-1)^{n-1+1}(-1)^{n-2}a_n$$

$$=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n.$$

**注** 本题若对 $D_n$ 分别作 $c_{n-1}+xc_n, c_{n-2}+xc_{n-1}, \cdots, c_1+xc_2$ 运算后也能证明，请读者自己完成.

**【例 10】** 设 $a,b$ 不相等，证明：

$$D_n=\begin{vmatrix} a+b & ab & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & a+b & ab & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a+b & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a+b & ab \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & a+b \end{vmatrix}=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

**证** 先按第一行展开，并将(1,2)元素的余子式按第一列展开，得

$$D_n=(a+b)D_{n-1}-abD_{n-2}, \qquad ①$$

即

$$D_n-aD_{n-1}=b(D_{n-1}-aD_{n-2}),$$

则

$$\begin{aligned} D_n-aD_{n-1}&=b(D_{n-1}-aD_{n-2})=b^2(D_{n-2}-aD_{n-3}) \\ &=\cdots=b^{n-2}(D_2-aD_1) \\ &=b^n. \qquad ② \end{aligned}$$

再由①得

$$\begin{aligned} D_n-bD_{n-1}&=a(D_{n-1}-bD_{n-2})=a^2(D_{n-2}-bD_{n-3}) \\ &=\cdots=a^n. \qquad ③ \end{aligned}$$

由 $a\times③-b\times②$，得

$$D_n=\frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b}.$$

【例 11】 判断下列线性方程组是否有唯一解：

$$\begin{cases} a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n=b_1, \\ a_1^2x_1+a_2^2x_2+\cdots+a_n^2x_n=b_2, \\ \qquad\qquad\vdots \\ a_1^nx_1+a_2^nx_2+\cdots+a_n^nx_n=b_n, \end{cases}$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是两两不相同的非零常数.

**解** 考虑方程组的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \cdots & a_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^n & a_2^n & \cdots & a_n^n \end{vmatrix}=a_1a_2\cdots a_n\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=a_1a_2\cdots a_n\prod_{n\geqslant i>j\geqslant 1}(a_i-a_j)\neq 0,$$

故方程组有唯一解.

【例 12】 问 $\lambda$ 为何值时，齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+\lambda x_2+x_3=0, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ \lambda x_1+x_2+2x_3=0 \end{cases}$$

有非零解？

**解** 若方程组有非零解，则它的系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \lambda & 1 & 2 \end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda+1)=0,$$

由此得 $\lambda=1$ 或 $\lambda=2$.

## 四、同步练习

1. 填空题.

(1) 行列式 $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & -1-\lambda \end{vmatrix}=$__________.



此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com