

数学建模系列丛书

Mathematical Modeling Algorithms and Applications

数学建模 算法与应用

(第2版)

司守奎 孙兆亮 主编

◆ 本书五大特色 ◆

- ☆ 结构由浅入深，利于轻松入门!
- ☆ 内容丰富，一本在手，网尽数学建模奥秘!
- ☆ 方法详尽，讲解透彻，有助快速提高水平!
- ☆ 案例丰富，参加数学建模竞赛人员的必备参考!
- ☆ 课件内容丰富，犹如利器在手，实现DIY式学习不再是梦!



国防工业出版社

National Defense Industry Press

数学建模算法与应用

(第2版)

司守奎 孙兆亮 主编
孙玺菁 周刚 仲维杰 康淑瑰 编著

国防工业出版社

·北京·

内 容 简 介

作者根据多年数学建模竞赛辅导工作的经验编写本书,涵盖了很多同类型书籍较少涉及的新算法和热点技术,主要内容包括时间序列、支持向量机、偏最小二乘回归分析、现代优化算法、数字图像处理、综合评价与决策方法、预测方法以及数学建模经典算法等内容。全书系统全面,各章节相对独立。

本书所选案例具有代表性,注重从不同侧面反映数学思想在实际问题中的灵活应用,既注重算法原理的通俗性,也注重算法应用的实现性,克服了很多读者看懂算法却解决不了实际问题的困难。

本书所有例题均配有 Matlab 或 Lingo 源程序,程序设计简单精炼,思路清晰,注释详尽,灵活应用 Matlab 工具箱,有利于没有编程基础的读者快速入门。同时很多程序隐含了作者多年的编程经验和技巧,为有一定编程基础的读者深入学习 Matlab、Lingo 等编程软件提供了便捷之路。

本书既可以作为数学建模课程教材和辅导书,也可以作为相关科技工作者的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

数学建模算法与应用/司守奎,孙兆亮主编.—2版.
—北京:国防工业出版社,2015.4
ISBN 978-7-118-10037-2

I. ①数... II. ①司...②孙... III. ①数学模型
IV. ①0141.4

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第073993号

※

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路23号 邮政编码100048)

北京奥鑫印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 30¼ 字数 687千字

2015年4月第2版第1次印刷 印数1—4000册 定价55.00元

(本书如有印装错误,我社负责调换)

国防书店:(010)88540777

发行邮购:(010)88540776

发行传真:(010)88540755

发行业务:(010)88540717

前 言

如今,人类社会正经历由工业化社会向信息化社会过渡的变革。以数字化为特征的信息社会有两个显著特点:计算机技术迅速发展与广泛应用;数学的应用向一切领域渗透。随着计算机技术的飞速发展,科学计算的作用越来越引起人们的广泛重视,已经与科学理论和科学实验并列成为人们探索和研究自然界、人类社会的三大基本方法。为了适应这种社会的变革,培养和造就出一批又一批适应高度信息化社会具有创新能力的高素质的工程技术和管理人才,在各高校开设“数学建模”课程,培养学生的科学计算能力和创新能力,就成为这种新形势下的历史必然。

数学建模是为了特定的目的,根据特有的内在规律,对现实世界的特定对象进行必要的抽象、归纳、假设和简化,运用适当的数学工具建立一个数学结构。数学建模就是运用数学的思想方法、数学的语言去近似地刻画一个实际研究对象,构建一座沟通现实世界与数学世界的桥梁,并以计算机为工具,应用现代计算技术,达到解决各种实际问题的目的。建立一个数学模型的全过程称为数学建模。因此,“数学建模”(或数学实验)课程教学对于开发学生的创新意识,提升人的数学素养,培养学生创造性地应用数学工具解决实际问题的能力,有着独特的功能。

数学建模过程就是一个创造性的工作过程。人的创新能力首先是创造性思维和具备创新的思想方法。数学本身是一门理性思维科学,数学教学正是通过各个教学环节对学生进行严格的科学思维方法的训练,从而引发人的灵感思维,达到培养学生的创造性思维的能力。同时,数学又是一门实用科学,它能直接用于生产和实践,解决工程实际中提出的问题,推动生产力的发展和科学技术的进步。学生参加数学建模活动,首先就要了解问题的实际背景,深入到具体学科领域的前沿,这就需要学生具有能迅速查阅大量科学资料,准确获得自己所需信息的能力;同时,不但要求学生必须了解现代数学各门学科知识和各种数学方法,把所掌握的数学工具创造性地应用于具体的实际问题,构建其数学结构,还要求学生熟悉各种数学软件,熟练地把现代计算机技术应用于解决当前实际问题,最后还要具有把自己的实践过程和结果叙

述成文字的写作能力。通过数学建模全过程的各个环节,学生可以进行创造性的思维活动,模拟现代科学研究过程。通过“数学建模”课程的教学和数学建模活动,极大地开发了学生的创造性思维的能力,培养学生在面对错综复杂的实际问题时,具有敏锐的观察力和洞察力,以及丰富的想象力。因此,“数学建模”课程在培养学生的创新能力方面有着其他课程不可替代的作用。

几年的“数学建模”教学实践告诉我们,进行数学建模教学,为学生提供一本内容丰富,既理论完整又实用的“数学建模”教材,使学生少走弯路尤为重要。这也是我们编写这本教材的初衷。本书既是我们多年教学经验的总结,也是我们心血的结晶。本书的特点是尽量为学生提供常用的数学方法,并将相应的 Matlab 和 Lingo 程序提供给学生,使学生在进行书中提供的案例的学习时,在自己动手构建数学模型的同时上机进行数学实验,从而为学生提供数学建模全过程的训练,以便能够举一反三,取得事半功倍的教学效果。

全书共 16 章,第 1 章、第 3 章和第 8 章由孙玺菁修订;第 2 章由仲维杰修订;第 7 章由仲维杰编著;第 5 章和第 6 章由康淑瑰修订;第 9 章和第 13 章由周刚编著;第 14 章、第 15 章、第 16 章、附录 A 和附录 B 由孙兆亮增补和修订;其余各章由司守奎修订,全书由司守奎统稿。本书各章有一定的独立性,这样便于教师和学生按需要进行选择。

由于 Matlab 软件每年更新两个版本,该新版本教材在 Matlab 图形系统、整数规划、微分方程符号解、时间序列工具箱等方面更新内容较多。另外增加了一章数理统计模型。一本好的教材需要经过多年的教学实践,反复锤炼。由于编者的经验和时间所限,书中的错误和纰漏在所难免,敬请同行不吝指正。

最后,作者十分感谢国防工业出版社对本书出版所给予的大力支持,尤其是责任编辑丁福志的热情支持和帮助。

本书的 Matlab 程序在 Matlab2014b 下全部调试通过,如有问题的话可以加入 QQ 群 204957415,和作者进行交流。需要本书源程序电子文档的读者,可以到 <http://www.ndip.cn> 下载,也可发送电子邮件联系索取, E-mail: 896369667@qq.com, sishoukui@163.com。

编者
2015 年 2 月

目 录

第 1 章 线性规划	1	习题 4	81
1.1 线性规划问题	1	第 5 章 插值与拟合	85
1.2 投资的收益和风险	6	5.1 插值方法	85
习题 1	9	5.2 曲线拟合的线性最小 二乘法	92
第 2 章 整数规划	11	5.3 最小二乘优化	94
2.1 概论	11	5.4 曲线拟合与函数逼近	98
2.2 0-1 型整数规划	12	5.5 黄河小浪底调水调沙问题	99
2.3 蒙特卡洛法(随机取 样法)	14	习题 5	103
2.4 整数线性规划的 计算机求解	16	第 6 章 微分方程建模	105
习题 2	18	6.1 发射卫星为什么用三级 火箭	105
第 3 章 非线性规划	21	6.2 人口模型	109
3.1 非线性规划模型	21	6.3 Matlab 求微分方程的符 号解	114
3.2 无约束问题的 Matlab 解法	23	6.4 放射性废料的处理	117
3.3 约束极值问题	26	6.5 初值问题的 Matlab 数值解	119
3.4 飞行管理问题	32	6.6 边值问题的 Matlab 数值解	121
习题 3	37	习题 6	125
第 4 章 图与网络模型及方法	38	第 7 章 数理统计	127
4.1 图的基本概念与数据结构	38	7.1 参数估计和假设检验	127
4.2 最短路问题	40	7.2 Bootstrap 方法	140
4.3 最小生成树问题	47	7.3 方差分析	147
4.4 网络最大流问题	49	7.4 回归分析	150
4.5 最小费用最大流问题	52	7.5 基于灰色模型和 Bootstrap 理论的大规模定制质量控制 方法研究	158
4.6 Matlab 的图论工具箱	54	习题 7	165
4.7 旅行商(TSP)问题	58		
4.8 计划评审方法和关键路 线法	62		
4.9 钢管订购和运输	72		

第 8 章 时间序列	167	12.4 Matlab 遗传算法工具	336
8.1 确定性时间序列分析		习题 12	341
方法	167	第 13 章 数字图像处理	342
8.2 平稳时间序列模型	180	13.1 数字图像概述	342
8.3 时间序列的 Matlab 相关		13.2 亮度变换与空间滤波	345
工具箱及命令	186	13.3 频域变换	349
8.4 ARIMA 序列与季节性		13.4 数字图像的水印防伪	356
序列	192	13.5 图像的加密和隐藏	365
习题 8	198	习题 13	368
第 9 章 支持向量机	201	第 14 章 综合评价与决策方法	369
9.1 支持向量分类机的基本		14.1 理想解法	369
原理	201	14.2 模糊综合评判法	375
9.2 支持向量机的 Matlab 命令及		14.3 数据包络分析	380
应用例子	208	14.4 灰色关联分析法	384
9.3 乳腺癌的诊断	211	14.5 主成分分析法	387
习题 9	214	14.6 秩和比综合评价法	390
第 10 章 多元分析	216	14.7 案例分析	393
10.1 聚类分析	216	习题 14	396
10.2 主成分分析	231	第 15 章 预测方法	397
10.3 因子分析	240	15.1 微分方程模型	397
10.4 判别分析	259	15.2 灰色预测模型	399
10.5 典型相关分析	268	15.3 差分方程	409
10.6 对应分析	285	15.4 马尔可夫预测	412
10.7 多维标度法	300	15.5 时间序列	418
习题 10	306	15.6 插值与拟合	421
第 11 章 偏最小二乘回归分析	311	15.7 神经网络	425
11.1 偏最小二乘回归分析		习题 15	428
概述	311	第 16 章 目标规划	430
11.2 Matlab 偏最小二乘回归		16.1 目标规划的数学模型	430
命令 plsregress	314	16.2 求解目标规划的序贯	
11.3 案例分析	314	算法	432
习题 11	320	16.3 多目标规划的 Matlab	
第 12 章 现代优化算法	323	解法	436
12.1 模拟退火算法	323	16.4 目标规划模型的实例	438
12.2 遗传算法	329	习题 16	445
12.3 改进的遗传算法	333	附录 A Matlab 软件入门	447

A.1	Matlab“帮助”的使用	447	A.6	数据处理	460
A.2	数据的输入	447	附录 B Lingo 软件的使用	465	
A.3	绘图命令	449	B.1	Lingo 软件的基本语法	465
A.4	Matlab 在高等数学中的 应用	453	B.2	Lingo 函数	466
A.5	Matlab 在线性代数中的 应用	456	B.3	线性规划模型举例	471
			参考文献	475	

第1章 线性规划

1.1 线性规划问题

在人们的生产实践中,经常会遇到如何利用现有资源来安排生产,以取得最大经济效益的问题。此类问题构成了运筹学的一个重要分支——数学规划,而线性规划(Linear Programming, LP)则是数学规划的一个重要分支。自从1947年G. B. Dantzig提出求解线性规划的单纯形方法以来,线性规划在理论上趋向成熟,在实用中日益广泛与深入。特别是在计算机能处理成千上万个约束条件和决策变量的线性规划问题之后,线性规划的适用领域更为广泛了,已成为现代管理中经常采用的基本方法之一。

1.1.1 线性规划的实例与定义

例 1.1 某机床厂生产甲、乙两种机床,每台销售后的利润分别为4000元与3000元。生产甲机床需用A、B机器加工,加工时间分别为每台2h和1h;生产乙机床需用A、B、C三种机器加工,加工时间为每台各1h。若每天可用于加工的机器时数分别为A机器10h、B机器8h和C机器7h,问该厂应生产甲、乙机床各几台,才能使总利润最大?

上述问题的数学模型:设该厂生产 x_1 台甲机床和 x_2 乙机床时总利润 z 最大,则 x_1, x_2 应满足

$$\max \quad z = 4x_1 + 3x_2, \quad (1.1)$$

$$\text{s. t.} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10, \\ x_1 + x_2 \leq 8, \\ x_2 \leq 7, \\ x_1, x_2 \geq 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

式中:变量 x_1, x_2 为决策变量。

式(1.1)称为问题的目标函数,式(1.2)中的几个不等式是问题的约束条件,记为s. t. (即 subject to)。由于上面的目标函数及约束条件均为线性函数,故称为线性规划问题。

总之,线性规划问题是在一组线性约束条件的限制下,求一线性目标函数最大或最小的问题。

在解决实际问题时,把问题归结成一个线性规划数学模型是很重要的一步,往往也是很困难的一步,模型建立得是否恰当,直接影响到求解。而选择适当的决策变量,是建立有效模型的关键之一。

1.1.2 线性规划问题的解的概念

一般线性规划问题的(数学)标准型为

$$\max z = \sum_{j=1}^n c_j x_j, \quad (1.3)$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, i = 1, 2, \dots, m, \\ x_j \geq 0, j = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.4)$$

式中: $b_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, m$ 。

可行解 满足约束条件式(1.4)的解 $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$, 称为线性规划问题的可行解, 而使目标函数式(1.3)达到最大值的可行解称为最优解。

可行域 所有可行解构成的集合称为问题的可行域, 记为 R 。

1.1.3 线性规划的 Matlab 标准形式及软件求解

线性规划的目标函数可以是求最大值, 也可以是求最小值, 约束条件的不等号可以是小于等号也可以是大于等号。为了避免这种形式多样性带来的不便, Matlab 中规定线性规划的标准形式为

$$\min_x \mathbf{f}^T \mathbf{x},$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} \leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{A}_{\text{eq}} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}_{\text{eq}}, \\ \mathbf{lb} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{ub}. \end{cases}$$

式中: $\mathbf{f}, \mathbf{x}, \mathbf{b}, \mathbf{b}_{\text{eq}}, \mathbf{lb}, \mathbf{ub}$ 为列向量, 其中 \mathbf{f} 称为价值向量, \mathbf{b} 称为资源向量; $\mathbf{A}, \mathbf{A}_{\text{eq}}$ 为矩阵。

Matlab 中求解线性规划的命令为

$$[\mathbf{x}, \text{fval}] = \text{linprog}(\mathbf{f}, \mathbf{A}, \mathbf{b})$$

$$[\mathbf{x}, \text{fval}] = \text{linprog}(\mathbf{f}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{A}_{\text{eq}}, \mathbf{b}_{\text{eq}})$$

$$[\mathbf{x}, \text{fval}] = \text{linprog}(\mathbf{f}, \mathbf{A}, \mathbf{b}, \mathbf{A}_{\text{eq}}, \mathbf{b}_{\text{eq}}, \mathbf{lb}, \mathbf{ub})$$

式中: \mathbf{x} 返回决策向量的取值; fval 返回目标函数的最优值; \mathbf{f} 为价值向量; \mathbf{A} 和 \mathbf{b} 对应线性不等式约束; \mathbf{A}_{eq} 和 \mathbf{b}_{eq} 对应线性等式约束; \mathbf{lb} 和 \mathbf{ub} 分别对应决策向量的下界向量和上界向量。

例如, 线性规划

$$\max_x \mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

$$\text{s. t. } \mathbf{A} \mathbf{x} \geq \mathbf{b}.$$

的 Matlab 标准型为

$$\min_x -\mathbf{c}^T \mathbf{x},$$

$$\text{s. t. } -\mathbf{A} \mathbf{x} \leq -\mathbf{b}.$$

例 1.2 求解下列线性规划问题:

$$\max z = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3,$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 7,$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + x_3 \geq 10, \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 12, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases}$$

解(1) 化成 Matlab 标准型,即

$$\begin{aligned} \min \quad & w = -2x_1 - 3x_2 + 5x_3, \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} \begin{bmatrix} -2 & 5 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} -10 \\ 12 \end{bmatrix}, \\ [1, 1, 1] \cdot [x_1, x_2, x_3]^T = 7, [x_1, x_2, x_3]^T \geq [0, 0, 0]^T. \end{cases} \end{aligned}$$

(2) 求解的 Matlab 程序如下:

```
f = [-2; -3; 5];
a = [-2, 5, -1; 1, 3, 1]; b = [-10; 12];
aeq = [1, 1, 1];
beq = 7;
[x, y] = linprog(f, a, b, aeq, beq, zeros(3, 1));
x, y = -y
```

(3) 求解的 Lingo 程序如下:

```
model:
sets:
row / 1..2 / : b;
col / 1..3 / : c, x;
links(row, col) : a;
endsets
data:
c = 2 3 -5;
a = -2 5 -1 1 3 1;
b = -10 12;
enddata
max = @ sum(col : c * x);
@ for(row(i) : @ sum(col(j) : a(i, j) * x(j)) < b(i));
@ sum(col : x) = 7;
end
```

求得的最优解为 $x_1 = 6.4286, x_2 = 0.5714, x_3 = 0$, 对应的最优值 $z = 14.5714$ 。

例 1.3 求解下列线性规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = 2x_1 + 3x_2 + x_3, \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 8, \\ 3x_1 + 2x_2 \geq 6, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

解 编写 Matlab 程序如下:

```
c = [2; 3; 1];
a = [1, 4, 2; 3, 2, 0];
b = [8; 6];
[x, y] = linprog(c, -a, -b, [], [], zeros(3, 1)) % 这里没有等式约束, 对应的矩阵为空
```

矩阵

求得的最优解为 $x_1 = 0.8066, x_2 = 1.7900, x_3 = 0.0166$, 对应的最优值 $z = 7.0000$ 。

1.1.4 可以转化为线性规划的问题

很多看起来不是线性规划的问题,也可以通过变换转化为线性规划的问题来解决。

例 1.4 数学规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & |x_1| + |x_2| + \cdots + |x_n|, \\ \text{s. t.} \quad & \mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}. \end{aligned}$$

式中: $\mathbf{x} = [x_1, \cdots, x_n]^T$; \mathbf{A} 和 \mathbf{b} 为相应维数的矩阵和向量。

要把上面的问题变换成线性规划问题,只要注意到事实:对任意的 x_i , 存在 $u_i, v_i \geq 0$ 满足

$$x_i = u_i - v_i, |x_i| = u_i + v_i.$$

事实上,只要取 $u_i = \frac{x_i + |x_i|}{2}, v_i = \frac{|x_i| - x_i}{2}$ 就可以满足上面的条件。

这样,记 $\mathbf{u} = [u_1, \cdots, u_n]^T, \mathbf{v} = [v_1, \cdots, v_n]^T$, 从而可以把上面的问题变成

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n (u_i + v_i), \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{u} - \mathbf{v}) \leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

式中: $\mathbf{u} \geq 0$ 为向量 \mathbf{u} 的每个分量大于等于 0。

进一步把模型改写成

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{i=1}^n (u_i + v_i), \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} [\mathbf{A}, -\mathbf{A}] \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{u}, \mathbf{v} \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

例 1.5 (续例 1.4 类型的实例) 求解下列数学规划问题:

$$\begin{aligned} \min \quad & z = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3| + 4|x_4|, \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \leq -2, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 3x_4 \leq -1, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \leq -\frac{1}{2}. \end{cases} \end{aligned}$$

解 做变量变换 $u_i = \frac{x_i + |x_i|}{2}, v_i = \frac{|x_i| - x_i}{2}, i = 1, 2, 3, 4$, 并把新变量重新排序成一维

向量 $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = [u_1, \cdots, u_4, v_1, \cdots, v_4]^T$, 则可把模型变换为线性规划模型

$$\begin{aligned} \min \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{y}, \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} [\mathbf{A}, -\mathbf{A}] \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \leq \mathbf{b}, \\ \mathbf{y} \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

式中

$$\begin{aligned} \mathbf{c} &= [1, 2, 3, 4, 1, 2, 3, 4]^T, \\ \mathbf{b} &= [-2, -1, -\frac{1}{2}]^T, \\ \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 & 3 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

计算的 Matlab 程序如下:

```
clc, clear
c=1:4; c=[c,c]'; % 构造价值列向量
a=[1 -1 -1 1; 1 -1 1 -3; 1 -1 -2 3];
a=[a, -a]; % 构造变换后新的系数矩阵
b=[-2 -1 -1/2]';
[y,z]=linprog(c,a,b,[],[],zeros(8,1)) % 这里没有等式约束,对应的矩阵为空矩阵
x=y(1:4) - y(5:end) % 变换到原问题的解, x=u-v
求得最优解  $x_1 = -2, x_2 = x_3 = x_4 = 0$ , 最优值  $z = 2$ 。
```

该题也可以直接使用 Lingo 软件求解, Lingo 程序如下:

```
model:
sets:
col/1..4/:c,x;
row/1..3/:b;
links(row,col):a;
endsets
data:
c=1 2 3 4;
b=-2 -1 -0.5;
a=1 -1 -1 1 1 -1 1 -3 1 -1 -2 3;
enddata
min=@ sum(col:c * @ abs(x));
@ for(row(i):@ sum(col(j):a(i,j) * x(j)) < b(i));
@ for(col:@ free(x)); ! x 的分量可正可负;
end
```

注:(1) Lingo 软件可以自动对带有绝对值的数学规划问题进行线性化。

(2) Lingo 线性化时,变量的个数至少扩大为原来的 4 倍,约束条件也增加很多;问题规模大时,Lingo 软件可能就无法求解了;如果能手工进行线性化,则应尽量手工线性化。

例 1.6 $\min \{ \max_{x_i} | \varepsilon_i | \}$, 其中 $\varepsilon_i = x_i - y_i$ 。

对于这个问题,如果取 $v = \max_{y_i} | \varepsilon_i |$, 上面的问题就变换成

$$\begin{aligned} \min \quad & v, \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} x_1 - y_1 \leq v, \dots, x_n - y_n \leq v, \\ y_1 - x_1 \leq v, \dots, y_n - x_n \leq v. \end{cases} \end{aligned}$$

此即通常的线性规划问题。

1.2 投资的收益和风险

1.2.1 问题提出

市场上有 n 种资产 $s_i (i=1, 2, \dots, n)$ 可以选择, 现用数额为 M 的相当大的资金作一个时期的投资。这 n 种资产在这一时期内购买 s_i 的平均收益率为 r_i , 风险损失率为 q_i , 投资越分散, 总的风险越少, 总体风险可用投资的 s_i 中最大的一个风险来度量。

购买 s_i 时要付交易费, 费率为 p_i , 当购买额不超过给定值 u_i 时, 交易费按购买 u_i 计算。另外, 假定同期银行存款利率是 r_0 , 既无交易费又无风险 ($r_0 = 5\%$)。

已知 $n=4$ 时相关数据如表 1.1 所列。

表 1.1 投资的相关数据

s_i	$r_i/\%$	$q_i/\%$	$p_i/\%$	$u_i/\text{元}$
s_1	28	2.5	1	103
s_2	21	1.5	2	198
s_3	23	5.5	4.5	52
s_4	25	2.6	6.5	40

试给该公司设计一种投资组合方案, 即用给定资金 M , 有选择地购买若干种资产或存银行生息, 使净收益尽可能大, 总体风险尽可能小。

1.2.2 符号规定和基本假设

1. 符号规定

(1) s_i 表示第 i 种投资项目, 如股票、债券等, $i=0, 1, \dots, n$, 其中 s_0 指存入银行。

(2) r_i, p_i, q_i 分别表示 s_i 的平均收益率、交易费率、风险损失率, $i=0, 1, \dots, n$, 其中 $p_0=0, q_0=0$ 。

(3) u_i 表示 s_i 的交易定额, $i=1, 2, \dots, n$ 。

(4) x_i 表示投资项目 s_i 的资金, $i=0, 1, \dots, n$ 。

(5) a 表示投资风险度。

(6) Q 表示总体收益。

2. 基本假设

(1) 投资数额 M 相当大, 为了便于计算, 假设 $M=1$ 。

(2) 投资越分散, 总的风险越小。

(3) 总体风险用投资项目 s_i 中最大的一个风险来度量。

(4) $n+1$ 种资产 s_i 之间是相互独立的。

(5) 在投资的这一时期内, r_i, p_i, q_i 为定值, 不受意外因素影响。

(6) 净收益和总体风险只受 r_i, p_i, q_i 影响, 不受其他因素干扰。

1.2.3 模型的分析与建立

(1) 总体风险用所投资的 s_i 中最大的一个风险来衡量,即

$$\max \{q_i x_i \mid i = 1, 2, \dots, n\}。$$

(2) 购买 $s_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 所付交易费是一个分段函数,即

$$\text{交易费} = \begin{cases} p_i x_i, & x_i > u_i, \\ p_i u_i, & x_i \leq u_i。 \end{cases}$$

而题目所给的定值 u_i (单位:元) 相对总投资 M 很少, $p_i u_i$ 更小, 这样购买 s_i 的净收益可以简化为 $(r_i - p_i)x_i$ 。

(3) 要使净收益尽可能大, 总体风险尽可能小, 这是一个多目标规划模型。

目标函数为

$$\begin{cases} \max \sum_{i=0}^n (r_i - p_i)x_i, \\ \min \{ \max_{1 \leq i \leq n} \{q_i x_i\} \}。 \end{cases}$$

约束条件为

$$\begin{cases} \sum_{i=0}^n (1 + p_i)x_i = M, \\ x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n。 \end{cases}$$

(4) 模型简化。

① 在实际投资中, 投资者承受风险的程度不一样, 若给定风险一个界限 a , 使最大的一个风险率为 a , 即 $\frac{q_i x_i}{M} \leq a (i = 1, 2, \dots, n)$, 可找到相应的投资方案。这样把多目标规划变成一个目标的线性规划。

模型一 固定风险水平, 优化收益

$$\begin{aligned} & \max \sum_{i=0}^n (r_i - p_i)x_i, \\ \text{s. t. } & \begin{cases} \frac{q_i x_i}{M} \leq a, i = 1, 2, \dots, n, \\ \sum_{i=0}^n (1 + p_i)x_i = M, x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n。 \end{cases} \end{aligned}$$

② 若投资者希望总盈利至少达到水平 k 以上, 在风险最小的情况下寻求相应的投资组合。

模型二 固定盈利水平, 极小化风险

$$\min \{ \max_{1 \leq i \leq n} \{q_i x_i\} \},$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{i=0}^n (r_i - p_i)x_i \geq k, \\ \sum_{i=0}^n (1 + p_i)x_i = M, \\ x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, n. \end{cases}$$

③ 投资者在权衡资产风险和预期收益两方面时,希望选择一个令自己满意的投资组合。因此对风险、收益分别赋予权重 $s(0 < s \leq 1)$ 和 $1 - s$, s 称为投资偏好系数。

模型三

$$\min s \{ \max_{1 \leq i \leq n} \{ q_i x_i \} \} - (1 - s) \sum_{i=0}^n (r_i - p_i)x_i,$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} \sum_{i=0}^n (1 + p_i)x_i = M, \\ x_i \geq 0, i = 0, 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

1.2.4 模型一的求解

模型一为

$$\min f = [-0.05, -0.27, -0.19, -0.185, -0.185] \cdot [x_0, x_1, x_2, x_3, x_4]^T,$$

$$\text{s. t. } \begin{cases} x_0 + 1.01x_1 + 1.02x_2 + 1.045x_3 + 1.065x_4 = 1, \\ 0.025x_1 \leq a, \\ 0.015x_2 \leq a, \\ 0.055x_3 \leq a, \\ 0.026x_4 \leq a, \\ x_i \geq 0, i = 0, 1, \dots, 4. \end{cases}$$

由于 a 是任意给定的风险度,不同的投资者有不同的风险度。下面从 $a = 0$ 开始,以步长 $\Delta a = 0.001$ 进行循环搜索,编制程序如下:

```
clc,clear
a=0;
hold on
while a<0.05
    c=[-0.05,-0.27,-0.19,-0.185,-0.185];
    A=[zeros(4,1),diag([0.025,0.015,0.055,0.026])];
    b=a*ones(4,1);
    Aeq=[1,1.01,1.02,1.045,1.065];
    beq=1;
    LB=zeros(5,1);
    [x,Q]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,LB);
    Q=-Q;
    plot(a,Q,'*k');
    a=a+0.001;
end
xlabel('a'),ylabel('Q')
```


1.2.5 结果分析

风险 a 与收益 Q 之间的关系如图 1.1 所示。从图 1.1 可以看出：

(1) 风险大,收益也大。

(2) 当投资越分散时,投资者承担的风险越小,这与题意一致。冒险的投资者会出现集中投资的情况,保守的投资者则尽量分散投资。

(3) 在 $a=0.006$ 附近有一个转折点,在这一点左边,风险增加很少时,利润增长很快;在这一点右边,风险增加很大时,利润增长很缓慢。所以对于风险和收益没有特殊偏好的投资者来说,应该选择曲线的转折点作为最优投资组合,大约是 $a=0.6\%$, $Q=20\%$, 所对应的投资方案为

风险度 $a=0.006$, 收益 $Q=0.2019$, $x_0=0$, $x_1=0.24$, $x_2=0.4$, $x_3=0.1091$, $x_4=0.2212$ 。

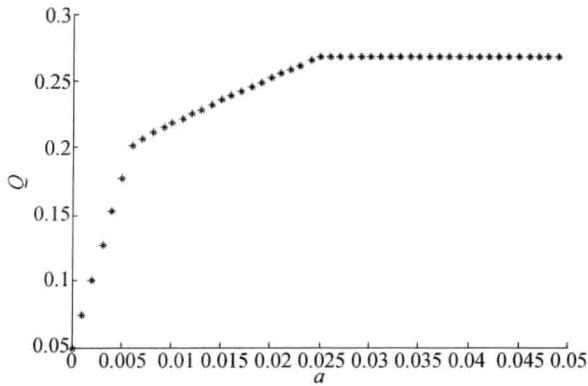


图 1.1 风险与收益的关系图

拓展阅读材料

[1] Frederick S. Hillier, Gerald J. Lieberman. Introduction to Operations Research (Nineth Edition). New York: McGraw-Hill Companies, Inc., 2010.

习 题 1

1.1 分别用 Matlab 和 Lingo 求解下列线性规划问题：

$$\begin{aligned} \max \quad & z = 3x_1 - x_2 - x_3, \\ \text{s. t.} \quad & \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \leq 11, \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 3, \\ -2x_1 + x_3 = 1, \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

1.2 分别用 Matlab 和 Lingo 求解下列规划问题：

$$\min \quad z = |x_1| + 2|x_2| + 3|x_3| + 4|x_4|,$$