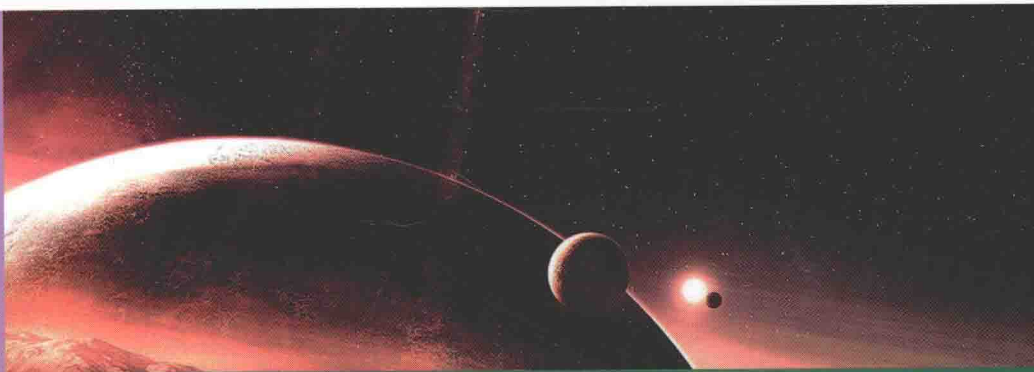
应用型本科数学基础课程教材

高等数学

（上册）

Advanced Mathematics



主　编　翁连贵　孙福树

高等教育出版社

应用型本科数学基础课程教材

高等数学

（上册）

GAODENG SHUXUE

主　编　翁连贵　孙福树
副主编　吴钦宽　高安力
　　　　吴　莉　尤兴华

高等教育出版社·北京

内容简介

本书参照教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”及“经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求”编写而成。全书分上、下两册出版。上册包括函数与极限、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、无穷级数等内容，书末还附有部分习题答案与提示、基本初等函数简介、极坐标简介、几种常见的曲线、积分表、参考文献。本书配有适当习题，每章总习题分为 A、B 两组。A 组题以基本概念与基本方法为主，是学生必须掌握的；B 组题有一定难度，具有综合性、论证性强等特点，以适应日益增多的考研学生的需求，也便于教师使用。

本书主要针对应用型本科学生而编写，注意强化基本概念、基本理论、基本计算，注重应用数学知识解决实际问题的能力的培养，注重数学思想方法的培养和数学思维的培训，注重自学能力的培养和提高。

本书可供普通高等学校非数学类专业学生使用，也可供自学者及有关教师参考。

图书在版编目（CIP）数据

高等数学．上册／翁连贵，孙福树主编．-- 北京：高等教育出版社，2015．8

ISBN 978-7-04-043436-1

Ⅰ．①高… Ⅱ．①翁… ②孙… Ⅲ．①高等数学－高等学校－教材 Ⅳ．① O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 169356 号

策划编辑 李　蕊　　责任编辑 田　玲　　封面设计 李小璐　　版式设计 马敬茹
插图绘制 邓　超　　责任校对 胡美萍　　责任印制 尤　静

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	大厂益利印刷有限公司	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	787 mm× 960 mm　1/16		http://www.landraco.com.cn
印　　张	25.25	版　　次	2015年8月第1版
字　　数	460 千字	印　　次	2015年8月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	39.20 元

物 料 号　43436-00

前　言

高等数学是一门基础数学课程，它的基本概念、基本理论和解决问题的思想和方法在工程技术和经济管理中已得到广泛应用。

本书是编者们根据教育部高等学校大学数学课程教学指导委员会制定的“工科类本科数学基础课程教学基本要求”及“经济和管理类本科数学基础课程教学基本要求”，在多年从事应用型本科工科类和经济管理类专业高等数学教学基础上编写而成的。

本书从应用型本科学生的实际出发，试图在保证理论高度不降低的情况下，适当运用实例和图形，使教学难度降低。以实例引入概念，讲解理论，用理论知识解决实际问题，尽可能再现知识的归纳过程。注意讲清用数学知识解决实际问题的基本思想和方法，着重培养学生的逻辑能力、应用能力和创新思维能力。每节前有导读，每章后有小结。我们适时介绍有关数学家史料，以体现人文精神。总之，编者们将长期的教学实践体会融入到教材中，以达到便于施教授课，并尽量展现高等数学之应用魅力的目的。

本书分上、下两册，上册由翁连贵、孙福树担任主编，吴钦宽、高安力、吴莉、尤兴华担任副主编；下册由翁连贵、吴钦宽担任主编，孙福树、高安力、吴莉、尤兴华担任副主编。全书分为十二章，第 1 章、第 2 章由吴钦宽编写；第 3 章、第 4 章由孙福树编写；第 5 章、第 6 章由翁连贵编写；第 7 章、第 9 章由高安力编写；第 8 章、第 12 章由吴莉编写；第 10 章、第 11 章由尤兴华编写。

书中打“*”号的部分可视学生能力及专业要求由教师决定是否讲授。每章总习题分为 A、B 两组，A 组题以基本概念与基本方法为主，是学生必须掌握的；B 组题则有一定难度和综合性，希望能较好地适应日益增多的考研学生的需求。

由于编者水平有限，书中错误疏漏之处在所难免，希望得到广大专家、同行和读者的批评指正。

编者

2014 年 12 月

目　　录

第 1 章　函数与极限

函数是客观世界中变量之间最基本的一种相互依存关系,它是高等数学(微积分)研究的主要对象. 极限反映变量的特定变化趋势,极限概念是微积分的理论基础,极限方法是微积分的基本分析方法. 本章将介绍映射、函数、极限和函数的连续性等基本概念以及它们的一些性质.

1.1　函　　数

通过本节的学习,应该理解函数的概念,掌握函数的几种特性,会求函数的定义域和函数值.

1.1.1　集合

1. 集合的概念

集合是一个不可以精确定义的数学基本概念,所以我们只给予一种描述. 把具有某种特定性质的对象的全体称为**集合**或简称为**集**,其中每个对象称为该集合的**元素**或**元**. 例如,某院校一年级的学生、某商店的货物、全部实数等,都各自构成一个集合.

一般地说,用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 来表示集合,用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 来表示集合的元素. 若事物 a 是集合 A 的一个元素,就记成 $a\in A$(读作 a 属于 A);若事物 a 不是集合 A 的一个元素,就记成 $a\notin A$ 或 $a\,\overline{\in}\,A$(读作 a 不属于 A). 若一集合只有有限个元素,就称为**有限集**;不是有限集的集合称为**无限集**.

表示集合的方法通常有以下两种:

(1) **列举法**:把集合的全体元素一一列举出来.

例如

$$A=\{a,b,c,d,e,f,g\},\quad B=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}.$$

(2) **描述法**:若集合 M 是由具有某种性质 P 的元素 x 的全体所组成,则 M 可表示为

$$M=\{x\mid x\text{ 具有性质 }P\}.$$

例如

$$M=\{(x,y)\mid x,y\text{ 为实数},x^2+y^2=1\}.$$

下面列举几个数集：

N 表示所有自然数构成的集合，称为**自然数集**.

$$\mathbf{N}=\{0,1,2,\cdots,n,\cdots\},\quad \mathbf{N}_+=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

R 表示所有实数构成的集合，称为**实数集**.

Z 表示所有整数构成的集合，称为**整数集**.

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}.$$

Q 表示所有有理数构成的集合，称为**有理数集**.

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q}\,\middle|\,p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N}_+,\text{且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}.$$

设 A,B 是两个集合，若 $x\in A$，则必有 $x\in B$，则称 A 是 B 的**子集**，记为 $A\subset B$（读作 A 包含于 B），或 $B\supset A$（读作 B 包含 A）.

如果集合 A 与集合 B 互为子集，即 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称集合 A 与集合 B **相等**，记作 $A=B$.

若 $A\subset B$ 且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的**真子集**，记作 $A\subsetneqq B$. 例如，$\mathbf{N}\subsetneqq\mathbf{Z}\subsetneqq\mathbf{Q}\subsetneqq\mathbf{R}$.

不含任何元素的集称为**空集**，记为 $\varnothing$. 例如 $\{x\mid x^2+1=0,x\in\mathbf{R}\}=\varnothing$. 规定空集是任何集合的子集，即 $\varnothing\subset A$.

2. 集合的运算

集合的基本运算有并、交、差、余四种.

设 A,B 是两个集合，由所有属于 A 或者属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**并集**（简称**并**），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{ 或 }x\in B\}.$$

由所有既属于 A 又属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**交集**（简称**交**），记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\in B\}.$$

由所有属于 A 而不属于 B 的元素组成的集合称为 A 与 B 的**差集**（简称**差**），记作 $A-B$，即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 且 }x\notin B\}.$$

如果我们将研究某个问题限定在一个大的集合 I 中进行，所研究的其他集合 A 都是 I 的子集，此时，我们称集合 I 为**全集**或**基本集**，称 $I-A$ 为 A 的**余集**或**补集**，记作 A^C. 例如，在实数集 **R** 中，集合 $A=\{x\mid 0<x\leqslant 1\}$ 的余集就是

$$A^C=\{x\mid x\leqslant 0\text{ 或 }x>1\}.$$

集合运算的法则如下：设 A,B,C 为任意三个集合，则

（1）交换律　$A\cup B=B\cup A,A\cap B=B\cap A$;

(2) 结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$,$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

(3) 分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$,$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

(4) 对偶律 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$,$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

以上这些法则都可根据集合相等的定义验证. 现就对偶律的第一个等式 $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$ 证明如下:

$$x\in(A\cup B)^C\Leftrightarrow x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\notin A \text{ 且 } x\notin B$$
$$\Leftrightarrow x\in A^C \text{ 且 } x\in B^C\Leftrightarrow x\in A^C\cap B^C,$$

所以

$$(A\cup B)^C=A^C\cap B^C.$$

注 以上证明中,符号"$\Leftrightarrow$"表示"等价".

直积(笛卡儿乘积) 设 A,B 是任意两个集合,在集合 A 中任意取一个元素 x,在集合 B 中任意取一个元素 y,组成一个有序对 (x,y),把这样的有序对作为新元素,它们全体组成的集合称为集合 A 与集合 B 的**直积**(或**笛卡儿(Descartes)乘积**),记为 $A\times B$,即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}.$$

例如,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } y\in\mathbf{R}\}$ 即为 xOy 面上全体点的集合,$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

3. 区间和邻域

区间是高等数学中常用的实数集,包括四种有限区间和五种无限区间.

(1) 有限区间

设 a,b 为两个实数,且 $a<b$,称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为**开区间**,记为 (a,b),即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}.$$

类似地有

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

称为**闭区间**(见图 1.1),

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\},(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

称为**半开区间**(见图 1.2). 其中 a 和 b 称为区间 (a,b),$[a,b]$,$[a,b)$,$(a,b]$ 的**端点**,$b-a$ 称为区间的**长度**.

(2) 无限区间

引入记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大),

$$[a,+\infty)=\{x\mid a\leqslant x\}\text{(见图 1.3)},$$
$$(-\infty,b)=\{x\mid x<b\}\text{(见图 1.4)},$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x \mid |x|<+\infty\}.$$

区间在数轴上的表示如下图：

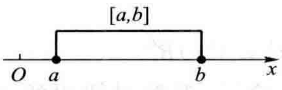


图 1.1

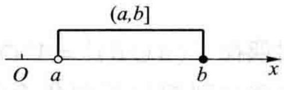


图 1.2

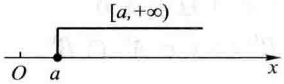


图 1.3

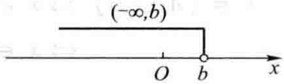


图 1.4

邻域　以点 a 为中心的任何开区间称为点 a 的**邻域**，记作 $U(a)$.

设 δ 是一正数，则称开区间 $(a-\delta,a+\delta)$ 为点 a 的 δ **邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\}=\{x \mid |x-a|<\delta\},$$

其中点 a 称为邻域的**中心**，δ 称为邻域的**半径**.

去心邻域　满足 $0<|x-a|<\delta$ 的 x 的集合称作以 a 为中心，以 δ 为半径的**去心邻域**，记作 $\mathring{U}(a,\delta)$，即

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\}\text{（见图 1.5）}.$$

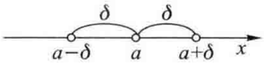


图 1.5

1.1.2　映射

1. 映射的概念

定义 1.1.1　设 X,Y 是两个非空集合，如果存在一个法则 f，使得对 X 中每个元素 x，按法则 f，在 Y 中有唯一确定的元素 y 与之对应，则称 f 为从 X 到 Y 的**映射**，记作

$$f:X\rightarrow Y,$$

其中 y 称为元素 x（在映射 f 下）的**像**，并记作 $f(x)$，即

$$y=f(x),$$

而元素 x 称为元素 y（在映射 f 下）的一个**原像**；集合 X 称为映射 f 的**定义域**，记作 D_f，即

$$D_f=X;$$

X 中所有元素的像所组成的集合称为映射 f 的**值域**，记为 R_f 或 $f(X)$，即

$$R_f = f(X) = \{f(x) \mid x \in X\}.$$

从上述映射的定义中,需要注意以下问题:

(1) 构成一个映射必须具备以下三个要素:集合 X,即定义域 $D_f = X$;集合 Y,即值域的范围:$R_f \subset Y$;对应法则 f,使对每个 $x \in X$,有唯一确定的 $y = f(x)$ 与之对应.

(2) 对每个 $x \in X$,元素 x 的像 y 是唯一的;而对每个 $y \in R_f$,元素 y 的原像不一定是唯一的;映射 f 的值域 R_f 是 Y 的一个子集,即 $R_f \subset Y$,不一定 $R_f = Y$.

例 1.1.1 设 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,对每个 $x \in \mathbf{R}$, $f(x) = x^2 + 1$.

显然,f 是一个映射,f 的定义域 $D_f = \mathbf{R}$,值域 $R_f = \{y \mid y \geqslant 1\}$,它是 $\mathbf{R}$ 的一个真子集. 对于 R_f 中的元素 y,除 $y = 1$ 外,它的原像不是唯一的. 如 $y = 5$ 的原像就有 $x = 2$ 和 $x = -2$ 两个.

例 1.1.2 设 $X = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 4\}$,$Y = \{(x,0) \mid |x| \leqslant 2\}$, $f: X \to Y$,对每个 $(x,y) \in X$,有唯一确定的 $(x,0) \in Y$ 与之对应.

显然 f 是一个映射,f 的定义域 $D_f = X$,值域 $R_f = Y$. 在几何上,这个映射表示将平面上一个圆心在原点,半径为 2 的圆周上的点投影到 x 轴的区间 $[-2,2]$ 上.

例 1.1.3 设 $f: [0,\pi] \to [-1,1]$,对每个 $x \in [0,\pi]$, $f(x) = \cos x$. f 是一个映射,定义域 $D_f = [0,\pi]$,值域 $R_f = [-1,1]$.

满射、单射和双射 设 f 是从集合 X 到集合 Y 的映射,若 $R_f = Y$,即 Y 中任一元素 y 都是 X 中某元素的像,则称 f 为 X **到** Y **上的映射**或**满射**;若对 X 中任意两个不同元素 $x_1 \neq x_2$,它们的像 $f(x_1) \neq f(x_2)$,则称 f 为 X 到 Y 的**单射**;若映射 f 既是单射,又是满射,则称 f 为**一一映射**(或**双射**).

上述三例各是什么映射?

例 1.1.1 中的映射既非单射,又非满射;例 1.1.2 中的映射不是单射,而是满射;例 1.1.3 中的映射既是单射,又是满射,因此是一一映射.

映射又称为算子,根据集合 X,Y 的不同情形,在不同的数学分支中,映射又有不同的惯用名称. 例如,从非空集 X 到数集 Y 的映射又称为 X 上的泛函,从非空集 X 到它自身的映射又称为 X 上的变换,从实数集(或其子集)X 到实数集 Y 的映射通常称为定义在 X 上的函数.

2. 逆映射与复合映射

设 f 是 X 到 Y 的单射,则由定义,对每个 $y \in R_f$,有唯一的 $x \in X$,使得 $f(x) = y$. 于是,我们可定义一个从 R_f 到 X 的新映射 g,即

$$g: R_f \to X,$$

对每个 $y \in R_f$，规定 $g(y)=x$，其中 x 满足 $f(x)=y$. 这个映射 g 称为 f 的**逆映射**，记作 f^{-1}，其定义域 $D_{f^{-1}}=R_f$，值域 $R_{f^{-1}}=X$.

按上述定义，只有单射才存在逆映射. 所以，在例 1.1.1 ~ 例 1.1.3 中，只有例 1.1.3 中的映射 f 才存在逆映射 f^{-1}，这个 f^{-1} 就是反余弦函数的主值

$$f^{-1}(x)=\arccos x, \quad x \in [-1,1],$$

其定义域 $D_{f^{-1}}=[-1,1]$，值域 $R_{f^{-1}}=[0,\pi]$.

设有两个映射

$$g: X \to Y_1, \quad f: Y_2 \to Z,$$

其中 $Y_1 \subset Y_2$. 则由映射 g 和 f 可以定出一个从 X 到 Z 的对应法则，它将每个 $x \in X$ 映射成 $f[g(x)] \in Z$. 显然，这个对应法则确定了一个从 X 到 Z 的映射，这个映射称为映射 g 和 f 构成的**复合映射**，记作 $f \circ g$，即

$$f \circ g: X \to Z, \quad (f \circ g)(x)=f[g(x)], \quad x \in X.$$

映射 g 和 f 构成复合映射的条件是：g 的值域 R_g 必须包含在 f 的定义域内，即 $R_g \subset D_f$；否则，不能构成复合映射. 由此可以知道，映射 g 和 f 的复合是有顺序的，$f \circ g$ 有意义并不表示 $g \circ f$ 也有意义. 即使 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 都有意义，复合映射 $f \circ g$ 与 $g \circ f$ 也未必相同.

例 1.1.4　设有映射 $g: \mathbf{R} \to [-1,1]$，对每个 $x \in \mathbf{R}$，$g(x)=\cos x$；映射 $f: [-1,1] \to [0,1]$，对每个 $u \in [-1,1]$，$f(u)=\sqrt{1-u^2}$，则映射 g 和 f 构成复合映射 $f \circ g: \mathbf{R} \to [0,1]$，对每个 $x \in \mathbf{R}$，有

$$(f \circ g)(x)=f[g(x)]=f(\cos x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=|\sin x|.$$

1.1.3　函数

1. 函数概念

定义 1.1.2　设数集 $D \subset \mathbf{R}$，则称映射 $f: D \to \mathbf{R}$ 为定义在 D 上的**函数**，通常简记为

$$y=f(x), \quad x \in D,$$

其中 x 称为**自变量**，y 称为**因变量**，D 称为**定义域**，记作 D_f，即 $D_f=D$.

上述定义中，因变量 y 与自变量 x 之间的这种依赖关系，通常称为**函数关系**. 函数值 $f(x)$ 的全体所组成的集合称为函数 f 的**值域**，记作 R_f 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y \mid y=f(x), x \in D\}.$$

记号 f 和 $f(x)$ 的含义是有区别的，前者表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，而后者表示与自变量 x 对应的函数值. 但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x), x \in D$”或“$y=f(x), x \in D$”来表示定义在 D 上的函数，这时应理解为由

它所确定的函数 f.

函数符号 函数 $y=f(x)$ 中表示对应关系的记号 f 也可改用其他字母，例如"F""φ"等. 此时函数就记作 $y=F(x)$，$y=\varphi(x)$.

函数是从实数集到实数集的映射，其值域总在 $\mathbf{R}$ 内，因此构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的.

函数的定义域通常按以下两种情形来确定：一种是对有实际背景的函数，根据实际背景中变量的实际意义确定；另一种是对抽象的用算式表达的函数，它的定义域是指使函数有意义的实数的全体，这样的定义域称为**自然定义域**，一般所说的定义域大多指自然定义域.

例 1.1.5 求函数 $y=\dfrac{\sqrt{1+\ln x}}{1-x}$ 的定义域.

解 由于零和负数没有对数，负数的平方根在实数范围内没有意义，且分式的分母不能为零，所以函数的定义域是下面不等式组的解：

$$\begin{cases} x>0, \\ 1+\ln x \geqslant 0, \\ 1-x \neq 0, \end{cases}$$

因此，函数定义域 $D=\left\{x \,\middle|\, x \geqslant \dfrac{1}{\mathrm{e}} \text{且 } x \neq 1\right\}$，即 $\left[\dfrac{1}{\mathrm{e}},1\right) \cup (1,+\infty)$.

单值函数与多值函数 在函数的定义中，对每个 $x \in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为**单值函数**. 如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x \in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个 y 不总是唯一的，我们称这种法则确定了一个**多值函数**. 例如，设变量 x 和 y 之间的对应法则由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出. 显然，对每个 $x \in [-r,r]$，由方程 $x^2+y^2=r^2$，可确定出对应的 y 值，当 $x=r$ 或 $x=-r$ 时，对应 $y=0$ 一个值；当 x 取 $(-r,r)$ 内任一个值时，对应的 y 有两个值. 所以这方程确定了一个多值函数.

对于多值函数，往往只要附加一些条件，就可以将它化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的**单值分支**. 例如，在由方程 $x^2+y^2=r^2$ 给出的对应法则中，附加"$y \geqslant 0$"的条件，即以"$x^2+y^2=r^2$ 且 $y \geqslant 0$"作为对应法则，就可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{r^2-x^2}$；附加"$y \leqslant 0$"的条件，即以"$x^2+y^2=r^2$ 且 $y \leqslant 0$"作为对应法则，就可得到另一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{r^2-x^2}$.

表示函数的主要方法有三种：表格法、图形法、解析法（公式法），这在中学里大家已经熟悉. 其中，用图形法表示函数是基于函数图形的概念，即坐标平面

上的点集

$$\{P(x,y) \mid y = f(x), x \in D\}$$

称为函数 $y=f(x), x \in D$ 的图形. 图 1.6 中的 R_f 表示函数 $y=f(x)$ 的值域.

例 1.1.6　函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

称为绝对值函数(见图1.7). 其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f=[0, +\infty)$.

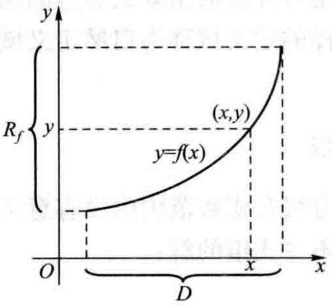


图1.6

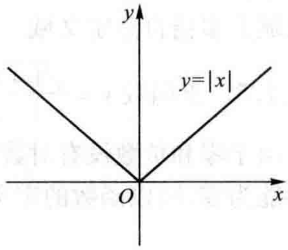


图1.7

例 1.1.7　函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

称为符号函数(见图1.8). 其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f=\{-1,0,1\}$.

例 1.1.8　设 x 为任一实数. 不超过 x 的最大整数称为 x 的整数部分, 记作 $[x]$. 函数

$$y = [x]$$

称为取整函数(见图1.9). 其定义域为 $D=(-\infty, +\infty)$, 值域为 $R_f=\mathbf{Z}$.

例如 $\left[\frac{1}{2}\right]=0, [\sqrt{3}]=1, [\pi]=3, [-1]=-1, [-5.5]=-6$.

分段函数　在自变量的不同变化范围中, 对应法则用不同式子来表示的函数称为**分段函数**.

例 1.1.9　函数

$$y = \begin{cases} 2\sqrt{x}, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1+x, & x > 1 \end{cases}$$

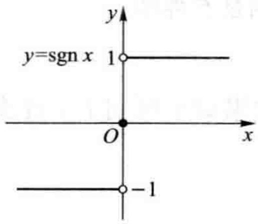


图 1.8

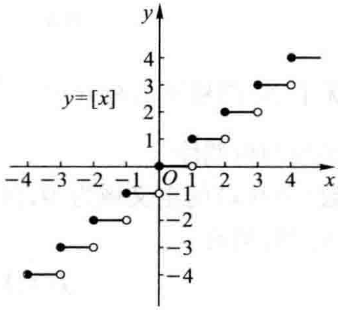


图 1.9

是一个分段函数(见图 1.10),其定义域为 $D=[0,1]\cup(1,+\infty)=[0,+\infty)$. 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时,$y=2\sqrt{x}$;当 $x>1$ 时,$y=1+x$. 例如 $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$, $f(1)=2\sqrt{1}=2$, $f(3)=1+3=4$.

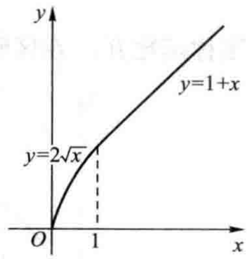


图 1.10

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1,使对任一 $x\in X$,有 $f(x)\leqslant K_1$,则称**函数 $f(x)$ 在 X 上有上界**,而称 K_1 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**上界**. 图形特点:函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_1$ 的下方.

如果存在数 K_2,使对任一 $x\in X$,有 $f(x)\geqslant K_2$,则称**函数 $f(x)$ 在 X 上有下界**,而称 K_2 为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个**下界**. 图形特点:函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=K_2$ 的上方.

如果存在正数 M,使对任一 $x\in X$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称**函数 $f(x)$ 在 X 上有界**. 图形特点:函数 $y=f(x)$ 的图形在直线 $y=-M$ 和 $y=M$ 之间. 如果这样的 M 不存在,则称**函数 $f(x)$ 在 X 上无界**.

函数 $f(x)$ 无界,就是说对任何 M,总存在 $x_1\in X$,使得 $|f(x_1)|>M$.

例 1.1.10 $f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上是有界的且 $|\sin x|\leqslant 1$.

例 1.1.11 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 在开区间 $(0,1)$ 内是无上界的. 或者说它在 $(0,1)$ 内有下界(数 1 就是它的一个下界),无上界.

这是因为对于任一 $M>1$,总有 x_1:$0<x_1<\frac{1}{M}<1$,使得

$$f(x_1) = \frac{1}{x_1} > M,$$

所以函数无上界. 但易见函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内是有界的.

(2) 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 的定义域为 D, 区间 $I\subset D$. 如果对于区间 I 上任意两点 x_1, x_2, 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) < f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**的(见图1.11).

如果对于区间 I 上任意两点 x_1,x_2, 当 $x_1<x_2$ 时, 恒有

$$f(x_1) > f(x_2),$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调减少**的(见图1.12).

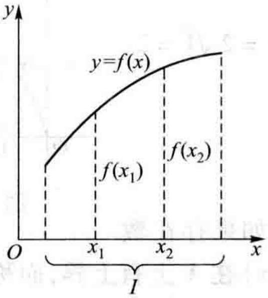


图1.11

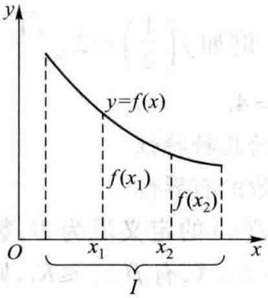


图1.12

单调增加和单调减少的函数统称为**单调函数**.

例1.1.12　函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上是单调减少的, 在区间 $[0,+\infty)$ 上是单调增加的, 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不是单调的(见图1.13).

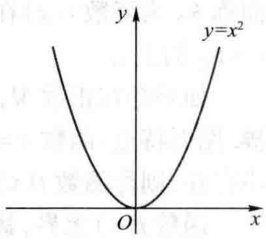


图1.13

(3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称(即若 $x\in D$, 则 $-x\in D$). 如果对于任一 $x\in D$, 有

$$f(-x) = f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**偶函数**.

如果对于任一 $x\in D$, 有

$$f(-x) = -f(x),$$

则称 $f(x)$ 为**奇函数**.