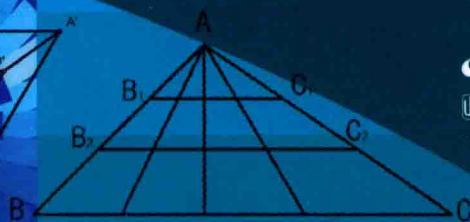
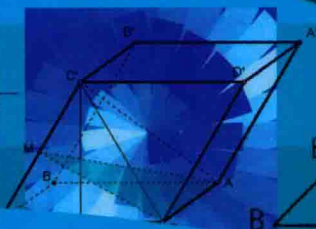
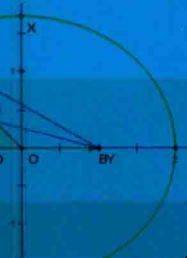


探究新高考系列丛书

高中数学

探究性学习

丛书主编 张 新
本册主编 杨建民



长江出版传媒
湖北科学技术出版社

探究新高考系列丛书

高中数学

探究性学习

编委会

丛书主编 张 新

本册主编 杨建刚

编写人员

银舟 郑艳霞



图书在版编目(CIP)数据

高中数学探究性学习/杨建民主编. —武汉:
湖北科学技术出版社, 2014.9

(探究新高考系列/张新主编)

ISBN 978-7-5352-6881-5

I. ①高… II. ①杨… III. ①中学数学课—高中—升学参考资料
IV. ①G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 167993 号

责任编辑:邱新友 徐 竹

封面设计:王 梅

出版发行:湖北科学技术出版社

电话:027-87679468

地 址:武汉市雄楚大街 268 号

邮编:430070

(湖北出版文化城 B 座 13-14 层)

网 址:<http://www.hbstp.com.cn>

印 刷:武汉中科兴业印务有限公司

邮编:430071

787×1092 1/16

16 印张

1 插页

320 千字

2014 年 9 月第 1 版

2014 年 9 月第 1 次印刷

定价:25.00 元

本书如有印装质量问题 可找本社市场部更换

前言

高中数学课程具有基础性，它包括两方面的含义：首先在义务教育阶段之后，为学生适应现代生活和未来发展提供更高水平的数学基础，使他们获得更高的数学素养；其次为学生进一步学习提供必要的数学准备。高中数学课程由必修系列课程和选修系列课程组成，必修系列课程是为了满足所有学生的共同数学需求；选修系列课程是为了满足学生的不同数学需求，它仍然是学生发展所需要的基础性数学课程。

高中数学新课标教材不仅传授基础知识，还倡导自主探索、动手实践、合作交流、阅读自学等学习数学的方式。这些方式有助于发挥学生学习的主动性，使学生的学习过程成为在教师引导下的“再创造”过程。同时，高中数学课程设立“数学探究”、“数学建模”等学习活动，为学生形成积极主动的、多样的学习方式进一步创造有利的条件，以激发学生的数学学习兴趣，鼓励学生在过程中，养成独立思考、积极探索的习惯。

本书就是根据《全日制普通高中数学新课程标准》和人教版高中《数学》必修1至必修5教材编写而成的，编排顺序和教材顺序一致。

“数学探究”、“数学建模”和“数学文化”等新的学习活动是新课程标准的教材必须具备学习数学形式。目前，人教版教材把这些活动恰当地穿插安排在有关的教学内容中，并注意提供相关的推荐课题、背景材料和示范案例，帮助学生设计自己的学习活动，完成课题作业或专题总结报告。

本书的内容主要由必修系列教材中各章的问题探究组成的。每一个问题探究由知识链接、问题提出、问题分析、问题解决、应用举例、巩固练习和练习答案组成。对每一个问题循序渐进、由表及里地探究，使读者能够从中学习和感悟数学探究性学习的基本方式和方法，形成直观感知、观察发现、归纳类比、空间想像、抽象概括、符号表示、运算求解、数据处理、演绎证明、反思与建构等思维过程。

本书适合高中数学教师和高中学生阅读，是教师组织课堂教学的参考资料，也能作为高中生课后巩固提高的资料使用，还能可以成为实施探究活动与复习备考的重要素材，具备了学习价值和应试价值。

本书由湖北省武汉市学科带头人杨建民老师主编，多名重点中学名师、骨干教师全力打造。受限于时间仓促，难免有错漏之处，恳请读者批评指正。

《高中数学探究性学习》编写组

2012年5月

目 录

必修一

问题1	集合元素的个数问题——容斥原理	1
问题2	函数的三种表示方法	10
问题3	函数与方程的思想	20
问题4	数形结合思想在函数问题中应用	29
问题5	函数的对称问题	39
问题6	函数的二分法和零点问题	49
问题7	一元二次方程根的分布问题	59
问题8	函数的应用问题	69

必修二

问题1	空间图形的截面问题	82
问题2	与多面体和旋转体有关的最值	90
问题3	球的有关问题	96
问题4	直线系问题	102
问题5	圆系	112
问题6	对称问题	121

必修三

问题1	古典概率与其他知识的结合	129
问题2	几何概型的测度选取问题	137
问题3	用样本估计总体	145
问题4	用线性回归模型解决实际问题	155
问题5	算法与其他知识的综合	165

必修四

问题1 三角函数的图象与变换	173
专题2 三角恒等变换	179
问题3 单位圆及三角函数线在解题中的应用	186
问题4 平面向量与几何证明	194
问题5 向量与三角形的“心”	205

必修五

问题1 三角形的“四心”	213
问题2 数列与函数	220
问题3 数列通项公式的求法	227
问题4 数列求和的方法	238
问题5 线性规划的目标函数及最优整数解	245

必修一

问题1 集合元素的个数问题——容斥原理

◎ 知识链接

1. 集合的含义

一般地，我们把研究对象统称为元素，把一些元素组成的总体叫做集合，简称集。

2. 集合的中元素的三个特性

(1) 元素的确定性：给定一个集合，任何一个元素在不在这个集合中就确定了；

(2) 元素的互异性：给定一个集合，任何两个元素是不相同的；

(3) 元素的无序性：给定一个集合，只要构成集合的元素是一样，尽管顺序不同，但是它们还是同一个集合如： $\{a,b,c\}$ 和 $\{a,c,b\}$ 是表示同一个集合。

3. 集合的表示

$\{\dots\}$ 如： $\{\text{我校的篮球队员}\}$ ， $\{\text{太平洋, 大西洋, 印度洋, 北冰洋}\}$ 。

(1) 用拉丁字母表示集合： $A = \{\text{我校的篮球队员}\}$ ， $A = \{1,2,3,4,5\}$ ，用小写字母表示元素如 a ；

(2) 集合的表示方法：列举法与描述法。

①列举法： $\{a,b,c,\dots\}$ 。

②描述法：将集合中的元素的公共属性描述出来，写在大括号内表示集合的方法。

如： $\{x \in \mathbb{R} | x - 2 > 1\}$ ， $\{x | x - 2 > 1\}$ 。

③语言描述法：例如 $\{\text{不是直角三角形的三角形}\}$ 。

④Venn图：用平面圆滑封闭曲线表示集合一个集合，将该集合所有元素标识在该封闭曲线内的一种方法，通常用来形象地解释多个集合之间的包含关系。

⑤常用数集及其记法:

自然数集	正整数集	整数集	有理数集	实数集	复数集
$\mathbf{N}$	$\mathbf{N}^*$ 或 $\mathbf{N}_+$	$\mathbf{Z}$	$\mathbf{Q}$	$\mathbf{R}$	$\mathbf{C}$

4. 集合的分类:

(1) 有限集: 含有有限个元素的集合.

(2) 无限集: 含有无限个元素的集合.

(3) 空集: 不含任何元素的集合, 例: $\{x|x^2 = -4, x \in \mathbf{R}\}$.

5. 集合间的基本关系

(1) “包含”关系: 子集

注意: 有两种可能① A 是 B 的一部分; ② A 与 B 是同一集合.反之: 集合 A 不包含于集合 B , 或集合 B 不包含集合 A , 记作 $A \not\subseteq B$.(2) “相等”关系: $A = B$ (基本思想: $5 \geq 5$, 且 $5 \leq 5$, 则 $5 = 5$),实例: 设 $A = \{x|x^2 - 1 = 0\}$ $B = \{-1, 1\}$, 即: “元素相同则两集合相等”.①任何一个集合是它本身的子集 $A \subseteq A$;②真子集: 如果 $A \subseteq B$, 但存在元素 $x \in B$, 且 $x \notin A$, 那就说集合 A 是集合 B 的真子集, 记作 $A \subsetneq B$ 或 $B \supsetneq A$;③如果 $A \subseteq B$, $B \subseteq C$, 那么 $A \subseteq C$;④如果 $A \subseteq B$, 同时 $B \subseteq A$, 那么 $A = B$;(3) 不含任何元素的集合叫做空集, 记为 $\emptyset$.

规定: 空集是任何集合的子集, 空集是任何非空集合的真子集.

有 n 个元素的集合, 含有 2^n 个子集, 2^{n-1} 个真子集.

6. 集合的运算

(1) $A \cap A = A$, $A \cap \emptyset = \emptyset$, $A \cap B = B \cap A$, $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$;(2) $A \cup A = A$, $A \cup \emptyset = A$, $A \cup B = B \cup A$, $A \subseteq A \cup A$, $B \subseteq A \cup B$;(3) $(\complement_U A) \cup (\complement_U B) = \complement_U (A \cap B)$, $(\complement_U A) \cap (\complement_U B) = \complement_U (A \cup B)$;(4) $A \cup (\complement_U A) = U$, $A \cap (\complement_U A) = \emptyset$;(5) $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cap (\complement_U B) = \emptyset$.

◎ 问题的提出

学校举办运动会，高一（1）班共有28名同学参加比赛，有15人参加游泳比赛，有8人参加田径比赛，有14人参加球类比赛，同时参加游泳比赛和田径比赛的有3人，同时参加游泳比赛和球类比赛的有3人，没有人同时参加三项比赛。问同时参加田径和球类比赛的有多少人？只参加游泳一项比赛的有多少人？

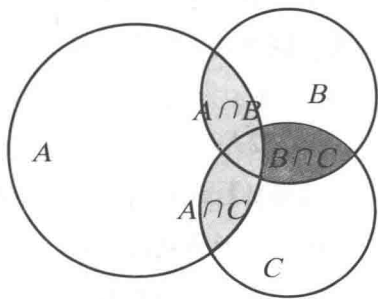
◎ 问题分析

我们可以将参加三项游泳、田径、球类比赛的同学分别用 A 、 B 、 C 三个集合表示，同时参加田径和球类比赛的有多少人就是求 $B \cap C$ 的元素的个数，只参加游泳一项比赛的有多少人就是求集合 A 的个数，由于没有人同时参加三项比赛学校举办运动会，只参加游泳一项比赛的有多少人就是求 $\complement_U(B \cup C)$ 的个数。

◎ 问题的解决

如图，分别用 A 、 B 、 C 三个集合表示：

参加三项游泳、田径、球类比赛的同学，由于没有人同时参加三项比赛学校举办运动会我们将集合 S 的个数记为 $n(S)$ ，全集记为 U ，利用Venn图表示三个集合之间的关系，由图可得：



$$\text{card}(U) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C)$$

$$\text{因为 } \text{card}(U) = 28, \text{card}(A) = 15, \text{card}(B) = 8, \text{card}(C) = 14,$$

$$\text{card}(A \cap B) = 3, \text{card}(A \cap C) = 3,$$

$$\text{所以 } 28 = 15 + 8 + 14 - 3 - 3 - n(B \cap C),$$

$$\text{解得, } \text{card}(B \cap C) = 3.$$

即同时参加同时参加田径和球类比赛的有3人，

$$\text{又 } \text{card}(B \cup C) = \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C) = 8 + 14 - 3 = 19$$

$$\text{card}(\complement_U(B \cup C)) = \text{card}(U) - \text{card}(B \cup C) = 28 - 19 = 9$$

答：同时参加田径和球类比赛的有3人，只参加游泳一项比赛的有9人。

以上的问题,属于集合的研究交集是非空集合的集合个数问题,对于两个集合 A 和 B 之间的个数问题,我们有:

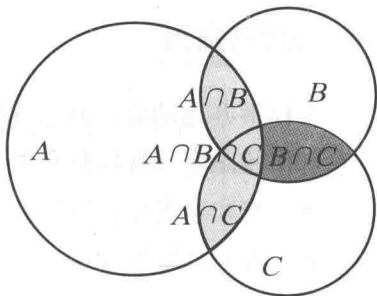
$$\text{card}(A \cup B) = \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A \cap B). \quad ①$$

对于三个集合 A 、 B 和 C 之间的个数问题,根据Venn图我们有:

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C)$$

$$- \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C). \quad ②$$

以上结论是三个集合的容斥原理,其实对于 n 个集合,它们也有相应的结论.



◎ 应用举例

例1 对某单位的100名员工进行调查,结果发现他们喜欢看球赛和电影、戏剧.其中58人喜欢看球赛,38人喜欢看戏剧,52人喜欢看电影,既喜欢看球赛又喜欢看戏剧的有18人,既喜欢看电影又喜欢看戏剧的有16人,三种都喜欢看的有12人,则只喜欢看电影的有:

- A. 22人 B. 28人 C. 30人 D. 36人

【解析】 设 $A = \{\text{喜欢看球赛的人}\}$, $\text{card}(A) = 58$,

$B = \{\text{喜欢看戏剧的人}\}$, $\text{card}(B) = 38$,

$C = \{\text{喜欢看电影的人}\}$, $\text{card}(C) = 52$,

$D = \{\text{只喜欢看电影的人}\}$

则 $A \cap B = \{\text{既喜欢看球赛的人又喜欢看戏剧的人}\}$, $\text{card}(A \cap B) = 18$,

$B \cap C = \{\text{既喜欢看电影又喜欢看戏剧的人}\}$, $\text{card}(B \cap C) = 16$,

$A \cap B \cap C = \{\text{三种都喜欢看的人}\}$, $\text{card}(A \cap B \cap C) = 12$,

$A \cup B \cup C = \{\text{看球赛和电影、戏剧至少喜欢一种}\}$, $\text{card}(A \cup B \cup C) = 100$.

根据公式:

$$\text{card}(A \cup B \cup C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C)$$

$$- \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C),$$

得 $\text{card}(A \cap C) = \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cup B \cup C)$

$$- \text{card}(A \cap B) - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) = 148 - 100 - 18 - 16 + 12 = 26.$$

$$\begin{aligned}\text{所以, } \text{card}(D) &= \text{card}(C) - \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) \\ &= 52 - 16 - 26 + 12 = 22.\end{aligned}$$

所以本题应该选A.

例2 已知某校共有学生900名, 其中男生528人, 高中学生312人, 团员670人, 高中男生192人, 男团员336人, 高中团员247人, 高中男团员175人, 试问这些数据统计有无错误?

解: 用 I 表示全校学生, A 表示该校男生, B 表示该校高中学生, C 表示团员, 则有:

$$\text{card}(I) = 900, \text{card}(A) = 528, \text{card}(B) = 312, \text{card}(C) = 670, \text{card}(A \cap B) = 192$$

$$\text{card}(A \cap C) = 336, \text{card}(B \cap C) = 247, \text{card}(A \cap B \cap C) = 175.$$

这样, 初中女生的非团员数是:

$$\begin{aligned}& \text{card}(I) - \text{card}(A) - \text{card}(B) - \text{card}(C) + \text{card}(A \cap B) + \text{card}(A \cap C) \\ & + \text{card}(B \cap C) - \text{card}(A \cap B \cap C) \\ & = 900 - 528 - 312 - 670 + 192 + 336 + 247 - 175 = -10 < 0,\end{aligned}$$

因人数是负数, 所以数据统计有错误.

这种题目关键要理清清楚内在的包含关系, 画出Venn图, 再加上多多练习成功就在眼前.

例3 某大楼里有125盏灯, 按1, 2, 3, ..., 125编号, 每盏灯有一个拉线开关, 拉一次灯亮, 再拉一次灯熄. 工程师做实验, 他先把所有号码是4的倍数的灯的开关拉1次, 再把所有号码是6的倍数的灯的开关拉1次, 同时再拉1次号码是4的倍数、但不是6的倍数的灯开关, 问: 现在有多少盏灯是亮的?

【解析】号码是4的倍数的灯有4, 8, 12, ..., 124, 共31盏;

号码是6的倍数的灯有6, 12, 18, ..., 120, 共20盏;

号码是4的倍数也是6的倍数的灯有12, 24, 36, ..., 120, 共10盏;

号码是4的倍数, 但不是6的倍数的灯有31-10=21盏.

则亮的灯数是20-10=10 (盏).

例4 求以60为分母的最简真分数共有多少个?

【解析】只需要考察其中分子的个数即可; 并且分子要满足与60互质, 即分子不是2、3、5中任何一个数的倍数.

在60以内,

能被2整除的数组成的集合为 A 有2, 4, 6, 8, ..., 60, 共30个, $\text{card}(A) = 30$;

能被3整除的数组成的集合为 B 有3, 6, 9, ..., 60, 共20个, $\text{card}(B) = 20$;

能被5整除的数组成的集合为 C 有5, 10, 15, ..., 60, 共12个, $\text{card}(C) = 12$;

能同时被2、3整除的数有6, 12, 18, ..., 60, 共10个, $\text{card}(A \cap B) = 10$;

能同时被2、5整除的数有10, 20, 30, ..., 60, 共6个, $\text{card}(A \cap C) = 6$;

能同时被3、5整除的数有15, 30, 45, 60, 共4个, $\text{card}(B \cap C) = 4$;

能同时被2、3、5整除的数有30, 60, 共2个, $\text{card}(A \cap B \cap C) = 2$.

由容斥原理可得, 分子中能被2、3、5中任何一个数整除的数有:

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) \\ &\quad - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) \\ &= 30 + 20 + 12 - 10 - 6 - 4 + 2 = 44. \end{aligned}$$

所以分子不是2、3、5中任何一个数的倍数, 即不能被2、3、5中任何一个数整除的数有: $\text{card}(U) - \text{card}(A \cup B \cup C) = 60 - 44 = 16$, 则最简真分数共有16个.

例5 在1~100这100个自然数中, 不能被2、3、5中任何一个数整除的数有多少个?

【解析】假设1~100这100个自然数中全集为 U , $\text{card}(U) = 100$,

1~100中,

能被2整除的数组成的集合为 A 有2, 4, 6, 8, ..., 100, 共50个, $\text{card}(A) = 50$;

能被3整除的数组成的集合为 B 有3, 6, 9, ..., 99, 共33个, $\text{card}(B) = 33$;

能被5整除的数组成的集合为 C 有5, 10, 15, ..., 100, 共20个, $\text{card}(C) = 20$;

能同时被2、3整除的数有6, 12, 18, ..., 96, 共16个, $\text{card}(A \cap B) = 16$;

能同时被2、5整除的数有10, 20, 30, ..., 100, 共10个, $\text{card}(A \cap C) = 10$;

能同时被3、5整除的数有15, 30, 45, ..., 90, 共6个, $\text{card}(B \cap C) = 6$;

能同时被2、3、5整除的数有30, 60, 90, 共3个, $\text{card}(A \cap B \cap C) = 3$.

由容斥原理可得, 能被2、3、5中任何一个数整除的数有

$$\begin{aligned} \text{card}(A \cup B \cup C) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) + \text{card}(C) - \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap C) \\ &\quad - \text{card}(B \cap C) + \text{card}(A \cap B \cap C) \\ &= 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74. \end{aligned}$$

所以不能被2、3、5中任何一个数整除的数有:

$$\text{card}(U) - \text{card}(A \cup B \cup C) = 100 - 74 = 26.$$

例6 求从1到500的整数中被3和5整除但不被7整除的数的个数.

【解析】假设 A 表示从1到500的整数中被3整除的数的集合, B 表示从1到500的整数中被5整除的数的集合, C 表示从1到500的整数中被7整除的数的集合,

根据容斥原理

$$\text{card}(A \cap B \cap \bar{C}) = \text{card}(A \cap B) - \text{card}(A \cap B \cap C).$$

1到500的整数中被3整除且能被5整除的个数即为能被15整除的个数, 1到500的整数中能被15整除第一个数是15, 最后一个能被15整除的是495, 共有33个.

所以 $\text{card}(A \cap B) = 33$, 这33个数中能够被7整除的数字有, 105, 210, 315, 420共4个,

$$\text{所以 } \text{card}(A \cap B \cap C) = 4, \text{ 于是 } \text{card}(A \cap B \cap \bar{C}) = 33 - 4 = 29.$$

◎ 巩固练习

1. 已知集合 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, 那么 $A \cap B = (\quad)$

A. $\{3, 4\}$ B. $\{1, 2, 5, 6\}$ C. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ D. $\emptyset$

2. 某单位有青年员工85人, 其中68人会骑自行车, 62人会游泳, 既不会骑车又不会游泳的有12人, 则既会骑车又会游泳的有 $(\quad)$ 人

A. 57 B. 73 C. 130 D. 69

3. 设 M, P 是两个非空集合, 定义 M 与 P 的差集为: $M - P = \{x | x \in M, x \notin P\}$, 则等于 $M - (M - P)$ $(\quad)$

A. P B. $M \cap P$ C. $M \cup P$ D. M

4. 一张正方形的纸片面积是50平方厘米, 一张圆形的纸片面积是40平方厘米. 两张纸片覆盖在桌面上的面积是60平方厘米, 则这两张纸片重合部分的面积是_____.

5. (2009年陕西) 某班有36名同学参加数学、物理、化学课外探究小组, 每名同学至多参加两个小组, 已知参加数学、物理、化学小组的人数分别为26, 15, 13, 同时参加数学和物理小组的有6人, 同时参加物理和化学小组的有4人, 则同时参加数学和化学小组的有人_____.

6. 某班同学参加升学考试, 得满分的人数如下: 数学20人, 语文20人, 英语20人, 数学、英语两科满分者8人, 数学、语文两科满分者7人, 语文、英语两科满分者9人, 三科都没得满分者3人. 问这个班最多多少人? 最少多少人?

◎ 练习答案

1. 【解析】A

2. 【解析】设 $A = \{\text{会骑自行车的人}\}$, $\text{card}(A) = 68$, $B = \{\text{会游泳的人}\}$,

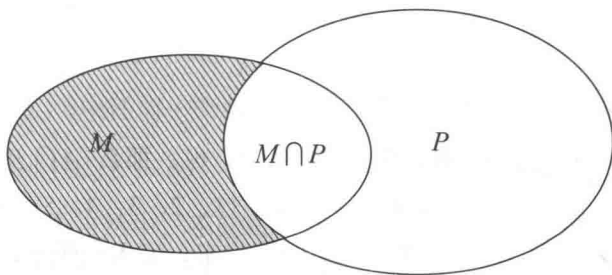
$\text{card}(B)=62$ 显然, $\text{card}(A)+\text{card}(B)=68+62=130$; $\text{card}(A\cup B)=85-12=73$, 根据容斥原理, 则 $\text{card}(A\cap B)=\text{card}(A)+\text{card}(B)-\text{card}(A\cup B)=130-73=57$

所以, 答案为A.

3. 【解析】方法一: 作出Venn图. 当 $M\cap P\neq\emptyset$ 时, 由图知, $M-P$ 为图中的阴影部分, 则 $M-(M-P)$ 显然是 $M\cap P$.

当 $M\cap P=\emptyset$ 时, $M-(M-P)=M-M=\{x|x\in M, \text{且 } x\notin M\}=\emptyset=M\cap P$.

综上, 故选B.

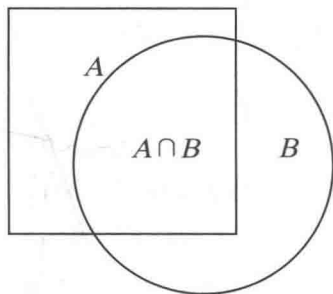


方法二: 设 I 为全集, 易知 $M-P=M\cap\complement_I P$, 即 $M-(M-P)=M\cap\complement_I(M\cap\complement_I P)=M\cap(\complement_I M\cup P)=(M\cap\complement_I M)\cup(M\cap P)=M\cap P$. 故选B.

4. 【解析】如图, 将两张纸片看成是集合A与B, 那么重叠部分的面积就是两个集合的交集的面积, 根据容斥原理,

$$\begin{aligned}\text{card}(A\cap B) &= \text{card}(A) + \text{card}(B) - \text{card}(A\cup B) \\ &= 50 + 40 - 60 = 30.\end{aligned}$$

所以, 这两张纸片重合部分的面积是30平方厘米, 应该填30平方厘米.



5. 【解析】由条件知, 每名同学至多参加两个小组, 故不可能出现一名同学同时参加数学、物理、化学课外探究小组, 设参加数学、物理、化学小组的人数构成的集合分别为, 则 $\text{card}(A\cap B\cap C)=0$. $\text{card}(A\cap B)=6, \text{card}(B\cap C)=4$.

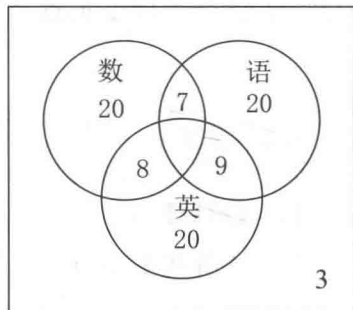
由公式 $\text{card}(A\cup B\cup C)=\text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)-\text{card}(A\cap B)-\text{card}(A\cap C)-\text{card}(B\cap C)$ 易知 $36=26+15+13-6-4-\text{card}(A\cap C)$.

故 $\text{card}(A\cap C)=8$,

即同时参加数学和化学小组的有8人.

6. 【解析】分析与解: 根据题意画图.

设三科都得满分者为 x , 根据容斥原理, 全班人数即全集元素的个数,



用 I 表示全班学生， A 表示该班数学得满分学生， B 表示该班语文得满分学生， C 表示该班英语的满分的学生，则有：

$$\text{card}(A)=20, \text{card}(B)=20, \text{card}(C)=20, \text{card}(A \cap B)=7$$

$$\text{card}(A \cap C)=8, \text{card}(B \cap C)=9, \text{card}(C_U(A \cup B \cup C))=3$$

$$\text{card}(A \cap B \cap C)=x. \text{ 这样, 全班人数是: } \text{card}(I),$$

$$\text{card}(I)=\text{card}(C_U(A \cup B \cup C))+\text{card}(A)+\text{card}(B)+\text{card}(C)$$

$$-\text{card}(A \cap C)-\text{card}(B \cap C)+\text{card}(A \cap B \cap C)$$

$$\text{全班人数} = 3 + 20 + 20 + 20 - 7 - 8 - 9 + x,$$

$$\text{整理后: 全班人数} = 39 + x,$$

$39+x$ 表示全班人数，当 x 取最大值时，全班人数就最多，当 x 取最小值时，全班人数就最少. x 是数学、语文、英语三科都得满分的同学，因而 x 中的人数一定不超过两科得满分的人数，即 $x \leq 7$ ， $x \leq 8$ 且 $x \leq 9$ ，由此我们得到 $x \leq 7$. 另一方面 x 最小可能是0，即没有三科都得满分的.

当 x 取最大值7时，全班有 $39+7=46$ 人，当 x 取最小值0时，全班有 $39+0=39$ 人.

答：这个班最多有46人，最少有39人.

问题2 函数的三种表示方法

◎ 知识链接

1. 函数概述

函数概念是中学数学中最重要的概念之一，它既是数学研究的对象，又是解决数学问题的基本思想方法。早在16、17世纪，生产和科学技术的发展要求数学不仅研究静止不动的量，而且要研究运动过程中各个量之间的依赖关系，从而促进数学由常量数学时期进入到变量数学时期。函数也就成为研究变量数学必不可少的概念。

函数(function)一词，始用于1692年，见著于微积分创始人之一莱布尼兹G. W. Leibniz, 1646—1717)的著作。而 $f(x)$ 则由欧拉(Euler)于1724年首次使用。我国于1859年引进函数的概念，它首次是在清代数学家李善兰与英国传教士伟烈亚历山大合译的《代微积拾级》中出现。函数在初高等数学中，在物理、化学和其他自然科学中，在经济领域和社会科学中，均有广泛的应用，起着基础的作用。

2. 函数的概念

设 A 、 B 是非空的数集，如果按照某个确定的对应关系 f ，使对于集合 A 中的任意一个数 x ，在集合 B 中都有唯一确定的数 $f(x)$ 和它对应，那么就称 $f: A \rightarrow B$ 为从集合 A 到集合 B 的一个函数。记作： $y=f(x)$ ， $x \in A$ 。其中， x 叫做自变量， x 的取值范围 A 叫做函数的定义域；与 x 的值相对应的 y 值叫做函数值，函数值的集合 $\{f(x) | x \in A\}$ 叫做函数的值域。

注意：(1) 定义域：能使函数式有意义的实数 x 的集合称为函数的定义域。求函数的定义域时列不等式组的主要依据是：

- ① 分式的分母不等于零；
- ② 偶次方根的被开方数不小于零；
- ③ 对数式的真数必须大于零；
- ④ 指数、对数式的底必须大于零且不等于1。

⑤ 如果函数是由一些基本函数通过四则运算结合而成的，那么，它的定义域是使各部分都有意义的 x 的值组成的集合。

⑥ 指数为零底不可以等于零。

⑦ 实际问题中的函数的定义域还要保证实际问题有意义。

相同函数的判断方法:

- ①表达式相同 (与表示自变量和函数值的字母无关);
- ②定义域一致 (两点必须同时具备) (见课本21页相关例2)

(2) 值域: 先考虑其定义域

①观察法: 由函数的定义域结合图象, 或直接观察, 准确判断函数值域的方法

②配方法: 当所给函数是二次函数或可化为二次函数的符合函数时, 可以利用配方法求函数值域

③代换法: 通过适当恒等变形, 将函数中部分用字母代替, 转化为求该字母的值域的方法.

3. 函数图象

(1) 定义: 在平面直角坐标系中, 以函数 $y = f(x)$, $x \in A$ 中的 x 为横坐标, 函数值 y 为纵坐标的点 $P(x, y)$ 的集合 C , 叫做函数 $y = f(x)$, $x \in A$ 的图象. C 上每一点的坐标 (x, y) 均满足函数关系 $y = f(x)$, 反过来, 以满足 $y = f(x)$ 的每一组有序实数对 x, y 为坐标的点 (x, y) , 均在 C 上.

(2) 画法

①描点法: 取部分 $x \in C$, 计算 $y = f(x)$, 在平面直角坐标系中描出点 (x, y) , 再用平滑曲线连接各点

②图象变换法: 通过平移、对称、伸缩等方式, 由基本的函数得到较复杂函数图象方法.

◎ 问题的提出

在数学课本人教版A版必修1第19页内容有:

问题1 某种笔记本的单价是5元, 买 x ($x \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$) 本笔记本需要 y 元. 试用函数的三种表示法解析法, 图象法, 列表法表示函数.

◎ 问题分析

我们在初中已经学习了解析法, 图象法, 列表法:

解析法: 用数学表达式表示两个变量之间的函数关系, 这种表示方法叫做解析法, 这个数学表达式叫做函数的解析式.

图象法: 以自变量 x 的取值为横坐标, 对应的函数值 y 为纵坐标, 在平面直角坐标系