UMSS

大学数学科学丛书 — 33

常微分方程

张 祥 编著

科 学 出 版 社

大学数学科学丛书 33

常微分方程

张 祥 编著

科 学 出 版 社

北 京

内 容 简 介

本书介绍了常微分方程理论中一些必备的基础知识，内容包括常微分方程的初等积分法、解的存在唯一性、解关于初值和参数的连续依赖性和连续可微性、解析微分方程解析解的存在性及其应用、微分方程组的可积理论及其在求解偏微分方程中的应用、常系数线性微分方程和微分方程组的解法及其在平面微分方程组局部结构研究上的应用、变系数线性微分方程组的 Floquet 理论、Sturm-Liouville 边值问题及其在波动方程和热传导方程求解中的应用、微分方程解的稳定性判定、极限环存在性的基础知识，并简要介绍了结构稳定性和分支理论的基础知识. 书中还介绍了如何利用 Mathematica 软件求解微分方程和作平面微分系统的相图. 书末给出 Ascoli-Arzelà 引理的初等证明和实矩阵对数存在性的证明.

本书可作为高等院校理工科和经济学等专业本科生"常微分方程"课程的教材，也可作为相关专业教师和研究生的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/张祥编著. —北京：科学出版社，2015.5
(大学数学科学丛书；33)
ISBN 978-7-03-044323-6
Ⅰ. ①常… Ⅱ. ①张… Ⅲ. ①常微分方程-高等学校-教材 Ⅳ. ①O175.1
中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 103123 号

责任编辑：王丽平／责任校对：张凤琴
责任印制：肖 兴／封面设计：陈 敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015 年 6 月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015 年 6 月第一次印刷 印张：15 1/2
字数：320 000

定价：68.00 元
(如有印装质量问题，我社负责调换)

作 者 简 介

张祥 1965 年出生于安徽省无为县. 1988 和 1991 年于安徽师范大学获学士和硕士学位, 1997 年于南京大学获博士学位. 毕业后历任南京师范大学讲师和副教授, 2001 年调入上海交通大学工作, 2002 年起任教授和博士生导师. 1999 年至 2001 年在西班牙加泰罗尼亚数学研究中心从事博士后研究工作, 2003 年至 2004 年度在佐治亚理工学院从事教学和研究工作.

张祥的主要研究兴趣是常微分方程和动力系统, 特别是微分方程的可积、分支和定性理论的研究. 主要结果发表在《American Journal of Mathematics》、《Transactions of the American Mathematical Society》、《Journal of Functional Analysis》、《Communications in Mathematical Physics》、《Journal of Differential Equations》、《Physica D》、《Pacific Journal of Mathematics》和《Ergodic Theory and Dynamical Systems》等杂志上.张祥现任中国数学会奇异摄动专业委员会常务副理事长，以及《Qualitative Theory of Dynamical Systems》和《International Journal of Bifurcation and Chaos》的 Associate 编委.

《大学数学科学丛书》序

按照恩格斯的说法，数学是研究现实世界中数量关系和空间形式的科学．从恩格斯那时到现在，尽管数学的内涵已经大大拓展了，人们对现实世界中的数量关系和空间形式的认识和理解已今非昔比，数学科学已构成包括纯粹数学及应用数学内含的众多分支学科和许多新兴交叉学科的庞大的科学体系，但恩格斯的这一说法仍然是对数学的一个中肯而又相对来说易于为公众了解和接受的概括，科学地反映了数学这一学科的内涵．正由于忽略了物质的具体形态和属性、纯粹从数量关系和空间形式的角度来研究现实世界，数学表现出高度抽象性和应用广泛性的特点，具有特殊的公共基础地位，其重要性得到普遍的认同．

整个数学的发展史是和人类物质文明和精神文明的发展史交融在一起的．作为一种先进的文化，数学不仅在人类文明的进程中一直起着积极的推动作用，而且是人类文明的一个重要的支柱．数学教育对于启迪心智、增进素质、提高全人类文明程度的必要性和重要性已得到空前普遍的重视．数学教育本质是一种素质教育；学习数学，不仅要学到许多重要的数学概念、方法和结论，更要着重领会数学的精神实质和思想方法．在大学学习高等数学的阶段，更应该自觉地去意识并努力体现这一点．

作为面向大学本科生和研究生以及有关教师的教材，教学参考书或课外读物的系列，本丛书将努力贯彻加强基础、面向前沿、突出思想、关注应用和方便阅读的原则，力求为各专业的大学本科生或研究生(包括硕士生及博士生)走近数学科学、理解数学科学以及应用数学科学提供必要的指引和有力的帮助，并欢迎其中相当一些能被广大学校选用为教材，相信并希望在各方面的支持及帮助下，本丛书将会愈出愈好．

李大潜

2003 年 12 月 27 日

前　言

常微分方程于 17 世纪末首先出现在诸如 Isaac Newton, Gottfried Leibniz 和 Bernoulli 家族等科学巨匠的工作之中. 它巨大的实际作用从诞生之初就体现出来, 如牛顿利用力学原理建立常微分方程, 并运用微积分证明地球围绕太阳运行的轨道是椭圆.

对实际问题（特别是牛顿力学、天体力学等）中导出的大量的微分方程求解的需要, 促进和推动了微积分的诞生和发展. 因而常微分方程是联系微积分最为紧密的课程之一, 是很多数学后续课程的基础. 随着科技的发展, 常微分方程在气象、物理、工程、电子信息、生物和化学, 以及经济金融等许多学科领域中发挥了重要的作用.

常微分方程在很长的发展时期内都是寻求各种解法. 1841 年 Jeseph Liouville 证明了一类形式上非常简单的 Riccati 方程不能用初等积分法求解. Liouville 的工作促使人们寻求新的研究常微分方程的方法和理论. 19 世纪末 20 世纪初, Henri Poincaré 的一系列开创性工作奠定了现代动力系统的基础.

本书是作者多年来在上海交通大学数学系, 以及工科和经济管理等院系本科生的授课讲义基础上编写的. 讲义选材的原则是尽量将常微分方程最基础的必要的理论体系选入教材, 同时在各章节中穿插介绍一些动力系统近代理论的初步知识. 在基础理论的证明上既选用一些经典的分析方法训练学生的分析和推导能力, 又引入小部分现代分析的方法训练学生的抽象思维和逻辑推理能力, 以使他们对现代分析有一个初步的认识.

本书的叙述和证明力求浅显易懂, 方便学生自学. 书中有大量的注记, 这些都是非常重要的内容, 它们对课本内容的理解具有很好的帮助, 希望读者在阅读本书过程中重视对注记部分的理解.

初等积分法部分介绍了几类方程的求解方法, 并配有少量的例题. 侧重点在恰当方程和积分因子法以及线性微分方程, 因为这部分内容不仅在方法上而且在理论上都是很重要的. 其他部分都是略讲的, 因为很多方程都可以通过 Mathematica 和 Maple 等数学软件来求解. 因此书中通过例子简单地介绍了 Mathematica 的用法.

常微分方程基础理论主要分布在第 2 章和第 3 章. 第 2 章重点阐述纯量常微分方程初值问题解的存在性、唯一性, 以及解关于自变量、初始条件和参数的连续依赖性. 这部分内容证明的主要工具是完备距离空间中的压缩映射原理和 Ascoli–Arzelà 引理.

第 3 章主要涉及高阶微分方程和微分方程组的解的基础理论. 具体为解的存在唯一性, 解关于自变量、初始条件和参数的连续可微性. 解析微分方程组局部解析解的存在性; 对解析线性微分方程组解的收敛半径给出了新的证明; 以及这些理论在求解二阶线性微分方程幂级数解中的应用. 微分方程组的局部可积理论以及它们在线性和拟线性偏微分方程求解中的应用, 同时介绍了可积 Hamilton 系统的一些基础知识和结论及其应用的例子.

第 4 章主要讲述线性微分方程组和高阶线性微分方程解的存在区间和通解的结构, 常系数线性微分方程组和高阶常系数线性微分方程的解法. 并利用常系数线性微分方程组的解法和 Mathematica 作相图讨论平面线性齐次微分方程零解附近轨线的局部拓扑结构. 特别地, 该章对高阶常系数线性微分方程的基本解组给出一个简洁的证明.

第 5 章讲述变系数线性微分方程 (组) 的一些基础理论. 侧重点是周期系数线性微分方程组基解矩阵的 Floquet 标准型及周期解与 Floquet 乘数之间的关系, 二阶线性微分方程解的零点的性质, Sturm–Liouville 边值问题及其在热传导方程和波动方程初边值问题求解上的应用.

第 6 章是常微分方程理论的近代部分. 简要介绍了有关解的稳定性, 极限环的存在和不存在的简单判定, 以及分支问题的若干概念和例子, 最后介绍具有混沌吸引子的几个三维微分系统的例子.

本教材可以一学期讲授. 针对不同的教学对象和教学时数, 第 3 章的微分方程解析解和可积理论, 第 5 章的变系数线性微分方程基础理论和第 6 章的平面自治微分系统的内容可以选择部分学习, 因为这些章节的内容相对独立, 不影响其他章节内容的学习. 书中带有 * 号的章节部分超出了二年级本科生的知识范围, 可作为有兴趣的同学对现代动力系统基础知识的一个了解.

最后是附录, 其中给出 Ascoli–Arzelà 引理的证明和非奇异实矩阵的矩阵对数存在性的证明. 因为 Ascoli–Arzelà 引理及其证明一般都在泛函分析教科书的抽象空间中给出, 低年级学生读起来较为困难. 为方便读者, 附录中给出一个较为简单的证明. 实奇异矩阵的矩阵对数的存在性大多数线性代数的教科书没有给出证明, 为方便读者也在附录中给出其证明.

参考文献不仅列了常微分方程的相关书籍和文献, 还列了一些动力系统的文献和书籍. 目的是让学有余力的学生通过进一步查阅相关文献资料, 对常微分方程现代理论有一个初步的了解.

本书的讲义在上海交通大学数学系和经济管理学院本科生中进行了多年的试用. 常微分方程组的老师和不少同学对本书的初稿提出了很多宝贵的修改意见和建议, 如给出部分重要定理简洁的新证明, 指出很多打印错误等. 在此向他们表示衷心的感谢!

特别感谢李大潜院士、李勇教授和张伟年教授! 他们在书稿送审过程中阅读了全文, 并就选材和材料的安排等方面提出了很多好的意见和建议. 科学出版社王丽平编辑在出版过程中做了大量工作, 在此向她表示诚挚的谢意! 最后感谢我的妻子苏年年, 正因为她的付出才使得我有足够的时间写作并完成本书.

由于水平和时间的限制, 书中可能还有不足之处. 恳请读者若发现书中的任何问题都能及时与作者交流, 以便进一步修改, 不胜感激!

最后对上海交通大学在本书出版中给予的经费资助表示感谢!

作　者

于上海交通大学

2015 年 1 月 8 日

符 号 表

$\mathbb{R}$	实数集 (或实数域)
$\mathbb{C}$	复数集（或复数域）
$\mathbb{Z}$	整数集（或整数群）
$\mathbb{R}^n$	实 n 维线性空间
$A \setminus B$	属于集合 A 但不属于集合 B 的元素构成的集合
$\exists$	存在
$\forall$	任意的
$n!$	1 到 n 的连乘积, 即 $n(n-1)\cdot 2\cdot 1$
$x \in D$	x 属于集合 D
$f \in C(\Omega)$	f 是区域 Ω 上的连续函数
$f \in C^k(\Omega)$	f 是区域 Ω 上的 k 次连续可微函数
$\rightrightarrows$	一致收敛
$A \subset B$	集合 A 是集合 B 的子集
$C[a,b]$	定义在 $[a,b]$ 上的连续函数的全体构成的集合
$A \Leftrightarrow B$	命题 A 等价于命题 B
$\dfrac{D(f_1,\cdots,f_n)}{D(y_1,\cdots,y_n)}$	函数 $f_i(x,y_1,\cdots,y_n), i=1,\cdots,n$ 关于 $y_1,\cdots,y_n$ 的 Jacobi 行列式
$\dfrac{\partial(f_1,\cdots,f_n)}{\partial(y_1,\cdots,y_n)}$	函数 $f_i(x,y_1,\cdots,y_n), i=1,\cdots,n$ 关于 $y_1,\cdots,y_n$ 的 Jacobi 矩阵
$(\mathbb{R}^n, \mathbf{0})$	$\mathbb{R}^n$ 空间中坐标原点 $\mathbf{0}$ 的某个小邻域
$f_x(x,y)$	函数 $f(x,y)$ 关于变量 x 的偏导数

目　录

第 1 章　常微分方程的基础知识

本章主要介绍常微分方程一些最基本的知识, 如微分方程和解的定义、解的几何解释、解的存在和唯一性定理的叙述, 以及微分方程的各种解法等. 微分方程理论的证明部分本章涉及较少.

1.1　常微分方程的基本概念

本节首先介绍微分方程及其解和通解的定义.

1.1.1　微分方程和解

微分方程是指含有未知函数的导数的方程. 未知函数的自变量是单变量的微分方程称为**常微分方程**. 未知函数的自变量是多变量的微分方程称为**偏微分方程**. 微分方程含有的导数的最高阶数称为微分方程的**阶**.

例

(1) 方程

$$\frac{d^3y}{dx^3}+(y^5+xy+1)\frac{dy}{dx}=1$$

是 3 阶常微分方程.

(2) 方程

$$x^2\frac{d^4x}{dt^4}+\left(\frac{dx}{dt}\right)^5=\cos x$$

是 4 阶常微分方程.

(3) Newton 第二运动定律导出的微分方程

$$m\frac{d^2x(t)}{dt^2}=F(x(t))$$

是 2 阶常微分方程, 其中 m 是质点的质量, F 是 t 时刻质点在位置 $x(t)$ 受到的沿着运动方向的作用力.

(4) 方程

$$\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial x}+(u+1)\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}-xyz\frac{\partial u(x,y,z)}{\partial y}=u^3$$

是 1 阶偏微分方程.

(5) 方程

$$A\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+2B\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}+C\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}+D\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}+E\frac{\partial u(x,y)}{\partial y}+F=0$$

是 2 阶偏微分方程, 其中 A,B,C,D,E, F 是常数.

(5.1) 当 $B^2-AC<0$ 时, 上述二阶方程称为椭圆偏微分方程. Laplace 方程 $\Delta u=0$ 和 Poisson 方程 $\Delta u=f$ 是其特例, 其中 Δ 是 Laplace 算子

$$\Delta=\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2}.$$

(5.2) 当 $B^2-AC=0$ 时, 上述二阶方程称为抛物偏微分方程. 热传导方程

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

是其特例, 其中 k 是热扩散率.

(5.3) 当 $B^2-AC>0$ 时, 上述二阶方程称为双曲偏微分方程. 波动方程

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=c^2\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

是其特例, 其中 c 是波的传播速度.

本书主要讲述常微分方程, 作为常微分方程理论在偏微分方程中的应用, 书中 3.3.2 小节介绍一阶线性偏微分方程和一阶拟线性偏微分方程的解法. 作为 Sturm-Liouville 边值问题解的理论的应用, 5.3 节介绍了热传导方程和波动方程初边值问题的解法.

n 阶常微分方程的一般形式是

$$F\left(t,x(t),\frac{dx}{dt}(t),\cdots,\frac{d^n x}{dt^n}(t)\right)=0, \tag{1.1.1}$$

其中 F 是关于 $n+2$ 个变量的给定函数, 且 F 必须含有 $\dfrac{d^n x}{dt^n}$. 因 x 关于 t 的 n 阶导数含在函数 F 之中, 所以称 (1.1.1) 为 $\boldsymbol{n}$ **阶隐式常微分方程** (简称 $\boldsymbol{n}$ **阶隐式方程**). 以后为了方便起见常用 $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $x'(t)$, $x''(t)$ 和 $x^{(n)}(t)$ 表示未知函数 x 关于自变量 t 的各阶导数. 常微分方程中, 习惯上常用时间 t 作为自变量, 也常用 y 作为因变量, x 作为自变量等.

$\boldsymbol{n}$ **阶显式常微分方程**的一般形式是

$$x^{(n)}(t)=f\left(t,x(t),x'(t),\cdots,x^{(n-1)}(t)\right), \tag{1.1.2}$$

其中 f 是关于 $n+1$ 个变量的函数. 易见, 显式常微分方程可以写成隐式常微分方程的形式. 而隐式常微分方程局部地也可以利用隐函数存在定理表示成显式的形式.

设函数 F 定义在 $\mathbb{R}^{n+2}$ 维空间的某开区域 Ω 上. 定义在 (t_1,t_2) 上的函数 $x=\phi(t)$ 称为微分方程 (1.1.1) 的**解**, 如果 $\phi(t)$ 在 (t_1,t_2) 上具有 $n-1$ 阶连续导数, 其 n 阶导数存在, 且

$$\left(t,\phi(t),\phi'(t),\cdots,\phi^{(n)}(t)\right)\in\Omega,$$

$$F\left(t,\phi(t),\phi'(t),\cdots,\phi^{(n)}(t)\right)\equiv 0,\quad t\in(t_1,t_2).$$

称 (t_1,t_2) 为解的**定义区间**. 注：有可能 $t_1=-\infty$ 或 $t_2=\infty$.

例 函数 $y(t)=c_1\cos t+c_2\sin t$, 给定常数 $c_1,c_2\in\mathbb{R}$, $t\in(-\infty,\infty)$, 是二阶微分方程

$$y''+y=0$$

的解. 注意到上述二阶微分方程的解中含有两个任意常数 c_1,c_2.

设 $\Lambda\subset\mathbb{R}^n$ 是一开区域, $\boldsymbol{c}=(c_1,\cdots,c_n)\in\Lambda$. 含有 n 个常数的函数 $x=\phi(t,\boldsymbol{c}),(t,\boldsymbol{c})\in(t_1,t_2)\times\Lambda$, 称为微分方程 (1.1.1) 的**通解**, 如果 ϕ 是方程 (1.1.1) 的解, 且 n 个常数是任意的或独立的, 即 $\phi,\phi',\cdots,\phi^{(n-1)}$ 关于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的 Jacobi 行列式

$$\frac{D(\phi,\phi',\cdots,\phi^{(n-1)})}{D(c_1,c_2,\cdots,c_n)}:=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial\phi}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\phi}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\phi}{\partial c_n}\\ \dfrac{\partial\phi'}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\phi'}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\phi'}{\partial c_n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \dfrac{\partial\phi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \dfrac{\partial\phi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \dfrac{\partial\phi^{(n-1)}}{\partial c_n}\end{vmatrix}\neq 0,\quad (t,\boldsymbol{c})\in(t_1,t_2)\times\Lambda.$$

微分方程 (1.1.1) 的不包含在通解中的解称为**特解**.

注 粗略地说, n 阶微分方程通解中 n 个常数的任意性在某种意义下刻画了通解是由 n 个线性无关的解或函数无关的解构成的. 读者学完第 3 章高阶微分方程与微分方程组的关系, 以及第 4 章高阶线性微分方程 (组) 通解的结构理论后将有更加深刻的认识.

例

(1) 容易验证上述例子中的两个常数 c_1,c_2 是任意的. 直观上讲, 函数 $x=\phi(t,c_1,\cdots,c_n)$ 中的常数是任意的, 是指它们无法合并. 例如

$$x=c_1+c_2t+c_3t^2$$

中的三个常数 c_1,c_2,c_3 是任意的, 因为它们无法合并. 本质上, 三个函数 1, t, t^2 是线性无关的. 而

$$x=c_1+c_2t+c_3(1+t)$$

中的常数不是任意的, 因为 x 的表达式可写成 $x=(c_1+c_3)+(c_2+c_3)t$, 故本质上只有两个任意常数. 事实上, 函数 $1, t, 1+t$ 是线性相关的.

(2) 微分方程

$$\frac{dy}{dx}=y^2,$$

有通解 $y=-(x+c)^{-1}$, 其中 c 是任意常数. 显然, $y=0$ 也是方程的解, 但它不包含在通解之中, 即 $y=0$ 是方程的一个特解. 该例表明通解未必包含微分方程的所有解.

n 阶微分方程 (1.1.1) 或 (1.1.2) 满足*初始条件*

$$x(t_0)=x_0,\ x'(t_0)=x_1,\ \cdots,\ x^{(n-1)}(t_0)=x_{n-1}, \tag{1.1.3}$$

称为**初值问题**, 其中 $t_0\in\mathbb{R}$ 称为*初始时间*, $(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})\in\mathbb{R}^n$ 称为*初始值*或简称*初值*. 微分方程 (1.1.1) 或 (1.1.2) 满足初始条件 (1.1.3) 的解称为**初值问题的解**.

附注

- n 阶微分方程初值问题中的初始条件是由 n 个条件确定的.
- 当初始值 $(x_0,x_1,\cdots,x_{n-1})$ 属于向量函数 $(\phi(t,\boldsymbol{c}),\phi'(t,\boldsymbol{c}),\cdots,\phi^{(n-1)}(t,\boldsymbol{c}))$, $(t,\boldsymbol{c})\in\{t_0\}\times\Lambda$ 的值域时, 初值问题的解包含在通解中. 这是因为存在 $\boldsymbol{c}_0\in\Lambda$, 使得 $\phi(t,\boldsymbol{c}_0)$ 就是初值问题的解. 例如 $y=ce^x$ 是微分方程 $y'=y$ 在 $\mathbb{R}$ 上的通解. 它包含了方程所有的解.
- 初值问题广泛出现在实际应用中. 例如自由落体的运动规律由初始位置和初始速度完全确定.

1.1.2　微分方程和解的例子

(1) 二阶微分方程

$$x''(t)=g,\quad g\in\mathbb{R}$$

有通解

$$x=\phi(t,c_1,c_2)=\frac{1}{2}gt^2+c_1t+c_2,\quad t\in\mathbb{R},$$

其中 c_1 和 c_2 是任意常数.

(2) 三阶微分方程

$$x'''(t)+x''(t)-x'(t)+15x(t)=0$$

有通解

$$x=\phi(t,c_1,c_2,c_3)=c_1e^{-3t}+c_2e^t\cos(2t)+c_3e^t\sin(2t),\quad t\in\mathbb{R},$$

其中 c_1, c_2, c_3 是任意常数.