数学机械化丛书

12

几何定理机器证明的几何不变量方法

张景中 高小山 周咸青 著

科学出版社

数学机械化丛书　12

几何定理机器证明的几何不变量方法

张景中　高小山　周咸青　著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书系统介绍了几何定理机器证明的几何不变量方法. 主要包括：基于面积与勾股差等几何不变量的面积法、基于体积与勾股差等几何不变量的体积法以及基于向量计算的向量方法. 与基于坐标的几何定理机器证明方法(如吴(文俊)方法与 Groebner 基方法)相比, 基于几何不变量的几何定理机器证明方法可以产生较为简洁与可读的证明, 从而提高机器证明的质量. 作为应用, 该方法可以用来简化工程技术领域(如机器人、机构学、计算机视觉等)中出现的几何计算问题. 本书还介绍了几何定理机器证明的演绎数据库方法以及面积法在非欧几何中的推广.

本书可以作为数学、计算机科学以及相关工程领域的科研人员、教师以及研究生了解几何定理机器证明几何不变量方法的参考书, 也可以作为高等院校与中学教师进行几何教育改革的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

几何定理机器证明的几何不变量方法/张景中, 高小山, 周咸青著. —北京: 科学出版社, 2015.4

(数学机械化丛书; 12)

ISBN 978-7-03-044066

Ⅰ. ①几… Ⅱ. ①张… ②高… ③周… Ⅲ. ①几何–定理证明–机器证明 Ⅳ. ①O18

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2015) 第 072958 号

责任编辑: 赵彦超／责任校对: 钟　洋
责任印制: 肖　兴／封面设计: 陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂 印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
2015 年 4 月第　一　版　开本: 720 × 1000 1/16
2015 年 4 月第一次印刷　印张: 21
字数: 420 000

定价: 128.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

“数学机械化丛书”前言 ①

十六七世纪以来, 人类历史上经历了一场史无前例的技术革命, 出现了各种类型的机器, 取代各种形式的体力劳动, 使人类进入一个新时代. 几百年后的今天, 电子计算机已可开始有条件地代替一部分特定的脑力劳动, 因而人类已面临另一场更宏伟的技术革命, 处在又一个新时代的前夕. 数学是一种典型的脑力劳动, 它在这一场新的技术革命中, 无疑将扮演一个重要的角色. 为了了解数学在当前这场革命中所扮演的角色, 就应对机器的作用, 以及作为数学的脑力劳动的方式, 进行一定的分析.

1. 什么是数学的机械化

不论是机器代替体力劳动, 或是计算机代替某种脑力劳动, 其所以成为可能, 关键在于所需代替的劳动已经“机械化”, 也就是说已实现了刻板化或规格化. 正因为割麦、刈草、纺纱、织布的动作已经是机械化刻板化了的, 因而可据此造出割麦机、刈草机、纺纱机、织布机来. 也正因为加减乘除开方等运算这一类脑力劳动, 几千年来就已经是机械地刻板地进行的, 才有可能使得 17 世纪的法国数学家 Pascal, 利用齿轮传动造出了第一台机械计算机 —— 加法机, 并由 Leibniz 改进成为也能进行乘法的机器. 数学问题的机械化, 就要求在运算或证明过程中, 每前进一步之后, 都有一个确定的、必须选择的下一步, 这样沿着一条有规律的、刻板的道路, 一直达到结论.

在中小学数学的范围里, 就有着不少已经机械化了的课题. 除了四则、开方等运算外, 解线性联立方程组就是一个很好的例子. 在中学用的数学课本中, 往往介绍解线性方程组的各种“消去法”, 其求解过程是一个按一定程序进行的计算过程, 也就是一种机械的、刻板的过程. 根据这一过程编成程序, 由电子计算机付诸实施, 就可以不仅机器化而且达到自动化, 在几分钟甚至几秒钟之内求出一个未知数多至上百个的线性方程组的解答来, 这在手工计算几乎是不可能的. 如果用手工计算,

① 20 世纪七八十年代之交, 我尝试用计算机证明几何定理取得成功, 由此提出了数学机械化的设想. 先后在一些通俗报告与写作中, 解释数学机械化的意义与前景, 例如 1978 年发表于《自然辩证法通讯》的“数学机械化问题”以及 1980 年发表于《百科知识》的“数学的机械化”. 二文都重载于 1995 年由山东教育出版社出版的《吴文俊论数学机械化》一书. 经过 20 多年众多学者的努力, 数学机械化在各个方面都取得了丰富多彩的成就, 并已出版了多种专著, 汇集成现在的数学机械化丛书. 现据 1980 年的《百科知识》的“数学的机械化”一文, 稍加修改并作增补, 以代丛书前言.

即使是解只有三四个未知数的方程组, 也将是繁琐而令人厌烦的. 现代化的国防、经济建设中, 大量出现的例如网络一类的问题, 往往可归结为求解很多未知数的线性方程组. 这使得已经机械化了的线性方程解法在四个现代化中起着一种重要作用.

即使是不专门研究数学的人们, 也大都知道, 数学的脑力劳动有两种主要形式: 数值计算与定理证明 (或许还应包括公式推导, 但这终究是次要的). 著名的数理逻辑学家美国洛克菲勒大学教授王浩先生在一篇有名的《向机械化数学前进》的文章中, 曾列举了这两种数学脑力劳动的若干不同之点. 我们可以简略而概括地把它们对比一下:

计算	证明
易	难
繁	简
刻板	灵活
枯燥	美妙

计算, 如已经提到过的加、减、乘、除、开方与解线性方程组, 其所以虽繁而易, 根本原因正在于它已经机械化. 而证明的巧而难, 是大家都深有体会的, 其根本原因也正在于它并没有机械化. 例如, 我们在中学初等几何定理的证明中, 就经常要依靠诸如直观、洞察、经验以及其他一些模糊不清的原则, 去寻找捷径.

2. 从证明的机械化到机器证明

一个值得提出的问题是: 定理的证明是不是也能像计算那样机械化, 因而把巧而难的证明, 化为计算那样虽繁而易的劳动呢? 事实上, 这一证明机械化的设想, 并不始自今日, 它早就为 17 世纪时的大哲学家、大思想家和大数学家 Descartes 和 Leibniz 所具有. 只是直到 19 世纪末, Hilbert(德国数学家, 1862~1943) 等创立并发展了数理逻辑以来, 这一设想才有了明确的数学形式. 又由于 20 世纪 40 年代电子计算机的出现, 才使这一设想的实现有了现实可能性.

从 20 世纪二三十年代以来, 数理逻辑学家们对于定理证明机械化的可能性进行了大量的理论探讨, 他们的结果大都是否定的. 例如 Gödel 等的一条著名定理就说, 即使看来最简单的初等数论这一范围, 它的定理证明的机械化也是不可能的. 另一方面, 1950 年波兰数学家 Tarski 则证明了初等几何 (以及初等代数) 这一范围的定理证明, 却是可以机械化的. 只是 Tarski 的结果近于例外, 在初等几何及初等代数以外的大量结果都是反面的, 即机械化是不可能的. 1956 年以来美国开始了利用电子计算机做证明定理的尝试. 1959 年王浩先生设计了一个机械化方法, 用计算机证明了 Russell 等著的《数学原理》这一经典著作中的几百条定理,

只用了 9 分钟, 在数学与数理逻辑学界引起了轰动. 一时间, 机器证明的前景似乎非常乐观. 例如 1958 年时就有人曾经预测: 在 10 年之内计算机将发现并证明一个重要的数学新定理. 还有人认为, 如果这样, 则不仅许多著名哲学家与数学家如 Peano、Whitehead、Russell、Hilbert 以及 Turing 等人的梦想得以实现, 而且计算将成为科学的皇后, 人类的主人!

然而, 事情的发展却并不如预期那样美好. 尽管在 1976 年, 美国的 Hanker 等人, 在高速计算机上用了 1200 小时的计算时间, 解决了数学家们 100 多年来所未能解决的一个著名难题 —— 四色问题, 因此而轰动一时,但是, 这只能说明计算机作为定理证明的辅助工具有着巨大潜力, 还不能认为这样的证明就是一种真正的机器证明. 用王浩先生的说法, Hanker 等关于四色定理的证明是一种使用计算机的特例机证, 它只适用于四色这一特殊的定理, 这与所谓基础机器证明之能适用于一类定理者有别. 后者才真正体现了机械化定理证明, 进而实现机器证明的实质. 另一方面, 在真正的机械化证明方面, 虽然 Tarski 在理论上早已证明了初等几何的定理证明是能机械化的, 还提出了据以造判定机也即是证明机的设想, 但实际上他的机械化方法非常繁, 繁到不可收拾, 因而远远不是切实可行的.1976 年时, 美国做了许多在计算机上证明定理的实验, 在 Tarski 的初等几何范围内, 用计算机所能证明的只是一些近于同义反复的“儿戏式”的“定理”. 因此, 有些专家曾经发出过这样悲观的论调: 如果专依靠机器, 则再过 100 年也未必能证明出多少有意义的新定理来.

3. 一条切实可行的道路

1976 年冬, 我们开始了定理证明机械化的研究.1977 年春取得了初步成果, 证明初等几何主要一类定理的证明可以机械化. 在理论上说来, 我们的结果已包括在 Tarski 的定理之中. 但与 Tarski 的结果不同, 我们的机械化方法是切实可行的, 即使用手算, 依据机械化的方法逐步进行, 虽然繁复, 也可以证明一些艰深的定理.

我们的方法主要分两步, 第一步是引进坐标, 然后把需证定理中的假设与终结部分都用坐标间的代数关系来表示. 我们所考虑的定理局限于这些代数关系都是多项式等式关系的范围, 例如平行、垂直、相交、距离等关系都是如此. 这一步可以叫做几何的代数化. 第二步是通过代表假设的多项式关系把终结多项式中的坐标逐个消去, 如果消去的结果为零, 即表明定理正确, 否则再作进一步检查. 这一步完全是代数的,即用多项式的消元法来验证.

上述两步都可以机械与刻板地进行. 根据我们的机械化方法编成程序, 以在计算机上实现机器证明, 并无实质上的困难. 事实上数学所某些同志以及国外的王浩先生都曾在计算机上试行过. 我们自己也曾在国产的长城 203 台式机上证明了像 Simson 线那样不算简单的定理.1978 年初我们又证明了初等微分几何中主要的一

类定理证明也可以机械化. 而且这种机械化方法也是切实可行的, 并据此用手算证明了不算简单的一些定理.

从我们的工作中可以看出, 定理的机械化证明, 往往极度繁复, 与通常既简且妙的证明形成对照, 这种以量的复杂来换取质的困难, 正是利用计算机所需要的.

在电子计算机如此发展的今天, 把我们的机械化方法在计算机上实现不仅不难, 而且有一台微型的台式机也就够了. 就像我们曾经使用过的长城 203, 它的存数最多只能到 234 个 10 进位的 12 位数, 就已能用以证明 Simson 线那样的定理. 随着超大规模集成电路与其他技术的出现与改进, 微型机将愈来愈小型化而内存却愈来愈大, 功能愈来愈多, 自动化的程度也愈来愈高. 进入 21 世纪以后, 这一类方便的小型机器将为广大群众普遍使用. 它们不仅将成为证明一些不很简单的定理的武器, 而且还可用以发现并证明一些艰深的定理, 而这种定理的发现与证明, 在数学研究手工业式的过去, 将是不可想象的. 这里我们应该着重指出, 我们并不鼓励以后人们将使用计算机来证明甚至发现一些有趣的几何定理. 恰恰相反, 我们希望人们不再从事这种虽然有趣却即是对数学甚至几何学本身也已意义不大的工作, 而把自己从这种工作中解放出来, 把自己的聪明才智与创造能力贯注到更有意义的脑力劳动上去.

还应该指出, 目前我们所能证明的定理, 局限于已经发现的机械化方法的范围, 例如初等几何与初等微分几何之内. 而如何超出与扩大这些机械化的范围, 则是今后需要探索的长期的理论性工作.

4. 历史的启示与中国古代数学

我们发现几何定理证明的机械化方法是在 1976 至 1977 年之间. 约在两年之后我们发现早在 1899 年出版的 Hilbert 的经典名著《几何基础》中, 就有着一条真正的正面的机械化定理: 初等几何中只涉及从属与平行关系的定理证明可以机械化. 当然, 原来的叙述并不是以机械化的语言来表达的, 也许就连 Hilbert 本人也并没有对这一定理的机械化意义有明确的认识, 自然更不见得有其他人提到过这一定理的机械化内容. Hilbert 是以公理化的典范而著称于世的, 但我认为, 该书更重要处, 是在于提供了一条从公理化出发, 通过代数化以到达机械化的道路. 自然, 处于 Hilbert 以及其后数学的一张纸一支笔的手工作业时代里, 公理化的思想与方法得到足够的重视与充分的发展, 而机械化的方向与意义受到数学家的忽视是完全可以理解的. 但电子计算机已日益普及, 因而繁琐而重复的计算已成为不足道的事情, 机械化的思想应比公理化思想受到更大重视, 似乎是合乎实际的.

其次应该着重指出, 我们从事机械化定理证明工作获得成果之前, 对 Tarski 的已有工作并无接触, 更没有想到 Hilbert 的《几何基础》会与机械化有任何关系. 我们是在中国古代数学的启发之下提出问题并想出解决办法来的.

说起来道理也很简单：中国的古代数学基本上是一种机械化的数学. 四则运算与开方的机械化算法由来已久. 汉初完成的《九章算术》中, 对开平、立方与解线性联立方程组的机械化过程, 都有详细说明. 宋代更发展到高次代数方程求数值解的机械化算法.

总之, 各个数学领域都有定理证明的问题, 并不限于初等几何或微分几何. 这种定理证明肇始于古希腊的 Euclid 传统, 现已成为近代纯粹数学或核心数学的主流. 与之相异, 中国的古代学者重视的是各种问题特别是来自实际要求的具体问题的解决. 各种问题的已知数据与要求的数据之间, 很自然地往往以多项式方程的形式出现. 因之, 多项式方程的求解问题, 也就自然成为中国古代数学家研究的中心问题. 从秦汉以来, 所研究的方程由简到繁, 不断有所前进, 有所创新. 到宋元时期, 更出现了一个思想与方法的飞跃：天元术的创立.

“天元术”到元代朱世杰时又发展成四元术, 所引入的天元、地元、人元、物元实际上相当于近代的未知元或未知数. 将这些未知元作为通常的已知数那样加减乘除, 就可得到与近代多项式与有理函数相当的概念与相应的表达形式与运算法则. 一些几何性质与关系很容易转化成这种多项式或有理函数的形式及其关系. 这使得过去依题意列方程这种无法可循需要高度技巧的工作从此变成轻而易举. 朱世杰 1303 年的《四元玉鉴》又给出了解任意多至四个未知元的多项式方程组的方法. 这里限于 4 个未知元只是由于所使用的计算工具 (算筹和算板) 的限制. 实质上他解方程的思想路线与方法完全可以适用于任意多的未知元.

不问可知, 在当时的具体条件下, 宋世杰的方法有许多缺陷. 首先, 当时还没有复数的概念, 因之宋世杰往往限于求出 (正) 实值. 这无可厚非, 甚至在 17 世纪 Descartes 的时代也还往往如此. 但此外宋世杰在方法上也未臻完善. 尽管如此, 宋世杰的思想路线与方法步骤是完全正确的, 我们在 20 世纪 70 年代之末, 遵循宋世杰的思想与方法的基本实质, 采用美国数学家 J. F. Ritt 在 1932, 1950 年关于微分方程代数研究书中所提供的某些技术, 得出了解任意复多项式方程组的一般算法, 并给出了全部复数解的具体表达形式. 此后又得出了实系数时求实解的方法, 为重要的优化问题提供了一个具体的方法.

由于多种问题往往自然导致多项式方程组的求解, 因而我们解方程的一般方法可被应用于形形式式的问题. 这些问题可以来自数学自身, 也可以来自其他自然科学或工程技术. 在本丛书的第一本书, 吴文俊的《数学机械化》一书中, 可以看到这些应用的实例. 在工程技术方面的应用, 在本丛书中已有高小山的《几何自动作图与智能 CAD》与陈发来和冯玉瑜的《代数曲面拼接》两本专著. 上述解多项式方程组的一般方法已推广至代微分方程的情形. 许多应用以及相应论著正在酝酿之中.

5. 未来的技术革命与时代的使命

宋元时代天元术与四元术的创造, 把许多问题特别是几何问题转化成代数方程与方程组的求解问题. 这一方法用于几何可称为几何的代数化.12 世纪的刘益将新法与“古法”比较, 称“省功数倍”, 这可以说是减轻脑力劳动使数学走上机械化的道路的一项伟大的成就.

与天元术的创造相件, 宋元时代的数学又引进了相当于现代多项式的概念, 建立了多项式的运算法则和消元法的有关代数工具, 使几何代数化的方法得到了有系统的发展, 见于宋元时代幸以保存至今的杨辉、李冶、朱世杰的许多著作之中. 几何的代数化是解析几何的前身, 这些创造使我国古代数学达到了又一个高峰. 可以说, 当时我国已到达了解析几何与微积分的大门, 具备了创立这些数学关键领域的条件, 但是各种原因使我们数学的雄伟步伐就在这些大门之前停顿下来. 几百年的停顿, 使我们这个古代的数学大国在近代变成了数学上的纯粹入超国家. 然而, 我国古代机械化与代数化的光辉思想和伟大成就是无法磨灭的. 本人关于数学机械化的研究工作, 就是在这些思想与成就启发之下的产物, 它是我国自《九章算术》以迄宋元时期数学的直接继承.

恩格斯曾经指出, 枪炮的出现消除了体力上的差别, 使中世纪的骑士阶级从此销声匿迹, 为欧洲从封建时代进入到资本主义时代准备了条件. 近年有些计算机科学家指出, 个人用计算机的出现, 其冲击作用可与枪炮的出现相比. 枪炮使人们在体力上难分强弱, 而个人用计算机将使人们在智力上难分聪明愚鲁. 又有人对数学的未来提出看法, 认为计算机的出现, 将使数学现在一张纸一支笔的方法, 在历史的长河中, 无异于石器时代的手工方法. 今天的数学家们, 不得不面对计算机的挑战, 但是, 也不必妄自菲薄. 大量繁复的事情交给计算机去做了, 人脑将仍然从事富有创造性的劳动.

我国在体力劳动的机械化革命中曾经掉队, 以致造成现在的落后状态. 在当前新的一场脑力劳动的机械化革命中, 我们不能重蹈覆辙. 数学是一种典型的脑力劳动, 它的机械化有着许多其他类型脑力劳动所不及的有利条件. 它的发扬与实现对我国的数学家是一种时代的使命. 我国古代数学的光辉, 鼓舞着我们为实现数学的机械化, 在某种意义上也可以说是真正的现代化而勇往直前.

吴文俊

2002 年 6 月于北京

序　言

数学定理证明机械化的思想由来已久，一些原始想法可以追溯到 G. Leibniz 和 R. Descartes. Descartes 认为，代数可以将数学机械化，使思维变得简单，不再需要繁复的脑力劳动，数学创造也极可能实现自动化. 甚至逻辑原理和方法也可以被符号化，进而所有的推理过程都实现机械化. Leibniz 发展了 Descartes 的想法，并提出了一个更加雄心勃勃的计划. Leibniz 提出，应该发展一种广义计算，这种计算可以使人们在所有的领域都能机械地、不费力地通过一种像算术与代数那样的演算来达到精确的推理. 这种方法将"使真理昭然若揭，颠扑不破，就像是建立在机械化的基础之上".

Descartes 和 Leibniz 提出的想法是比较笼统的. 19 世纪中叶，G. Boole 创立了现在所说的 Boole 代数，把思维在某种程度上形式化，用代数形式加以描述. 这一工作比起 Leibniz 和 Descartes 的想法至少有了某种程度的数学化. 20 世纪 20 年代，D. Hilbert 正式提出了所谓的"Hilbert 计划"，试图通过公理化建立数学的严格基础. 特别是 Hilbert 在其计划中提出了"判定性问题"，即是否存在一个算法"机械化"地判定每个数学分支中所有命题的正确性.

1931 年，奥地利数学家 K. Gödel 证明，即使是 Peano 算术这样简单的数学系统，也存在定理，尽管我们知道是对的，却不能够证出来. Hilbert 希望证明数学是圆满无缺的，是相容的，是可以判断的. Gödel 的结论指出，Hilbert 计划太过理想，对于很多数学学科，Hilbert 的数学公理化计划无法实现.

Hilbert 计划虽然不能完整实现，但对数学与科学发展的影响是巨大的. 作为这一计划的直接结果，产生了计算机科学与机械化数学两个重要领域.

英国数学家 A. Turing 因为提出计算理论的基本概念 Turing 机，被誉为现代计算机科学奠基人之一. Turing 这一研究的起因是希望回答 Hilbert 的可判定性问题. 为了回答可判定性问题，首先需要明确可以用于判断的计算手段. 为此，Turing 改进了 Gödel 的想法，提出著名的 Turing 机. 计算机科学，特别是计算理论主要源于 Turing 的这一工作.

Gödel 的否定性的结果影响巨大，以致于形成了数学不可以机械化的固定思维. 实际上恰恰相反，与 Gödel 的著名结果几乎同时，法国数学家 J. Herbrand 在 1931 年发表了题为《论算术的相容性》的论文，创立了一种证明定理的算法. 这种算法提供了一种进行推理的途径，如果一个命题存在一个证明，则算法在有限的步骤之内结束并给出命题的证明. 这一算法是半判定性的，即算法对于某些输入可能不中止，从而不能得出结论. 结合 Gödel 的结果我们可以看到，Herbrand 实际

上已经给出了 Hilbert 判定问题理论上的完整解答. 由 Gödel 的结果, 有些定理是不能够由公理推出的. 此时, Herbrand 的算法将不中止. 其余的定理都可以由公理推出, 而对于这些定理, Herbrand 的算法将给出证明. 那么, 数学定理的机器证明问题是否解决了? 答案当然是否定的. Herbrand 算法的主要问题在于其计算复杂度是指数的. 虽然理论上可行, 但实际上不能用于在计算机上证明非平凡的数学定理.

真正在计算机上自动证明定理始于 20 世纪 50 年代中期. 一些计算机科学家, 包括 Newell, Simon, Shaw 等, 创立了人工智能学科, 尝试利用计算机进行某种脑力劳动, 特别地, 证明数学定理. 由此成长起来一门新的学问 —— 自动推理或机器证明. 自动推理的主流工作是对 Herbrand 算法的改进, 希望通过发展各种技巧简化 Herbrand 算法的计算复杂度. 但是, 一般机器证明算法的发展并不理想, 定理证明依然是一个计算复杂度非常高的问题. 机器证明一个成功的方向是各个具体数学领域的机器证明. 这里的基本想法是: Herbrand 的方法太广, 以致于不够有效, 数学机械化正确之路应该是在数学的各个学科选择一类有意义的问题, 发展统一求解的高效算法, 逐步实现数学的机械化. 近年来蓬勃发展的符号计算、计算代数几何、计算数论、计算群论、计算拓扑、符号分析等新兴学科即属于机械化数学领域.

几何定理证明是人工智能创始时即最早尝试的数学问题, 主要原因是几何推理自古被认为是严格推理的典范, 而且一般认为几何定理的证明技巧性很强, 是很典型的脑力劳动. 20 世纪 50 年代末, IBM 公司的 Gelernter 小组开发了 "几何定理证明机"(GTPM), 成为人工智能的经典工作之一. GTPM 采用后推法加深度优先的搜索证明方法, 并引入了基于几何图形推理的概念, 产生了广泛影响. 但是, GTPM 以及以后提出的基于人工智能搜索法所开发的软件效率不高, 只能证明非常简单的几何定理. 1950 年, 波兰数学家 A. Tarski 证明初等代数和初等几何定理可以用一种代数算法来证明或否定, 即初等几何是可以判定的. 但是 Tarski 算法的复杂度太高, 以致于不能用来证明有意义的定理. 吴文俊于 1978 年提出了几何定理机器证明的代数方法, 在几何定理机器证明方面取得突破. 在颁发给他 Herbrand 自动推理杰出贡献奖的授奖词中讲到: "吴继续深化、推广他的方法, 并将这一方法用于一系列几何, 包括平面几何、微分几何、非欧几何、仿射几何与非线性几何. 不仅限于几何, 吴还将他的方法用于由 Kepler 定律推出 Newton 定律, 用于解决化学平衡问题与求解机器人方面的问题. 吴的工作将几何定理证明从自动推理的一个不太成功的领域变为最成功的领域之一."

几何定理机器证明的吴方法的主要想法是通过坐标化, 将几何问题变为代数问题, 再应用消去理论解决相应的代数问题. 这一方法有如下两个问题: 首先, 由于证明的步骤由多项式运算构成, 因此产生的证明是没有几何意义的. 其次, 对于很多

几何定理, 需要较大规模的多项式计算, 因此产生的证明是不可读的. 本书将介绍针对这些问题提出的几何不变量方法, 主要包括: 基于面积与勾股差等几何不变量的面积法、基于体积与勾股差等几何不变量的体积法以及基于向量计算的向量方法. 与基于坐标的几何定理机器证明方法相比, 基于几何不变量的几何定理机器证明方法可以产生较为简洁与可读的证明, 从而提高机器证明的质量. 作为应用, 该方法可以用来简化工程技术领域, 如机器人、机构学、计算机视觉等领域中出现的几何问题. 本书还介绍了几何定理机器证明的演绎数据库方法以及面积法在非欧几何定理中的推广.

借助面积证明几何定理的想法源远流长, 本书作者之一张景中在 20 世纪 70~80 年代系统研究了如何借助面积证明几何定理, 形成了系统的方法. 几何定理机器证明的完整算法由张景中、高小山、周咸青在 20 世纪 90 年代初提出并取得极大成功. 对于大部分几何定理, 这一方法可以生成的简短可读证明, 在一定意义下具有基于坐标的吴方法与基于搜索的人工智能方法两者的优点, 且避免了其缺点. 用面积法证明几何定理的基本步骤是使用关于面积等几何不变量的基本命题, 从几何命题结论的表达式中消点. 当结论中的所有点被消去后, 命题的结论成为一个关于某些独立变量的表达式, 于是结论成立与否就不难判断了. 因此, 面积法的主要内容是如何在几何不变量中消去点, 即消点法.

第 1 章简要介绍了几何定理机器证明的一些主要工作.

第 2 章介绍面积法的基本形式, 即只使用面积与相同方向上的线段比两种几何不变量证明几何定理, 这一方法适用于仿射几何的定理证明.

第 3 章引入了勾股差这一几何不变量来描述垂直关系, 从而给出了完整的用于平面几何定理证明的面积法.

第 4 章介绍几何定理机器证明的演绎数据库方法. 前面提到, 过去使用的基于搜索法的几何定理证明器效率都不高, 主要原因是所谓搜索空间爆炸问题, 即在证明过程中很快就产生大量数据以致于证明无法进行下去. 我们通过引入新的几何公理与结构数据库的概念, 在很大程度上克服了几何定理证明中搜索空间爆炸问题, 发展了基于前推法的高效几何定理证明器. 通过使用一些新的几何公理, 例如关于全角的使用, 有效缩短了几何定理证明的长度. 另一方面, 结构数据库的使用使得同一问题的搜索空间平均缩小了 1000 倍. 两者结合, 使得基于搜索的几何定理证明向前迈进了一大步. 这一方法还可以用来生成一题多解与几何定理的最短证明. 应该指出, 我们最初研究演绎数据库方法的原因是面积法需要借助数据库中的几何信息进行计算与化简.

第 5~7 章进一步推广了面积法. 第 5 章主要发展了体积法, 用于立体几何的定理证明. 第 6 章将面积法推广到了非欧几何定理的机器证明. 我们将常用的九种平面几何归结为三类, 并对每一类给出了相应的面积法. 第 7 章则将面积法推广到

了一般的度量几何.

面积法的出现为几何定理机器证明的研究注入了新的活力, 导致了很多相关的研究, 我们将其中部分工作列在本书后面的参考文献中, 供感兴趣的读者参考.

张景中　高小山　周咸青

2014 年 11 月 18 日

目　　录