高等院校通识教育“十二五”规划教材

高等数学学习指南（上册）

■ 赵文才 郑艳琳 刘洪霞 秦婧 主编
■ 路荣武 包云霞 李晶晶 副主编

人民邮电出版社
POSTS & TELECOM PRESS

高等院校通识教育“十二五”规划教材

高等数学学习指南

（上册）

赵文才 郑艳琳 刘洪霞 秦婧 主 编
路荣武 包云霞 李晶晶 副主编

人民邮电出版社
北京

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指南. 上册 / 赵文才等主编. -- 北京:
人民邮电出版社, 2014.9
高等院校通识教育“十二五”规划教材
ISBN 978-7-115-36518-7

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①赵… Ⅲ. ①高等数学－高等学校－
教学参考资料 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第194426号

内 容 提 要

本套教材是按照全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的基本要求编写的，全套教材共分 12 章，次序安排与同济大学《高等数学》（第六版）相一致，每一节都包含学习目标、内容提要、典型例题与方法、教材习题解答 4 部分内容；每一章的最后是本章综合例题解析与同步测试题。

本书适合作为高等院校“高等数学”相关课程的辅导教材，也可供自学者阅读参考。

◆ 主　　编　赵文才　郑艳琳　刘洪霞　秦　婧
副 主 编　路荣武　包云霞　李晶晶
责任编辑　王亚娜
执行编辑　肖　稳
责任印制　张佳莹　杨林杰

◆ 人民邮电出版社出版发行　北京市丰台区成寿寺路 11 号
邮编　100164　电子邮件　315@ptpress.com.cn
网址　http://www.ptpress.com.cn
北京隆昌伟业印刷有限公司印刷

◆ 开本：787×1092　1/16
印张：17.5　2014 年 9 月第 1 版
字数：412 千字　2014 年 9 月北京第 1 次印刷

定价：30.00 元

读者服务热线：(010)81055256　印装质量热线：(010)81055316
反盗版热线：(010)81055315

前言

高等数学是我国高等院校中的一门重要理论基础课。它不仅是理工科各专业的基础和工具，更是对培养学生的创新实践能力和科学精神具有重要作用，同时也是全国硕士研究生入学考试的统考科目。与初等数学相比，高等数学的理论更加抽象，逻辑推理更加严密。初学者往往对高等数学的概念和理论感到抽象难懂，解决问题缺少思路和方法。我们编写本书的目的就是帮助读者明确学习要求，理清知识脉络，启发解题思路和掌握计算方法，提高综合运用所学知识分析问题和解决问题的能力，为后继课程的学习和将来的考研打下坚实的基础。

本套教材是按照全国硕士研究生入学统一考试数学考试大纲的基本要求编写的，也是编者多年从事高等数学教学和考研辅导工作的结晶。全套教材共分 12 章，次序安排与同济大学《高等数学》(第六版)相一致，每一节包含学习目标、内容提要、典型例题与方法、教材习题解答 4 部分内容；每一章的最后是本章综合例题解析与同步测试题。

一、学习目标：旨在帮助读者了解考研大纲的具体要求，明确本节的重点、考点及应掌握的程度。

二、内容提要：主要对本节涉及的基本概念、基本定理进行系统梳理、凝练与归纳，便于读者回顾教材内容、掌握基本知识点。

三、典型例题与方法：将本节重点、难点、考点归结为基本题型，针对每一种基本题型给出丰富的例题，对例题进行详细的分析与解答，并对学习过程中易犯的错误进行分析，强调知识的细节与解题中注意的问题。

四、本章综合例题解析：选题强调综合性，力求涵盖各类题型，并有部分考研真题，着重分析解决问题的思路和方法，部分题目给出多种解法，以开拓思路，使读者全面理解和掌握本章的基本概念、基本理论和解决问题的基本方法。

五、同步测试题：每章均配有同步测试题及解答，方便读者自测。

六、习题选解：对配套教材同济大学《高等数学》(第六版)的部分较难习题给出详细解答。

作为高等数学这门课程的学习指南，本套教材在知识的归纳和例题的分析过程中，坚持由浅入深、循序渐进的原则，力求阐明重点，突出解题思路和方法，切合不同学习者的实际需要。

在编写过程中，我们参考了同济大学数学系编写的《高等数学》等许多书籍及文献，在此一并表示衷心的感谢。

由于编者水平有限，书中谬误之处在所难免，恳请广大读者批评指正。

编　者

2014 年 5 月

目录

第一章

函数与极限

第一节　映射与函数

1.1　学习目标

理解函数的概念，掌握函数的表示法，能够建立应用问题的函数关系；了解函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性；理解复合函数及分段函数的概念；了解反函数及隐函数的概念；掌握基本初等函数的性质及其图形，了解初等函数的概念．

1.2　内容提要

1．函数的概念

(1) 函数的定义

设数集 $D \subset R$，则称映射 $f: D \to R$ 为定义在 D 上的函数，通常简记为

$$y=f(x), x \in D.$$

其中 x 称为自变量，y 称为因变量，D 称为定义域，记作 D_f，即 $D_f=D$.

(2) 函数的两要素

构成函数的要素是定义域 D_f 及对应法则 f. 如果两个函数的定义域相同，对应法则也相同，那么这两个函数就是相同的，否则就是不同的．

(3) 函数的定义域

函数的定义域通常分为两种：具有实际意义的定义域和自然定义域．

(4) 单值函数和多值函数

在函数的定义中，对每个 $x \in D$，对应的函数值 y 总是唯一的，这样定义的函数称为单值函数．如果给定一个对应法则，按这个法则，对每个 $x \in D$，总有确定的 y 值与之对应，但这个函数值 y 不总是唯一的，称这种法则确定了一个多值函数．

(5) 函数的表示法

表示函数的主要方法有 3 种：表格法、图形法、解析法(公式法).

(6) 分段函数

在自变量的不同变化范围中,对应法则用不同式子来表示的函数称为分段函数.

2. 函数的几种特性

(1) 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,数集 $X\subset D$. 如果存在数 K_1,使对任一 $x\in X$,有 $f(x)\leqslant K_1$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界. 如果存在数 K_2,使对任一 $x\in X$,有 $f(x)\geqslant K_2$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界. 如果存在正数 M,使对任一 $x\in X$,有 $|f(x)|\leqslant M$,则称函数 $f(x)$ 在 X 上有界;如果这样的 M 不存在,则称函数 $f(x)$ 在 X 上无界.

(2) 函数的单调性

设函数 $y=f(x)$ 在区间 I 上有定义,x_1 及 x_2 为区间 I 上任意两点,且 $x_1<x_2$,如果恒有 $f(x_1)<f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上是单调增加的;如果恒有 $f(x_1)>f(x_2)$,则称 $f(x)$ 在 I 上是单调减少的. 单调增加和单调减少的函数统称为单调函数.

(3) 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称,如果在 D 上有 $f(-x)=f(x)$,则称 $f(x)$ 为偶函数;如果在 D 上有 $f(-x)=-f(x)$,则称 $f(x)$ 为奇函数.

(4) 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D,如果存在一个不为零的数 l,使得对于任一 $x\in D$,有 $(x\pm l)\in D$,且 $f(x+l)=f(x)$ 恒成立,则称 $f(x)$ 为周期函数,l 称为 $f(x)$ 的周期.

3. 反函数与复合函数

(1) 反函数

设函数 $f:D\to f(D)$ 是单射,则它存在逆映射

$$f^{-1}:f(D)\to D,$$

称此映射 f^{-1} 为函数 f 的反函数. 按习惯,$y=f(x),x\in D$ 的反函数记成

$$y=f^{-1}(x),x\in f(D).$$

(2) 复合函数

设函数 $y=f(u)$ 的定义域为 D_1,函数 $u=g(x)$ 在 D 上有定义且 $g(D)\subset D_1$,则由

$$y=f[g(x)],x\in D$$

确定的函数称为由函数 $u=g(x)$ 和函数 $y=f(u)$ 构成的复合函数,它的定义域为 D,变量 u 称为中间变量. 函数 g 与函数 f 构成的复合函数通常记为 $f\circ g$,即

$$(f\circ g)(x)=f[g(x)].$$

4. 函数的运算

设函数 $f(x),g(x)$ 的定义域分别为 $D_1,D_2,D=D_1\cap D_2\neq\varnothing$,则可以定义这两个函数的和、差、积、商的运算.

5. 初等函数

由常数和基本初等函数经过有限次的四则运算和有限次的函数复合步骤所构成并可用一个式子表示的函数,称为初等函数.

五大类基本初等函数是指幂函数、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数.

幂函数:　$y=x^{\mu}$($\mu\in\mathbf{R}$ 是常数);

指数函数:　$y=a^x$($a>0$ 且 $a\neq 1$);

对数函数：　$y=\log_a x\,(a>0$ 且 $a\neq 1)$，特别是当 $a=\mathrm{e}$ 时，记为 $y=\ln x$；

三角函数：　$y=\sin x, y=\cos x, y=\tan x, y=\cot x, y=\sec x, y=\csc x$；

反三角函数：$y=\arcsin x, y=\arccos x, y=\arctan x, y=\operatorname{arccot} x$.

1.3　典型例题与方法

基本题型Ⅰ：求复合函数的定义域

例 1　设 $y=f(x)$ 的定义域是 $(0,1]$，$\varphi(x)=1-\ln x$，则复合函数 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为______.

解　由 $0<\varphi(x)\leqslant 1$，即 $0<1-\ln x\leqslant 1$ 可知，$0\leqslant \ln x<1$，故 $y=f[\varphi(x)]$ 的定义域为 $[1,\mathrm{e})$.

例 2　设 $f(x)$ 的定义域是 $[0,1]$，则 $f(\cos x)$ 的定义域为______.

解　由 $0\leqslant\cos x\leqslant 1$ 可知，$2k\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2k\pi+\frac{\pi}{2}$，故 $f(\cos x)$ 的定义域为 $\left[2k\pi-\frac{\pi}{2}, 2k\pi+\frac{\pi}{2}\right]$.

【方法点击】　复合函数涉及一系列的初等函数，所以求复合函数的定义域时，要考察每个初等函数的定义域和值域，得到对应的不等式或不等式组，求解即可得到复合函数的定义域．在这个过程中特别要注意内层函数的值域不能超过外层函数的定义域．

基本题型Ⅱ：求函数表达式

例 3　设 $\forall x, f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$，则 $f(x)=$______.

解　在式 $f(x)+2f(1-x)=x^2-2x$ (1)中，用 $1-x$ 代替 x，可得 $f(1-x)+2f(x)=(1-x)^2-2(1-x)$ (2)，由 $2\times(2)-(1)$ 可得：$3f(x)=x^2+2x-2$，即 $f(x)=\frac{1}{3}x^2+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3}$.

基本题型Ⅲ：求反函数

例 4　求分段函数

$$y=\begin{cases} x^2, & -1\leqslant x<0, \\ \ln x, & 0<x\leqslant 1, \\ 2\,\mathrm{e}^{x-1}, & 1<x\leqslant 2. \end{cases}$$

的反函数．

解　当 $-1\leqslant x<0$ 时，$y=x^2\in(0,1]$，则有 $x=-\sqrt{y}, y\in(0,1]$；当 $0<x\leqslant 1$ 时，$y=\ln x\in(-\infty,0]$，则有 $x=\mathrm{e}^y, y\in(-\infty,0]$；当 $1<x\leqslant 2$ 时，$y=2\,\mathrm{e}^{x-1}\in(2,2\mathrm{e}]$，则有 $x=1+\ln\frac{y}{2}, y\in(2,2\mathrm{e}]$. 于是反函数为

$$y=\begin{cases} \mathrm{e}^x, & x\leqslant 0, \\ -\sqrt{x}, & 0<x\leqslant 1, \\ 1+\ln\frac{x}{2}, & 2<x\leqslant 2\mathrm{e}. \end{cases}$$

注意反函数的定义域

【方法点击】　反函数的求解方法比较固定，即由 $y=f(x)$ 解出 x 关于 y 的表达式，然后交换 x 与 y 的位置，即可求得反函数 $y=f^{-1}(x)$. 需要注意的是，反函数的定义域是原函

数的值域.

1.4 习题 1-1 解答

1. 设$A=(-\infty,-5)\cup(5,+\infty)$,$B=[-10,3)$,写出$A\cup B$,$A\cap B$,$A\backslash B$,及$A\backslash(A\backslash B)$的表达式.

解 $A\cup B=(-\infty,3)\cup(5,+\infty)$,$A\cap B=[-10,-5)$,

$A\backslash B=(-\infty,-10)\cup(5,+\infty)$,$A\backslash(A\backslash B)=[-10,-5)$.

2. 设A、B是任意的两个集合,证明对偶律:$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

证 设$x\in(A\cap B)^C\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in A^C$或$x\in B^C\Rightarrow x\in A^C\cup B^C$,所以$(A\cap B)^C\subseteq A^C\cup B^C$;

反之,设$x\in A^C\cup B^C\Rightarrow x\in A^C$或$x\in B^C\Rightarrow x\notin A\cap B\Rightarrow x\in(A\cap B)^C$,所以$A^C\cup B^C\subseteq(A\cap B)^C$.

于是$(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$.

3. 设映射$f:X\to Y$,$A\subset X$,$B\subset X$. 证明:

(1) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$;

(2) $f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

证 (1) 设$x\in A\cup B$且$f(x)=y$,则有

$x\in A$或$x\in B\Rightarrow f(x)\in f(A)$或$f(x)\in f(B)\Rightarrow f(x)\in f(A)\cup f(B)$,

所以 $f(A\cup B)\subseteq f(A)\cup f(B)$.

反之,设$y=f(x)\in f(A)\cup f(B)$,则$f(x)\in f(A)$或$f(x)\in f(B)$,

因而 $x\in A$或$x\in B\Rightarrow x\in A\cup B$,故有$y\in f(A\cup B)$,所以$f(A)\cup f(B)\subseteq f(A\cup B)$.

于是$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$.

(2) 设$y=f(x)\in f(A\cap B)$,则$x\in A\cap B\Rightarrow x\in A$且$x\in B$,所以

$$f(x)\in f(A)\text{且 }f(x)\in f(B)\Rightarrow f(x)\in f(A)\cap f(B),$$

故$f(A\cap B)\subset f(A)\cap f(B)$.

8. 设$f(x)$为定义在$(-l,\ l)$内的奇函数,若$f(x)$在$(0,\ l)$内单调增加,证明$f(x)$在$(-l,\ 0)$内也是单调增加的.

证 设$x_1,x_2\in(-l,0)$且$x_1<x_2$,则有$-x_1,-x_2\in(0,l)$且$-x_2<-x_1$. 因为$f(x)$在$(0,l)$内单调增加,所以$f(-x_2)<f(-x_1)$. 又因为$f(x)$为定义在$(-l,l)$内的奇函数,所以$f(-x_2)=-f(x_2)$,$f(-x_1)=-f(x_1)$. 则$-f(x_2)<-f(x_1)$,即$f(x_1)<f(x_2)$,故$f(x)$在$(-l,0)$内也是单调增加的.

9. 设下面所考虑的函数都是定义在区间$(-l,l)$上的,证明:

两个偶函数之和是偶函数,两个奇函数之和是奇函数.

证 设$f(x)$,$g(x)$均为偶函数,即$f(-x)=f(x)$,$g(-x)=g(x)$.

令$F(x)=f(x)+g(x)$,则$F(-x)=f(-x)+g(-x)=f(x)+g(x)=F(x)$,

所以$F(x)$为偶函数.

另一问题,同理可证(略).

13. 设函数$f(x)$在数集X上有定义,试证:函数$f(x)$在X上有界的充分必要条件是它在X上既有上界又有下界.

证　(充分性)设$\forall x\in X, m\leqslant f(x)\leqslant M$,取$K=\max\{|m|,|M|\}$,则$|f(x)|\leqslant K$,故函数$f(x)$在$X$上有界.

(必要性)设$\forall x\in X,|f(x)|\leqslant \mathrm{K}$(K为常数),则$-\mathrm{K}\leqslant f(x)\leqslant \mathrm{K}$,故$f(x)$在$X$上既有上界K,又有下界$-$K.

16. 设$f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\ 0, & |x|=1,\\ -1, & |x|>1,\end{cases}$ $g(x)=\mathrm{e}^x$,求$f[g(x)]$和$g[f(x)]$,并作出这两个函数的图形.

解　$f[g(x)]=\begin{cases}1, & |\mathrm{e}^x|<1,\\ 0, & |\mathrm{e}^x|=1,\\ -1, & |\mathrm{e}^x|>1\end{cases}=\begin{cases}1, & x<0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x>0,\end{cases}$ 如图1-1所示;$g[f(x)]=\begin{cases}\mathrm{e}, & |x|<1,\\ 1, & |x|=1,\\ \mathrm{e}^{-1}, & |x|>1,\end{cases}$ 如图1-2所示.

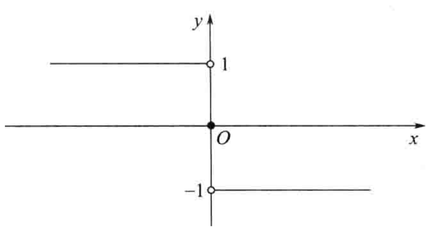

图1-1

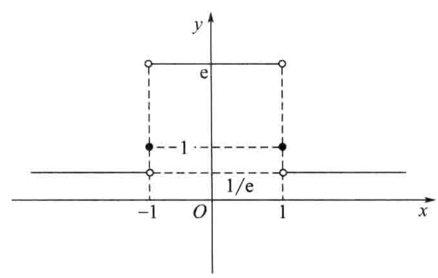

图1-2

18. 收音机每台售价为90元,成本为60元. 厂方为鼓励销售商大量采购,决定凡是订购量超过100台以上的,每多订购1台,售价就降低1分,但最低价为每台75元.

(1) 将每台的实际售价p表示为订购量x的函数;

(2) 将厂方所获的利润P表示成订购量x的函数;

(3) 某一销售商订购了1 000台,厂方可获利润多少?

解　(1) 根据题意,每台的实际售价函数可用分段函数来表示,即

$$p(x)=\begin{cases}90, 0\leqslant x<100,\\ 90-(x-100)\times 0.01, 100<x<1\,600,\\ 75, x\geqslant 1\,600.\end{cases}$$

(2) 同理可得利润函数为:$P(x)=\begin{cases}30x, 0\leqslant x\leqslant 100,\\ 31x-0.01x^2, 100<x<1\,600,\\ 15x, x\geqslant 1\,600.\end{cases}$

(3) $P(1\,000)=31\times 1\,000-0.01\times 1\,000^2=21\,000$.

第二节　数列的极限

2.1　学习目标

理解数列极限的概念,掌握收敛数列的性质.

2.2　内容提要

1. 数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义

设$\{x_n\}$为一数列,如果存在常数 a,对于任意给定的正数 ε,总存在正整数 N,使得当 $n>N$时,不等式$|x_n-a|<\varepsilon$ 都成立,则称常数 a 是数列$\{x_n\}$的极限,或者称数列$\{x_n\}$收敛于 a,记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a \text{ 或 } x_n\to a(n\to\infty).$$

2. 数列极限的几何意义

任意给定 a 的 ε 邻域$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$,存在 $N\in\mathbf{N}^+$,当 $n<N$ 时,点 x_n一般落在邻域$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$外,当 $n>N$ 时,点 x_n全都落在邻域$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$内.

3. 收敛数列的性质

(1) 极限的唯一性:如果数列$\{x_n\}$收敛,那么它的极限是唯一的.

(2) 收敛数列的有界性:如果数列$\{x_n\}$收敛,那么数列$\{x_n\}$一定有界.

(3) 收敛数列的保号性:如果数列$\{x_n\}$收敛于 a,且 $a>0$(或 $a<0$),那么存在正整数 N,当 $n>N$ 时,则有 $x_n>0$(或 $x_n<0$).

2.3　典型例题与方法

基本题型Ⅰ:判断数列的收敛与发散

例 1　判断下面数列是收敛数列还是发散数列. 对于收敛数列,通过观察$\{x_n\}$的变化趋势,写出其极限.

(1) $x_n=2+\dfrac{1}{n^2}$;　(2) $[(-1)^n+1]\dfrac{n+1}{n}$.

解　(1) 数列的前几项依次是 $3,2\frac{1}{4},2\frac{1}{9},2\frac{1}{16},\cdots$,所以数列为收敛,且极限为 2;

(2) 数列的前几项依次是 $0,3,0,2\frac{1}{2},0,2\frac{1}{3},0,2\frac{1}{4},\cdots$,奇数项都是 0,即收敛于 0,偶数项收敛于 2,所以数列为发散.

【方法点击】　在刚接触数列极限时,求解方法比较有限,主要是通过观察数列的前几项,判断数列的发展趋势,从而做出收敛还是发散的判断.

例 2　设 $a_n=\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\sin\dfrac{n\pi}{2}$,证明数列$\{a_n\}$为发散.

【分析】　观察数列的前几项,可以发现有正数项、负数项,还有零项,且其发展的趋势并不相同. 根据性质(1),要证明该数列为发散,只要找到数列中的两个子列分别收敛到不同

的值即可．

解　设 k 为整数，若 $n=4k$，则 $a_{4k}=\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin\frac{4k\pi}{2}=\left(1+\frac{1}{4k}\right)\sin 2k\pi=0$；

若 $n=4k+1$，则 $a_{4k+1}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\frac{4k\pi+\pi}{2}=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)$

$$=\left(1+\frac{1}{4k+1}\right)\to 1\ (k\to\infty).$$

因此证明数列 $\{a_n\}$ 为发散．

【方法点击】　在证明数列发散时，可采用两种方法：①找两个极限不相等的子数列；②找一个发散的子数列．

基本题型Ⅱ：利用数列极限的定义证明极限存在

例 3　根据数列极限的定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

证　$\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-0|=\left|\frac{1}{n^2}\right|<\varepsilon$ 恒成立，只要 $n>\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$，取 $N=\left[\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}\right]$，当 $n>N$ 时，总有 $|x_n-0|=\left|\frac{1}{n^2}\right|<\varepsilon$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$.

【方法点击】　利用数列极限的定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 是本节的难点．其关键在于给了 ε，求对应的 $N=N(\varepsilon)$．这往往通过解不等式来实现，有时可直接解出 N，有时要利用一些技巧将不等式放缩才能找到合适的 N.

2.4　习题 1-2 解答

2．设数列 $\{x_n\}$ 的一般项 $x_n=\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}$．问 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=$？求出 N，使当 $n>N$ 时，x_n 与其极限之差的绝对值小于正数 ε．当 $\varepsilon=0.001$ 时，求出数 N.

解　$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

因为 $|x_n-0|=\left|\frac{1}{n}\cos\frac{n\pi}{2}\right|\leqslant\frac{1}{n}$，对 $\forall\varepsilon>0$，要使 $|x_n-0|<\varepsilon$，只要 $\left|\frac{1}{n}\right|<\varepsilon$，即 $n>\frac{1}{\varepsilon}$.

取 $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$ 时，$|x_n-0|<\varepsilon$ 成立．

当 $\varepsilon=0.001$ 时，有 $N=1\ 000$.

3．根据数列极限的定义证明：(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

证　(3)因为 $|x_n-1|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}-1\right|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|\leqslant\frac{n+|a|-n}{n}=\frac{|a|}{n}$，$\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{|a|}{\varepsilon}\right]+1$，当 $n>N$ 时，恒有 $|x_n-1|=\left|\frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n}\right|\leqslant\frac{|a|}{n}<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n}=1$.

4. 若$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$,证明$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 并举例说明:如果数列$\{|x_n|\}$有极限,数列$\{x_n\}$未必有极限.

证 因为$||u_n|-|a||\leqslant|u_n-a|$,对$\forall\varepsilon>0$,只要使$|u_n-a|<\varepsilon$即可.

由$\lim\limits_{n\to\infty}u_n=a$可知,对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,当$n>N$时,$|u_n-a|<\varepsilon$成立,从而$||u_n|-|a||<\varepsilon$,即$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=|a|$. 反之,未必成立. 例如$u_n=(-1)^n$,显然$\lim\limits_{n\to\infty}|u_n|=1$,但$\lim\limits_{n\to\infty}u_n$不存在.

5. 设数列$\{x_n\}$有界,又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

证 因为$\{x_n\}$有界,所以存在常数$M\geqslant0$,使得$|x_n|\leqslant M$;又$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$,对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N$,当$n>N$时,$|y_n|<\dfrac{\varepsilon}{M}$,于是$|x_ny_n-0|=|x_n||y_n|<M\cdot\dfrac{\varepsilon}{M}=\varepsilon$,故$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

6. 对于数列$\{x_n\}$,若$x_{2k-1}\to a(k\to\infty)$,$x_{2k}\to a(k\to\infty)$,证明:$x_n\to a(n\to\infty)$.

证 对$\forall\varepsilon>0$,因为$x_{2k-1}\to a$,所以$\exists N_1$,当$2k-1>2N_1-1$时,总有$|x_{2k-1}-a|<\varepsilon$;又因为$x_{2k}\to a$,所以$\exists N_2$,当$2k>2N_2$时,总有$|x_{2k}-a|<\varepsilon$. 取$N=\max\{2N_1-1,2N_2\}$,则当$n>N$时,$|x_n-a|<\varepsilon$恒成立. 因此$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$.

第三节 函数的极限

3.1 学习目标

理解函数极限的概念;理解函数左极限与右极限的概念,以及函数极限与其左极限、右极限之间的关系;掌握函数极限的性质.

3.2 内容提要

1. 函数极限的定义

(1) 自变量趋于有限值时函数的极限

设函数$f(x)$在点x_0的某一去心邻域内有定义. 如果存在常数A,对于任意给定的正数ε,总存在正数δ,使得当x满足不等式$0<|x-x_0|<\delta$时,对应的函数值$f(x)$都满足不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$,那么常数A就叫作函数$f(x)$当$x\to x_0$时的极限,记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A(x\to x_0).$$

若当$x\to x_0^-$时,$f(x)$无限接近于某常数A,则常数A叫作函数$f(x)$当$x\to x_0$时的左极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A.$$

类似地可定义右极限:若当$x\to x_0^+$时,$f(x)$无限接近于某常数A,则常数A叫作函数$f(x)$当$x\to x_0$时的右极限,记为

$$\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A.$$

(2) 自变量趋于无穷大时函数的极限

如果当$|x|$无限增大时,$f(x)$无限接近于某一常数A,则常数A叫作函数$f(x)$当$x\to$

∞时的极限，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A.$$

2. 函数极限的性质

(1) 函数极限的唯一性：如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$的极限存在，那么该极限是唯一的．

(2) 函数极限的局部有界性：如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，那么 $f(x)$在点 x_0 的某一去心邻域内有界．

(3) 函数极限的局部保号性：如果 $f(x)\to A(x\to x_0)$，而且 $A>0$(或 $A<0$)，那么在点 x_0 的某一去心邻域内，有 $f(x)>0$(或 $f(x)<0$).

推论：如果在点 x_0 的某一去心邻域内 $f(x)\geqslant 0$(或 $f(x)\leqslant 0$)，而且 $f(x)\to A(x\to x_0)$，那么 $A\geqslant 0$(或 $A\leqslant 0$).

(4) 函数极限与数列极限的关系：如果当 $x\to x_0$时，$f(x)$的极限存在，$\{x_n\}$为 $f(x)$的定义域内任一收敛于 x_0的数列，且满足 $x_n\neq x_0(n\in\mathbf{N}^+)$，那么相应的函数值数列$\{f(x_n)\}$必收敛，且

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=\lim_{x\to x_0}f(x).$$

3.3　典型例题与方法

基本题型Ⅰ：利用函数极限的定义证明极限存在

例 1　利用极限定义证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}=0.$$

证　任意给定 $\varepsilon>0$，由于 $\left|\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}-0\right|=\frac{|\sin x^2|}{\sqrt{x}}\leqslant\frac{1}{\sqrt{x}}$，故要使 $\left|\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，只要 $\frac{1}{\sqrt{x}}<\varepsilon$，即 $x>\frac{1}{\varepsilon^2}$，因此取 $X=\frac{1}{\varepsilon^2}$，则当 $x>X$ 时，就有 $\left|\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}-0\right|<\varepsilon$，这就证明了

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sin x^2}{\sqrt{x}}=0.$$

【方法点击】　利用函数极限的定义证明$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$ 的关键在于给了 ε，求对应的 $X=X(\varepsilon)$.

例 2　若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，证明$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$；并举例说明，若当 $x\to x_0$ 时$|f(x)|$有极限，$f(x)$未必有极限．

证　对任意给定的 $\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 知，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有 $|f(x)-A|<\varepsilon$. 由不等式 $\|f(x)|-|A\|\leqslant|f(x)-A|$，可知 $\|f(x)|-|A\|<\varepsilon$，故 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$得证．

但若$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$，却未必有 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在．例如设 $f(x)=\begin{cases}1, & x\geqslant 0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$ 则 $\lim\limits_{x\to 0}|f(x)|=1$，而$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$却不存在．

例 3　证明$\lim\limits_{x\to 1}\ln x=0$.