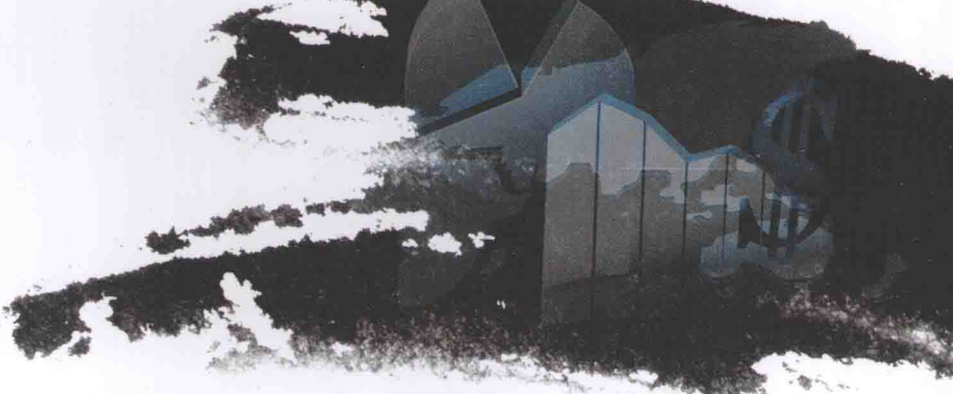
暨南经济文丛

最优化与高级宏观经济学

王洪光　刘金山◎著



暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

暨南经济文丛

本书受广东省省级学科专项资金——暨南大学应用经济学学科
建设专项经费（52702030）资助

最优化与高级宏观经济学

王洪光 刘金山 ◎ 著

暨南大學出版社
JINAN UNIVERSITY PRESS

中国 · 广州

图书在版编目（CIP）数据

最优化与高级宏观经济学/王洪光，刘金山著．—广州：暨南大学出版社，2015.5

（暨南经济文丛）

ISBN 978－7－5668－1381－7

Ⅰ.①最…　Ⅱ.①王…②刘…　Ⅲ.①宏观经济学—研究　Ⅳ.①F015

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2015）第 067023 号

出版发行：暨南大学出版社

地　址：中国广州暨南大学
电　话：总编室（8620）85221601
　　　　营销部（8620）85225284　85228291　85228292（邮购）
传　真：（8620）85221583（办公室）　85223774（营销部）
邮　编：510630
网　址：http：//www.jnupress.com　http：//press.jnu.edu.cn

排　版：广州市天河星辰文化发展部照排中心
印　刷：佛山市浩文彩色印刷有限公司

开　本：787mm×1092mm　1/16
印　张：13.25
字　数：250 千
版　次：2015 年 5 月第 1 版
印　次：2015 年 5 月第 1 次

定　价：35.50 元

目录
CONTENTS

绪 论

一、最优化与经济学

经济学研究稀缺资源的有效利用，而最优化理论则研究如何在给定的约束条件下实现目标函数的最大化，这两者之间具有紧密的联系。

实际上，微观经济学是在与线性规划与活动分析领域的最优化理论的相互交流中发展壮大起来的。如影子价格理论，它是经济学对最优化理论的贡献；最优化理论中的对偶理论拓宽了微观经济学的研究领域。微观经济学对经济主体的行动的分析，或许可以看作是最优化理论的应用。分析的对象从一个时点上经济主体的最优化行动（静态分析）转变成更符合现实的多个时点上的最优化行动（动态分析）。

最近，最优化理论也被广泛应用到宏观经济学领域。如新古典经济学假定预期是理性的，市场总是处于完全竞争均衡状态，而这种均衡本身就是一种最优状态。最优化理论的成果原封不动或稍加修改就可应用于对这种市场运行的分析。比如经济的最优增长问题要解决的是，在产品市场约束下如何实现通时的（或跨期的——Intertemporal）福利最大化。选取代表性家庭，假定其对未来的工资、利息能完全预知。在产品市场均衡约束下，代表性家庭可以安排好现在与未来消费的最优时间路径以实现家庭福利（从而社会福利）的最大化。具体方法是利用最大值原理给出最优解的必要条件，推导出反映消费变动的尤拉方程，再结合产品市场均衡式共同决定消费与资本随时间变动的最优路径，分析各宏观经济变量之间的联系以及政府宏观经济政策的效应。

二、本书的结构

全书分三部分，即最优化理论基础、高级宏观经济学的模型基础及它们在高级宏观经济学专题中的运用。

最优化理论基础部分，主要讲述一个时点或称为静态最优化问题、多个时点（离散）的动态最优化问题以及连续时间的动态最优化问题，为从微观基础出发研究宏观经济问题奠定数学基础。

模型基础部分，主要讲解从微观基础出发、采用一般均衡的分析框架研究宏观经济问题的两种模型方法：代表性家庭模型与重叠世代模型，为高级宏观经济学提供模型基础。

第三部分利用前两部分的知识去分析宏观经济领域的一些专门问题，为应用部分。高级宏观经济学强调微观基础和一般均衡的分析框架。其中，强调微观基础是指为避免犯“卢卡斯批判”的错误，对宏观经济问题的研究应像对微观经济问题的研究一样，要从代表性家庭（或厂商）的效用（或利润）最大化（在其自身的预算约束下）出发，去推求宏观经济变量的最优运动路径，研究宏观经济变量之间的相互关系以及宏观经济政策的效应。我们将系统地分析经济增长、实际商业周期、名义刚性与新凯恩斯波动（DSGE）、消费、投资与货币等问题。

更具体地，在第 1 章，我们介绍一个时点的最优化问题，即静态最优化问题，包括无约束、有等式约束和存在不等式约束的最优化问题。

第 2 章介绍离散时间、有限期界的动态最优化问题，包括动态分析的典型问题及其三种解法的基本思想，重点分析最大值原理的充分性与必要性条件，混合型非线性规划（NLP）的鞍点条件与库恩塔克条件以及三种解法之间的关联。

第 3 章研究连续时间的动态最优化问题，并且将时间期界扩展到无穷。这是高级宏观经济学中最常碰到的问题。

第 4 章首先介绍离散时间的代表性家庭模型及其若干解法，然后介绍连续时间的代表性家庭模型，并利用模型分析最优增长问题和财政政策的效果。

第 5 章介绍重叠世代模型，分析资本积累的效率性、财政政策的效果和不同的年金制度的影响，考虑具有人力资本积累以及遗产动机的情况。

接下来的两章研究经济增长。第 6 章研究新古典增长模型，内容包括离散时间的 Solow 模型、连续时间的 Solow 模型、修正的新古典模型、储蓄率内

生化的模型以及引入人力资本的最优化模型。第 7 章研究内生经济增长，主要是 AK 模型、干中学、公共支出与增长、人力资本积累以及研究开发模型。其中的研究开发模型主要介绍质量阶梯模型与种类扩大模型。最后介绍了内生增长理论的最新进展。

第 8 章主要是建立宏观经济模型用以模拟实际商业周期的行为，使模拟与经济周期的定型化事实尽可能吻合。我们建立随机 Solow 模型与基准的 RBC 模型，研究实际冲击（技术冲击或政府购买支出冲击）对产出、消费、投资、利率、工资、就业等宏观经济变量的影响。

第 9 章研究名义刚性与新凯恩斯波动模型。本章主要目的是引入现代版本的 IS – LM 与 AS – AD 模型，研究名义价格与工资不完全调整的机制。要说明古典二分法不成立，也即要说明名义扰动对经济波动有重要影响，研究该问题是特别必要的。我们也基于名义刚性的概念建立动态随机一般均衡（DSGE）的波动模型。

第 10 章研究投资，内容包括：基准模型、投资的 q 模型（资本存量冲击、总产出变动、投资税收优惠、政府对投资征税以及政府对公司所有权收益征税等的影响）、不确定性（未来利润率、不可逆投资以及贴现因素）的影响以及一些其他考虑。

第 11 章研究消费，分析了确定性条件下的消费：生命周期说与持久性收入假说，分析了不确定性与消费、利率与储蓄、消费与风险资产以及其他消费理论。

第 12 章介绍货币经济，研究货币的存在如何影响人们的决策与实体经济的均衡。先介绍了几个含有货币的动态一般均衡模型，然后分析货币政策的效应，最后分别分析了灵活价格与粘性价格下货币与商业周期的联系。

第一部分　最优化理论基础

第 1 章

静态最优化

本章分析的最优化问题不牵涉时点的变化，讨论的只是单个时点的最优化问题，即静态最优化问题。

1.1 静态最优化问题

考虑下述问题：

$$\max_{x} f(x)$$

$$s.t. \quad x \in X = \{x \mid g(x) \leqslant b\}$$

其中，$f(x)$为目标函数，f 为 $R^n \to R$ 的映射，$x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$为商品的投入向量，投入 x 需消耗 $g(x)$数量的资源，g 为 $R^n \to R^m$ 的映射，b 为资源总量。

$$g(x) = \begin{pmatrix} g_1(x) \\ g_2(x) \\ \vdots \\ g_m(x) \end{pmatrix}; \ b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

先不考虑约束条件，假定 $g(x)$存在最优解 x^*。下面分三种情况讨论该问题的求解：

(1) 约束未起作用，即 $g(x^*) < b$；

(2) 约束取等号，即 $g(x^*) = b$；

(3) 有些约束未起作用，有些取等号，即 $g(x^*) \leqslant b$。

1.2 约束不起作用的场合：古典方法

在约束未起作用的场合，$g(x^*)<b$，x^* 在 X 的内部，相当于无约束的情况。

在古典方法中，让 x 在最优解 x^* 的周围发生微小变动 Δx，看一下函数值的变化。若 $f(x)$ 在 x^* 及其附近连续可微，则忽略高阶小量有：

$$f(x^*+\Delta x)=f(x^*)+f'(x^*)\Delta x$$

由于 x^* 是最大解，$f(x^*)\geqslant f(x^*+\Delta x)$，因此 $f(x^*)\geqslant f(x^*)+f'(x^*)\Delta x$，即

$$f'(x^*)\Delta x\leqslant 0$$

但 Δx 可正可负，因此必有 $f'(x^*)=0$。

于是我们有：

定理 1：f 在 R^n 上连续可微，若存在 x^* 使得 $g(x^*)<b$，那么 x^* 为上述问题最优解的一阶必要条件是 $f'(x^*)=0$。此时，x^* 为内点解。

下面的定理 2 给出 x^* 为极大值的一个充分条件。

定理 2：f 为 R^n 上连续可微凹函数，若 $g(x^*)<b$ 且 $f'(x^*)=0$，则 x^* 为极大值点。

证明：因 f 是凹函数，所以有：$f(x)-f(x^*)\leqslant f'(x^*)(x-x^*)$。又 $f'(x^*)=0$，故 $f(x^*)\geqslant f(x)$，即 x^* 为极大值点。

定理 3（**包络定理**）：假定 f 在 (R^n) 上连续可微，且 $x^*(a)$ 为下述问题

$$\max_x f(x,\ a)$$

$$s.t.\quad x\in X=\{x\,|\,g(x)\leqslant b\}$$

的最优解。记 $f^*(a)\equiv f[x^*(a),\ a]$，若 $x^*(a)$ 在 X 的内部且关于 a 连续可微，那么 $f^{*\prime}(a)\equiv\dfrac{\mathrm{d}f^*(a)}{\mathrm{d}a}=\dfrac{\partial f[x^*(a),\ a]}{\partial x}$ 成立。

证明：因 $x^*(a)$ 为上述问题的解，故有 $\dfrac{\partial f[x^*(a),\ a]}{\partial a}=0$。于是，

$$\begin{aligned}f^{*\prime}(a)&=\frac{\mathrm{d}f^*(a)}{\mathrm{d}a}=\frac{\partial f[x^*(a),\ a]}{\partial x}\times\frac{\mathrm{d}x^*(a)}{\mathrm{d}a}+\frac{\partial f[x^*(a),\ a]}{\partial a}\\&=\frac{\partial f[x^*(a),\ a]}{\partial a}\end{aligned}$$

上述包络定理在经济学中有广泛的应用。如在微观经济学中，考虑短期与长期成本曲线的区别。企业投入资本与劳动进行生产，短期内资本投入视

为固定，劳动投入可变。用 a 表示短期的生产水平，z 表示劳动投入，x 表示资本投入，生产函数为 $a=F(z,\ x)$。成本 $f=wz+rx$，其中 w，r 分别表示工资与租金。短期成本是产量的函数，记作 $c_s(a)$，$c_s(a)=f(x,\ a)$，其中 x 外生给定。长期中，x 为可变，对任意给定的产量 a，企业会选择最优的资本投入使成本最小，长期成本函数 $c_l(a)=\min\limits_x f(x,\ a)$。由包络定理，$c'_l(a)=c'_s[x^*(a),\ a]$，也就是说，长期成本曲线在每一产量 a 处都与对应该产量的最优短期生产规模的成本曲线相切，即长期成本曲线为短期成本曲线的包络线。如图 1 所示。

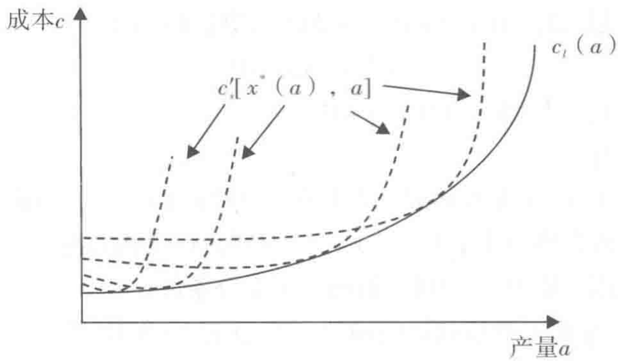


图 1　长期成本与短期成本

高级宏观经济学中也经常使用包络定理。如在高级宏观经济学中经常要对 Bellman 方程进行分析，每次分析我们都会用到包络定理。

定理 4（凹性定理）： 假定 $f(x,\ a)$：$R^n\times R^m\to R$ 关于 $(x,\ a)$ 凹，且对所有的 $a\in R^m$，$f^*(a)=\max\limits_x f(x,\ a)$ 均存在，则 f^*：$R^m\to R$ 关于 a 凹。

证明： $\forall a,\ a'\in R^m$，记使 $f(x,\ a)$ 与 $f(x,\ a')$ 分别达到最大的 x 值为 $x^*(a)$，$x^*(a')$。$\forall\lambda$，$0\leqslant\lambda\leqslant1$，显然有：

$$\lambda a+(1-\lambda)a'\in R^m,\ \lambda x^*(a)+(1-\lambda)x^*(a')\in R^n$$

于是

$$\begin{aligned}f^*[\lambda a+(1-\lambda)a'] &= \max_x f[x,\ \lambda a+(1-\lambda)a'] \\ &\geqslant f[\lambda x^*(a)+(1-\lambda)x^*(a'),\ \lambda a+(1-\lambda)a'] \\ &\geqslant \lambda f[x^*(a),\ a]+(1-\lambda)f[x^*(a'),\ a']\end{aligned}$$

[这是因为 $f(x,\ a)$：$R^n\times R^m\to R$ 关于 $(x,\ a)$ 凹]

$$=\lambda f^*(a)+(1-\lambda)f^*(a')$$

即 f^*：$R^m\to R$ 关于 a 凹。

1.3 等式约束：拉格朗日乘子法

本节讨论第1章1.1节中的第二种情况，即约束取等号的情况。

1.3.1 两变量的场合

先考虑如下两变量问题：

$$\max_{x_1,x_2} f(x_1, x_2)$$

$$s.t. \quad g(x_1, x_2)=b$$

其中 $b\in R$，g 为实函数。

对上述问题构造拉格朗日函数：

$$L(x_1, x_2, \lambda)=f(x_1, x_2)+\lambda[b-g(x_1, x_2)]$$

一阶条件为：

$$L_{x_1}(x_1, x_2, \lambda)=f_{x_1}(x_1, x_2)-\lambda g_{x_1}(x_1, x_2)=0 \tag{1.3.1}$$

$$L_{x_2}(x_1, x_2, \lambda)=f_{x_2}(x_1, x_2)-\lambda g_{x_2}(x_1, x_2)=0 \tag{1.3.2}$$

$$L_{\lambda}(x_1, x_2, \lambda)=b-g(x_1, x_2)=0 \tag{1.3.3}$$

利用上面这三个条件可求最优解 $x^*=(x_1^*, x_2^*)$ 与拉格朗日乘数 λ^*。由（1.3.1）有：

$$\lambda^*=f_{x_1}(x^*)\cdot g_{x_1}(x^*)^{-1} \tag{1.3.4}$$

下面看一下拉格朗日乘数的意义。

对约束条件全微分有：

$$\mathrm{d}b=g_{x_1}(x^*)\mathrm{d}x_1+g_{x_2}(x^*)\mathrm{d}x_2$$

因此，

$$\mathrm{d}x_1=g_{x_1}(x^*)^{-1}\mathrm{d}b-g_{x_1}(x^*)^{-1}\cdot g_{x_2}(x^*)\mathrm{d}x_2 \tag{1.3.5}$$

利用（1.3.5）式，有：

$$\begin{aligned}\mathrm{d}f(x^*)&=f_{x_1}(x^*)\mathrm{d}x_1+f_{x_2}(x^*)\mathrm{d}x_2\\&=f_{x_1}(x^*)g_{x_1}(x^*)^{-1}\mathrm{d}b+[-f_{x_1}(x^*)g_{x_1}(x^*)^{-1}\cdot g_{x_2}(x^*)+\\&\quad f_{x_2}(x^*)]\mathrm{d}x_2\\&=\lambda^*\mathrm{d}b+[f_{x_2}(x^*)-\lambda^*g_{x_2}(x^*)]\mathrm{d}x_2\\&=\lambda^*\mathrm{d}b\end{aligned}$$

因此，λ^* 是资源 b 的最后一单位增加所引起的目标函数最优值的变化，它反映了目标函数对资源 b 的敏感程度。

1.3.2 一般的场合

考虑 1.1 节中约束取等号的问题：

$$\max_{x} f(x)$$

$$s.t.\quad g(x)=b$$

对于上述问题，有如下定理：

定理 5（拉格朗日乘子法）：假定：① f，g 连续可微；② $m<n$；③$g'(x^*)$满行秩。记 $L(x,\lambda)=f(x)+\lambda[b-g(x)]$，若 x^* 为上述问题的解，则存在向量 λ^*（称为拉格朗日乘数）满足：

$$L_x(x^*,\lambda^*)=0$$

$$L_\lambda(x^*,\lambda^*)=0$$

证明：由于 g 满足条件①、②和③，根据隐函数定理，在 x^* 近旁可将 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$分为两部分：m 维向量 x^1 与 $n-m$ 维向量 x^2，使得 x^2 可表示成 x^1 的某一函数 $x^2=h(x^1)$。于是上述问题可改写成下述无约束的局部最大化问题：

$$\max_{x^1} f[x^1,h(x^1)]$$

因 f，h 都连续可微，所以该最大化问题的必要条件为：

$$f_{x^1}(x^*)+f_{x^2}(x^*)h'(x^{1*})=0 \tag{1.3.6}$$

另一方面，预算约束对 x^1 的导数 $g_{x^1}(x^*)+g_{x^2}(x^*)h'(x^{1*})=0$，即

$$h'(x^{1*})=-g_{x^2}(x^*)^{-1}\cdot g_{x^1}(x^*) \tag{1.3.7}$$

把上式代入（1.3.6）式有：

$$f_{x^1}(x^*)-f_{x^2}(x^*)\cdot g_{x^2}(x^*)^{-1}\cdot g_{x^1}(x^*)=0 \tag{1.3.8}$$

另外，显然有：

$$f_{x^2}(x^*)-f_{x^2}(x^*)\cdot g_{x^2}(x^*)^{-1}\cdot g_{x^2}(x^*)=0 \tag{1.3.9}$$

令 $\lambda^*=f_{x^2}(x^*)\cdot g_{x^2}(x^*)^{-1}$，并记为 $L(x,\lambda)=f(x)+\lambda[b-g(x)]$，则可将（1.3.8）与（1.3.9）式合写为：

$$L_x(x^*,\lambda^*)=0$$

$L_\lambda(x^*,\lambda^*)=0$ 显然成立。

下面看一下存在等式约束时的包络定理。