信息科学技术学术著作丛书

时滞动力学系统的分岔与混沌（上册）

廖晓峰　李传东　郭松涛　著

科学出版社

信息科学技术学术著作丛书

时滞动力学系统的分岔与混沌

（上册）

廖晓峰　李传东　郭松涛　著

阜阳师范学院图书馆
藏书

科学出版社
北京

内 容 简 介

时滞动力学系统广泛存在于自然科学、工程和社会科学等诸多领域中。本书介绍了研究时滞动力学系统分岔的基本方法，同时涵盖目前研究的一些最近成果。本书从理论与数值模拟上系统地讨论了时滞动力学系统，尤其是时滞神经网络出现各种分岔及混沌产生的可能性，获得了一些新的理论结果。分上、下两册，共7章，上册包括研究时滞动力学系统Hopf分岔的几种方法、单个神经元时滞方程的分岔、两个神经元时滞系统的分岔等内容。

本书可作为高等院校电子工程、计算机、控制理论与应用、应用数学等相关专业高年级本科生、研究生的教材和参考书，也可作为相关教师和科研人员的参考用书。

图书在版编目(CIP)数据

时滞动力学系统的分岔与混沌. 上册/廖晓峰，李传东，郭松涛著. —北京：科学出版社，2015

(信息科学技术学术著作丛书)

ISBN 978-7-03-044917-7

Ⅰ. 时…　Ⅱ. ①廖…　②李…　③郭…　Ⅲ. 时滞系统-动力学系统-研究　Ⅳ. TP13

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第126968号

责任编辑：魏英杰 / 责任校对：桂伟利

责任印制：张　倩 / 封面设计：陈　敬

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

三河市骏杰印刷有限公司 印刷

科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2015年6月第　一　版　　开本：720×1000 1/16

2015年6月第一次印刷　　印张：14 1/4

字数：287 000

定价：95.00元

(如有印装质量问题，我社负责调换)

前　言

近年来，时滞动力学系统已广泛存在于自然科学、工程技术和社会科学等诸多领域。随着计算机技术、传感器测试技术、控制理论的迅速发展，时滞反馈控制技术已在工程领域得到广泛的应用，各种时滞动力学模型从实际工程中构建出来。本书的第一作者自攻读博士学位期间至今已进行了近二十年的研究，然而自感在非线性动力学领域，尤其是时滞动力学系统方面仍是初学者，有众多非线性现象值得继续研究。

在许多工程实际应用中，尽管时滞量很小，但常常会影响到整个系统的稳定性。因此，时滞对动力学系统的影响在许多实际工程问题中是必须考虑的重要因素。时滞动力学系统的基本特征是系统随时间的演化，不仅依赖于系统的当前状态，也依赖于其过去的状态，这就是通常所称的滞后型时滞动力学系统。当然，还有其他类型的时滞系统，如中立型时滞动力学系统和前向型时滞动力学系统。本书仅讨论滞后型时滞动力学系统，为方便起见，我们称它为时滞动力学系统。这是一类通常由时滞微分方程描述的无穷维动力学系统，而且不论时滞有多小，系统的状态空间均是无穷维的，其解空间也是无穷维的，也就是说相应的线性化系统的特征方程有无穷多个根。因此，使得时滞动力学系统与无时滞动力学系统相比在许多方面具有本质性差异，其动力学行为也完全不相同，呈现出非常复杂的现象。例如，在无时滞的一阶自治非线性系统，系统的行为或者收敛于稳定的平衡点、或者周期解、或者发散，但在有时滞的一阶自治非线性系统中，不仅有收敛于稳定的平衡点，而且可能出现各种分岔，或者混沌行为。这也表明，简单的时滞动力学系统可以具有非常复杂的动力学性质。目前，在神经网络系统动力学性质的研究中，一项非常重要的工作就是利用一些典型的人工神经网络模型来揭示时滞导致的各种复杂动力学行为产生的机理，以便更好地认清神经活动的规律，尽管这些带时滞的人工神经网络模型与真实世界的神经网络相比是非常简单的。

时滞常导致系统的运动失稳，产生各种形式的分岔。在非线性时滞动力学系统的分岔中，Hopf 分岔是普遍存在的，且是讨论得最为广泛的。研究 Hopf 分岔周期解的性质通常采用中心流形约化方法与规范型理论，中心流形约化方法在理论上比较完备，但过程繁琐且计算量大。Hopf 分岔对应于工程中的一种自激振荡现象，是非线性系统所特有的性质。产生这种机理的条件是，系统平衡点随着某个系统参数变化发生稳定性切换，而系统非线性将受扰后发散的运动制约在有限范围内。因此，Hopf 分岔存在的必要条件可由特征根分布的分析得到，即存在某个

系统参数值,使得系统特征方程除了一对单重共轭纯虚根外,其余特征值具有负实部,并且该参数值在对应的特征根曲线满足横截性条件时,该参数值为 Hopf 分岔点。对动力学系统而言,发生 Hopf 分岔是导致系统失稳的主要原因之一。由于系统在平衡点处线性化相应的特征方程有无穷多个根,因此特征根有三对共轭纯虚根,或者两对共轭纯虚根,或者有一对纯虚根和一个零根,或者零根是重根的情况下,在这些临界值的附近,系统可能产生复杂的余维 3、余维 2、Takens-Bogdanov 分岔等。这也是本书讨论的重点。

从 20 世纪 80 年代中期到 20 世纪末,混沌理论迅速吸引了数学、物理、工程、生态学、经济学、气象学、情报学等诸多领域学者的广泛关注,更由于混沌保密通信及混沌密码学的兴起,引发了全球的混沌热。根据英国的《不列颠百科全书》注释,英文中的“chaos”一词源于希腊的“xaos”,本意是指在万物出现之前就存在无限广阔的空虚宇宙,这一名词翻译成中文就变为“混沌”,也可写作“浑沌”。自然科学中讲的混沌运动是指确定性系统中展示的一种貌似随机的行为。这里我们仅研究几种简单的时滞系统产生混沌现象的机理。

本书深入研究了时滞动力学系统,尤其是时滞神经网络出现各种分岔,以及混沌产生的可能性,并从理论与数值模拟上详细进行讨论,获得了一些新的理论结果。全书共 7 章,包括研究时滞动力学系统 Hopf 分岔的几种方法、单个神经元时滞方程的分岔、两个神经元时滞系统的分岔、三个神经元时滞系统的分岔、高阶时滞神经网络模型,以及在工程中的其他时滞动态模型和时滞混沌系统等内容。

第 1 章主要给出研究时滞动力学系统 Hopf 分岔的几种方法。首先,介绍目前研究使用最多且方便的 Hassard 提出的方法。Hassard 的方法借助中心流形定理和规范形式理论讨论 Hopf 分岔和分岔周期解的稳定性,这种方法的结果等价于平均方法、Poincaré-Lindstedt 方法、Fredholm 选择方法和隐函数定理方法,但 Hassard 方法的优点对研究者来说在概念上更清晰明了。随后,我们讨论在科学和工程领域内已广泛应用的平均法,这里仅讨论泛函微分方程的平均法,尤其适应于非自治微分和差分方程的分析。研究在工程中广泛应用的多尺度方法,我们利用 Fredholm 选择来获得多尺度串行计算方法,将研究常微分方程周期解的 Poincaré-Lindstedt 方法推广到时滞动态系统的周期解;讨论在工程领域,尤其是研究含时滞的非线性反馈系统振荡现象的频域方法,频域方法的优点在于可以迅速和准确发现周期轨道的振幅。最后,讨论带参数的时滞泛函微分方程的规范形式,并应用于 Hopf 分岔研究中,直接计算带参数的时滞泛函微分方程的规范形式,并不计算预先的奇异性的中心流形。该方法并不需要繁琐的计算。

第 2 章研究单个神经元时滞方程产生分岔的机理。首先,给出一般的时滞神经网络模型。然后,讨论单个时滞神经网络模型,引入了单个 Gopalsamy 神经元系统,进而讨论 Gopalsamy 模型的收敛性,并获得收敛性的充分必要条件。随后,

试读结束:需要全本请在线购买: www.ertongbook.com

研究带非线性激和函数的单时滞神经元系统产生 Hopf 分岔的机理，并且讨论一个典型时滞系统的 Hopf 分岔，以及带分布时滞 Gopalsamy 神经元方程的 Hopf 分岔，讨论具有反射对称性的一阶非线性时滞微分方程的分岔，进而获得一些特殊系统，如标准的双稳系统、海洋-大气耦合模型的分岔。同时，研究更一般的纯量时滞微分方程的局部和全局 Hopf 分岔并应用于一些具体例子中。最后，研究带两个时滞的纯量时滞微分方程的 Hopf 分岔。

第 3 章系统研究两个神经元时滞系统产生分岔的机理。首先，讨论一个简单的、带两个神经元时滞系统的稳定性与分岔。然后，研究时滞怎样诱导一对兴奋与抑制神经元系统产生周期性的条件。进一步讨论带分布时滞是怎样诱导兴奋与抑制神经元系统产生周期性的条件及全局 Hopf 分岔；讨论根据神经活动而建模的时滞微分系统的分岔，即模型化神经活动的时滞微分系统的分岔，重点研究 Bogdanov-Takens 分岔和 Hopf 分岔。研究带两个不同时滞的神经系统模型的稳定性与分岔，分别利用 Hassard 方法和 Poincaré-Lindstedt 方法研究上述模型产生 Hopf 分岔的条件。深入研究带多个时滞的两个耦合神经元系统的稳定性与分岔，以及分岔的相互作用，如 Hopf-Hopf 相交、Hopf-Pitchfork 相交、Takens-Bogdanov 相交等。前面均讨论的带离散时滞的情形，随后我们研究带分布时滞两个神经元系统的 Hopf 分岔，讨论带两个时滞调和振荡器的 Hopf 分岔及余维 2 分岔。最后，讨论更一般的时滞微分方程中余维 2 和余维 3 的零奇异性。

第 4 章系统研究三个神经元时滞系统的分岔。首先，讨论三个神经元且带单时滞系统的局部稳定性和 Hopf 分岔；进而讨论具有环形联接的三个神经元时滞系统的分岔；在单时滞情形，研究三个 Gopalsamy 神经元系统的 Hopf 分岔与余维 2 分岔。然后，研究具有自联接的三个神经元模型的 Hopf 分岔以及分岔周期解的稳定性。讨论在单时滞情形三个神经元模型产生 Hopf 分岔的充分必要条件。详细研究多时滞三个神经元模型的分岔，尤其是 Pitchfork 分岔、Hopf 分岔，以及它们之间的相互作用；最后，研究更一般的三个神经元时滞网络模型的稳定性与分岔。

第 5 章详细研究高阶时滞神经网络模型。首先，利用频域方法获得时滞递归神经网络产生 Hopf 分岔的条件。然后，研究时滞相互作用的神经网络产生振荡模式的条件；进而研究时滞对环形神经网络的动态行为及学习的影响，尤其是收敛性的影响、产生振荡的条件、多层网络与同步和时滞相互作用的学习等。利用 Lyapunov 泛函、时滞微分方程的对称局部 Hopf 分岔理论等研究有记忆的神经元网络的同步和稳定的锁相，包括绝对同步与多稳定性、稳定的锁相和不稳定波。

第 6 章给出在工程中的一些典型时滞动态模型。首先，给出基因调控网络模型，然后对几种基因调节网络进行了分岔分析，包括引入一个常时滞基因调节网络，并进行稳定性与 Hopf 分岔分析；随后讨论几种其他基因调节网络的分岔。详

细讨论了网络拥塞控制模型,包括带弃尾的 TCP 的局部稳定性与 Hopf 分岔、某个对偶拥塞控制算法的局部 Hopf 分岔分析等。讨论带时滞生物病毒模型的稳定性与分岔分析,CD_4^+ T-细胞的 HIV 感染的时滞模型的分岔。讨论具有政策时滞的宏观经济动态模型的动态行为,尤其是它的稳定性及 Hopf 分岔(经济周期振荡产生的条件)。同时,讨论具有时滞的情感动态模型的稳定性与分岔。

第 7 章详细讨论几种典型的时滞系统产生混沌的机理。首先,对混沌研究的历史进行回顾,然后给出混沌的几种定义,以及混沌的判据与准则。讨论带分段线性函数的一阶时滞系统产生混沌的机理;带分段线性函数的时滞系统产生多涡卷混沌的机理。讨论带连续函数的一阶时滞系统产生的机理,包括带非单调激和函数的单个神经元时滞方程的混沌,以及一个原型时滞动态系统的混沌。讨论惯性时滞神经网络产生混沌现象的机理,包括带时滞的单个惯性神经元模型和带时滞两个惯性神经元系统的混沌行为。讨论时滞经济动态模型以及带分布时滞 Chen 系统产生混沌的机理。

本书的编写工作得到了国家自然科学基金项目“无线传感器网络定位算法鲁棒性及安全性研究”(61170249)、“云计算框架下大规模科学计算安全外包协议研究”(61472331)、“脉冲时刻依赖状态的脉冲时滞控制系统的分析与设计”(61374078)、“基于优化协作的可充电传感器网络的能量分配和移动数据收集机制研究”(61373179)、“基于优化协作与绿色计算的无线传感器网络感知数据的可控移动收集机制研究”(61170248),高等学校博士学科点专项科研基金(优先发展领域)“移动计算环境下数据收集、分发及其安全性研究”,长江学者奖励计划经费和重庆大学输配电装备及系统安全与新技术国家重点实验室基金(2007DA10512711206)资助,在此表示感谢!

第一作者感谢他的博士生导师电子科技大学的虞厥邦教授,是虞教授把作者引入了非线性动力学的研究领域,从虞教授那里作者学到了严谨的治学态度和不断追求的精神,多年来虞老师一直都关心着作者的成长,并鼓励鞭策作者不断努力。对于恩师,学生从内心深处感谢他,并祝他健康长寿!

感谢加州大学伯克利分校的蔡绍棠教授,他对作者多篇论文的审阅与指导。感谢香港城市大学的陈关荣教授(IEEE Fellow、欧洲科学院院士)、冯刚教授(IEEE Fellow)、党创寅教授和黄国和副教授的邀请访问及合作研究。感谢香港中文大学王钧教授(IEEE Fellow)多年的支持帮助!感谢国内外的同行的支持帮助!

在本书的完成过程中,硕士毕业生赵樵、田勇、任晓霞、李华青、解咪咪、雷新雨、王小鉴、穆南锟为书的初稿输入做了大量工作。另外,书中参考了很多国内外专家和同行学者的论文,在此一并表示衷心感谢!

特别感谢我的夫人冉玖宏女士以及儿子廖星冉的支持、理解与帮助!谨以此

书献给他们！

由于作者学术水平及能力的限制，书中错误与不足之处在所难免，敬请专家和读者批评指正！

2014年12月于重庆

目　　录

上　　册

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

下　　册

第 1 章　研究时滞动力学系统 Hopf 分岔的几种方法

1.1　时滞系统的 Hopf 分岔：Hassard 方法

1.1.1　引言

本节讨论一般的时滞系统，即

$$\dot{x}(t)=L_\mu x_t+f(x_t,\mu) \tag{1-1}$$

其中，$\cdot=\mathrm{d}/\mathrm{d}t$；$x_t=x(t+\theta)$；$L_\mu$ 是一个单参族的线性算子；f 是一个非线性函数，将在 1.1.2 节给出精确的定义，并且描述一个算法，来确定系统(1-1)从稳定态分岔到小振幅周期解的稳定性、分岔方向、周期和周期解的渐近形式。

这个算法可以应用于许多时滞系统，我们将在后面章节中探讨其应用。Hassard 方法借助中心流形定理[1,2]讨论 Hopf 分岔和分岔周期解的稳定性，这种方法及其结果等价于平均方法[3,4]、Poincaré-Lindstedt 方法[5]、Fredholm 选择方法，以及隐函数定理方法[6,7]。它的优点在于，如果不是计算简单，这种方法至少对研究者来说似乎在概念上更清晰明了。当然，上面提到的每个其他方法都结合了积分流形定理[4]。本节研究时滞系统从稳定态分岔到周期解，给出确定周期解的渐近轨道稳定性、分岔的方向、周期和周期解的渐近形式。

1.1.2　理论与算法

考虑自治系统，即

$$\dot{x}=L_\mu x_t+f(x_t,\mu),\quad t>0,\quad \mu\in R^1 \tag{1-2}$$

对某个 $r>0$，有

$$x_t(\theta)=x(t+\theta),\quad x:[-r,0]\to R^n,\quad \theta\in[-r,0]$$

其中，L_μ 是连续有界单参族的线性算子，即

$$L_\mu:C[-r,0]\to R^n$$

$$f(\cdot,\mu):C[-r,0]\to R^n$$

包含非线性项，至少是二次项以上，即

$$f(0,\mu)=0,\quad D_x f(0,\mu)=0$$

为了简洁，假设 $f(\cdot,\mu)$无穷可微，且对于小的$|\mu|$，f 和 L_μ 解析依赖于分岔参数 μ。实际上，在大多数应用中，对 f 有 C^4 的假设，关于 L_μ 对 μ 有 C^2 的假设即可。

对于系统(1-2)解的定义及对初值问题光滑解的存在性与唯一性定理，读者

可见文献[1]-[8]。本节的理论依赖于系统(1-2)中心流形的存在性，在谱假设条件下，中心流形是包含原点的某个局部不变的、局部吸引的二维流形。Chafee[9]在此假设条件下，已经证明存在一个中心流形。

按照 Chafee[9]和 Hale[4]的方法，考虑系统(1-2)的解是在 $C=C([-r,0],R^n)$中的元素，即解连续映射初值到 R^n。如果 $r=-\infty$，那么初始值必须满足恰当的扩展假设，我们仅对周期解感兴趣，相应于解 x 的一个轨道在 C 中是一条曲线，即一个周期解的轨道是 C 中的一条闭曲线。

注意在以后讨论的每个系统中，对于所有正的时间，至少对小的初值，解的全局存在性可立即从 L_μ 和 f 的形式中获得。

转向线性问题 $\dot{x}=L_\mu x_t$，由 Riesz 表示定理，存在一个 $n\times n$ 阶矩阵值函数，即

$$\eta(\cdot,\mu):[-r,0]\to R^{n^2}$$

使得 η 的每个分量有有界变差，且对所有 $\phi\in C[-r,0]$，有

$$L_\mu\phi=\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\eta(\theta,\mu)\phi(\theta) \tag{1-3}$$

特别地

$$L_\mu x_t=\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\eta(\theta,\mu)x(t+\theta)$$

对于谱，作出通常的 Hopf 假设，L_μ 的谱为

$$\sigma(\mu)=\{\lambda\,|\,\det(\lambda I-L_\mu \mathrm{e}^{\lambda\theta})=0\} \tag{1-4}$$

存在一对复共轭特征值 $\lambda(\mu)$和 $\bar{\lambda}(\mu)$，即

$$\lambda(\mu)=\alpha(\mu)+\mathrm{i}\omega(\mu)$$

使得

$$\alpha(0)=0,\quad \omega(0)=\omega_0>0$$

且

$$\alpha'(0)\neq 0\ (\text{横截性假设}) \tag{1-5}$$

并且 $\sigma(\mu)$的所有其他元素在 $\mu=0$ 处有负实部。因此，我们将研究系统(1-2)当 μ 接近 0 时，从平衡解 0 的小振幅周期解的 Hopf 分岔。

正如在 Hassard 等[1]指出的，系统(1-2)的分岔周期解 $x(t,\mu)$由小的参数 ε 来度量且 $\varepsilon\geqslant 0$，解 $x(t,\mu(\varepsilon))$有振幅 $O(\varepsilon)$，周期 $P(\varepsilon)$和具有 $\beta(0)=0$ 的非零 Floquet 指数 $\beta(\varepsilon)$。这里在我们的假设下，μ、P 和 β 有收敛的展式，即

$$\begin{gathered}\mu=\mu_2\varepsilon^2+\mu_4\varepsilon^4+\cdots\\ P=\frac{2\pi}{\omega_0}(1+\tau_2\varepsilon^2+\tau_4\varepsilon^4+\cdots)\\ \beta=\beta_2\varepsilon^2+\beta_4\varepsilon^4+\cdots\end{gathered} \tag{1-6}$$

其中，μ_2 的符号(正与负)决定分岔的方向；β_2 的符号(正与负)决定 $x(t,\mu(\varepsilon))$的稳

定性，如果 $\beta_2<0$，则 $x(t,\mu(\varepsilon))$ 是轨道渐近稳定的，如果 $\beta_2>0$，则 $x(t,\mu(\varepsilon))$ 是不稳定的。

现在证明在展式(1-6)中怎样获得它们的系数，在以后的应用中，我们仅计算 μ_2、τ_2 和 β_2。为此，只需要函数 f 在 $\mu=0$ 处的二阶和三阶偏导数的值，以及 $\lambda(0)$ 和 $\lambda'(0)$。在本节的末尾，我们给出计算 μ_2、τ_2 和 β_2 的具体公式。

我们改写式(1-2)为

$$\dot{x}_t=A(\mu)x_t+Rx_t \tag{1-7}$$

这里

$$A(\mu)\phi(\theta)=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}\theta}, & -r\leqslant\theta<0\\ \displaystyle\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\eta(s,\mu)\phi(s)\equiv L_\mu\phi, & \theta=0\end{cases} \tag{1-8}$$

且

$$R\phi(\theta)=\begin{cases}0, & -r\leqslant 0<0\\ f(\phi,\mu), & \theta=0\end{cases} \tag{1-9}$$

因为 $\dfrac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}\theta}\equiv\dfrac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t}$，因此式(1-7)变为

$$\frac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t}=\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_t}{\mathrm{d}t}+0, & -r\leqslant\theta<0\\ L_\mu x_t+f(x_t,\mu), & \theta=0\end{cases}$$

现在设 $q(\theta)$ 是 $A(0)$ 相应于 $\lambda(0)$ 的特征函数，因此有

$$A(0)q(\theta)=\mathrm{i}\omega_0 q(\theta)$$

$A(0)$ 的伴随算子 $A^*(0)$ 定义为

$$A^*(0)\alpha(s)=\begin{cases}-\dfrac{\mathrm{d}\alpha(s)}{\mathrm{d}s}, & 0<s\leqslant r\\ \displaystyle\int_{-r}^{0}\mathrm{d}\eta^{\mathrm{T}}(s,0)\alpha(-s), & s=0\end{cases}$$

为了简化记号，我们记 $A(0)$ 为 A，$A^*(0)$ 为 A^*，$\eta(s,0)$ 为 $\eta(s)$。

A 和 A^* 的域分别为 $C^1[-r,0]$ 和 $C^1[0,r]$，为了计算上的方便，我们允许函数在 C^n 中代替 R^n，因为 $\lambda(0)$ 是 A 的特征值，$\bar{\lambda}(0)$ 是 A^* 的特征值，且对于某个非零 q^*，我们有

$$A^*q^*=-\mathrm{i}\omega_0 q^*$$

正如文献[9]所述，对于 $\psi\in C[0,r]$，$\phi\in C[-r,0]$，定义内积为

$$\langle\psi,\phi\rangle=\bar{\psi}(0)\cdot\phi(0)-\int_{\theta=-r}^{0}\int_{\xi=0}^{\theta}\bar{\psi}^{\mathrm{T}}(\xi-\theta)\mathrm{d}\eta(\theta)\phi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{1-10}$$

对于 $a \in C^n, b \in C^n, a \cdot b$ 意味着 $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$，这里 a_i 和 b_i 是 a 和 b 的分量，那么如果 $\phi \in D(A), \psi \in D(A^*)$，我们有

$$\langle \psi, A\varphi \rangle = \langle A^* \psi, \phi \rangle$$

由下面的条件正规化 q 和 q^*，即

$$\langle q^*, q \rangle = 1 \tag{1-11}$$

当然

$$\langle q^*, \bar{q} \rangle = 0 \tag{1-12}$$

这是因为 $\mathrm{i}\omega_0$ 是 A 的单重特征值。

现在，对于系统(1-7)在 $\mu=0$ 处的一个中心流形 Ω 是一个局部不变的，在 C 中吸引两维流形。如果我们定义

$$z(t) = \langle q^*, x_t \rangle \tag{1-13}$$

且

$$w(t,\theta) \equiv w(z,\bar{z},\theta) = x_t - 2\mathrm{Re}\{z(t)q(\theta)\} \tag{1-14}$$

其中，x_t 是式(1-7)的一个解，那么在中心流形 Ω，有

$$w(z,\bar{z},\theta) = w_{20}(\theta)\frac{1}{2}z^2 + w_{11}(\theta)z\bar{z} + w_{02}(\theta)\frac{1}{2}\bar{z}^2 + w_{21}(\theta)\frac{1}{2}(z^2\bar{z}) + \cdots \tag{1-15}$$

实际上，在 C 中，对于 Ω，z 和 $\bar{z}$ 是局部坐标，如果 x_t 是实的，那么 w 是实的。

我们仅处理实数解 x_t，容易看到

$$\langle q^*, w \rangle = 0 \tag{1-16}$$

中心流形 Ω 的存在性使我们把式(1-7)变为在 Ω 上单复变量的常微方程。在 $\mu=0$ 处，这个方程为

$$\begin{aligned}&\dot{z}(t)\\&= \langle q^*, Ax_t + Rx_t \rangle\\&= \mathrm{i}\omega_0 z(t) + \bar{q}^*(0) f(w(z,\bar{z},0) + 2\mathrm{Re}\{z(t)q(0)\})\end{aligned} \tag{1-17}$$

用缩写形式，上面方程变为

$$\dot{z}(t) = \mathrm{i}\omega_0 z(t) + \bar{q}^*(0) f_0$$

我们的目的是展开 f_0 为 z 和 $\bar{z}$ 幂的级数，以便在这些展开式中获得式(1-6)中 μ_2、β_2 和 τ_2 的系数。为了能够展开 f_0，我们必须确定式(1-15)中的系数 $w_{ij}(\theta)$，写出 $\dot{w} = \dot{x}_t - \dot{z}q - \dot{\bar{z}}\bar{q}$，并利用式(1-17)和式(1-7)有

$$\dot{w} = \begin{cases} Aw - 2\mathrm{Re}\{\bar{q}^*(0) \cdot f_0 q(\theta)\}, & -r \leqslant \theta < 0 \\ Aw - 2\mathrm{Re}\{\bar{q}^*(0) \cdot f_0 q(\theta)\} + f_0, & \theta = 0 \end{cases} \tag{1-18}$$

再写为

$$\dot{w} = Aw + H(z,\bar{z},\theta) \tag{1-19}$$

利用式(1-15)，有

$$H=H_{20}(\theta)\frac{1}{2}z^2+H_{11}(\theta)z\bar{z}+H_{02}\frac{1}{2}\bar{z}^2+\cdots$$

另一方面，在 Ω 上，有

$$\dot{w}=w_z\dot{z}+w_{\bar{z}}\dot{\bar{z}} \tag{1-20}$$

从式(1-15)，式(1-17)～式(1-20)通过比较 $z^i\bar{z}^j$ 相似项，对于 n 值向量 $w_{ij}(\theta)$，我们可以获得常微分方程，即

$$\begin{gathered}(2\mathrm{i}\omega_0-A)w_{20}(\theta)=H_{20}(\theta)\\ -Aw_{11}(\theta)=H_{11}(\theta)\\ \cdots\end{gathered} \tag{1-21}$$

其中，$H_{ij}(\theta)$依赖于系数 $w_{ij}(\theta)$，可以利用式(1-21)来计算，因为在每一步所有出现在右边的 w_{ij} 已确定。

显然，H_{20} 和 H_{11} 依赖于 θ，不依赖于任何 w_{ij}。因为 w 是实数，所以 $w_{02}=\bar{w}_{20}$。对于某个 $c_i\in C(i=1,2,\cdots,4)$ 和某些 E 和$F\in C^n$，方程(1-21)给出下面解的形式，即

$$\begin{aligned}w_{20}(\theta)&=C_1q(\theta)+C_2\bar{q}(\theta)+E\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega_0\theta}\\ w_{11}(\theta)&=C_3q(\theta)+C_4\bar{q}(\theta)+F\end{aligned} \tag{1-22}$$

其中，$w_{02}=\bar{w}_{20}$；$q(\theta)=q(0)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_0\theta}$。

一旦 w_{ij} 确定，微分方程(1.17)对于 z 是明显的，且可以写为

$$\dot{z}=\mathrm{i}\omega_0z+g(z,\bar{z}) \tag{1-23}$$

其中

$$g(z,\bar{z})=g_{20}\frac{z^2}{2}+g_{11}z\bar{z}+g_{02}\frac{z^2}{2}+\frac{g_{21}}{2}z^2\bar{z}+\cdots$$

那么我们可以仅利用 Hassard 方法[1]计算 μ_2、β_2 和 τ_2，即

$$C_1(0)=\frac{\mathrm{i}}{2\omega_0}\left(g_{20}g_{11}-2|g_{11}|^2-\frac{|g_{02}|^2}{3}\right)+\frac{g_{21}}{2} \tag{1-24}$$

$$\mu_2=\frac{-\mathrm{Re}C_1(0)}{\alpha},\quad \beta=2\mathrm{Re}C_1(0) \tag{1-25}$$

且

$$\tau_2=-\frac{1}{\omega_0}[\mathrm{Im}C_1(0)+\mu_2\omega'(0)] \tag{1-26}$$

其中，μ_2 的符号决定分岔方向；β_2 的符号决定分岔周期解的稳定性。

对于解被吸引到中心流形，并且在中心流形上的稳定性由 Floquet 指数 β_2 确定，如果 $\beta_2<0$，则周期解是轨道渐近稳定的；如果 $\beta_2>0$，则周期解是不稳定的。τ_2 确定了在周期中 $o(\varepsilon^2)$项，即

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com