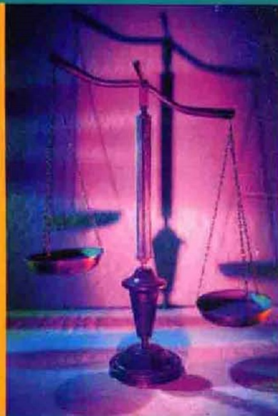
中学数学专题丛书

叶尧城 主编



叶国祥 杨志明 编著

不等式

ZHONGXUE SHUXUE ZHUANTI CONGSHU
湖北教育出版社

14

中学数学专题丛书

叶尧城 主编

不等式

叶国祥 杨志明 编著

14

湖北教育出版社

(鄂)新登字 02 号

图书在版编目(CIP)数据

不等式/叶国祥,杨志明编著 .—武汉:湖北教育出版社,2002
(中学数学专题丛书/叶尧城主编)
ISBN 7-5351-3170-0

Ⅰ.不… Ⅱ.①叶… ②杨… Ⅲ.不等式-中学-教学参考资料 Ⅳ.G634.623

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2001)第 098747 号

出版 发行:湖北教育出版社 武汉市青年路 277 号
网 址:http://www.hbedup.com 邮编:430015 传真:027-83619605
邮购电话:027-83669149

经 销:新 华 书 店
印 刷:文字六〇三厂印刷 (441021·湖北襄樊盛丰路 45 号)
开 本:787mm×1092mm 1/32 7.5 印张
版 次:2002 年 4 月第 1 版 2002 年 4 月第 1 次印刷
字 数:143 千字 印数:1—5 000

ISBN 7-5351-3170-0/G·2575 定价:10.00 元

总　　序

随着素质教育的深入推进，需要我们在素质教育的理念与课堂教学之间架设一座桥梁，以便顺利地使素质教育进入主渠道。桥梁如何构建？改革教材成为了人们选择的突破口！当前，国家教育部教材审定委员会审定通过的几套教材正为愈来愈多的师生所选用，新教材在“为所有的学生打好共同基础”上将有所作为。然而，我国幅员辽阔，地区间的教育水平的差异大，个体间学习水平的差异大。如何真正地体现“以学生发展为本”，发展学生的个性特长，让他们在科学素质、创新意识和能力上有不同程度的提高，还需要通过特定的教学过程来完成，其中应有好的素材和高质量的课外读物(而非散见于市面上的“检测题”、“同步练习”、“习题集”等)。因此，我们数学教育工作者有义务、有责任向新世纪的中学生提供一套与新教材配套的课外读物，以专题讲座的形式，帮助学生了解知识的发生、发展过程，学会分析、解决问题的思想方法，深化、拓宽相关知识。

有鉴于此，我们组织了湖北省一批有丰富教学经验和教学研究工作经验的享受政府津贴的专家、特级教师和高级教师编写了这套《中学数学专题丛书》。丛书共有 18 个小册子，各册相对独立又相互联系，小册子的内容是与中学数学新教材相对应或相关的。它力求以生动简练的笔触，介绍一点数

学史料，有助于学生吸收各种不同的数学经验，理解各种不同的数学思想观点，体会数学的人文价值；着力反映知识的纵横联系，并以范例的形式予以说明；精选典型例题，揭示重难点，说明重在何处，难在哪里，如何理解，着重分析解题思路，阐释思想方法；选编与日常生活、生产及与其他学科相关的问题，引导学生重视数学的应用。各册都配备了一定数量的习题，供读者练习。对数学有浓厚兴趣的学生，可系统阅读，也可以根据个人的具体情况有选择性地使用。概括地讲，该套丛书具有如下特点：

1. **帮助学生夯实基础**。通过知识精讲、典例剖析、归纳小结，落实基础知识。

2. **帮助学生培养能力**。精选思想性强的综合题，启迪学生的思维，开阔学生的思路，落实数学思想方法的学习。

3. **引导学生关注应用**。精选密切联系生活实际和社会实践的应用题，促进学生养成用数学的意识。

4. **引导学生崇尚创新**。精选提问的方向不确定或答案不确定的探索性、开放性问题，培养学生的探究能力。

5. **引导学生走向成功**。选材涵盖了高考和全国数学联赛的内容和题型，有益于读者在高考和数学竞赛中创造佳绩，走向成功。

由于编写与新教材配套的课外读物对于我们是一种新的尝试，难免出现这样或那样的疏漏和不足，敬请读者提出批评和建议，以便再版时修改，使这套丛书成为受广大师生欢迎的中学数学课外读物。

叶尧城

2002 年 1 月

内 容 提 要

本书较系统地阐述了不等式的基本性质，较简捷地介绍了不等式的解法，较科学地展示了不等式证明的常用方法，同时有机地渗透了不等式的应用。

本书叙述简明、通俗易懂，具有一定的创新性，与新教材同步，但又不拘泥于新教材，难度适中，既有与高中数学课堂教学同步的内容，又有全国高中数学联赛或同等难度的试题，也有国际数学奥林匹克试题或相当水平的问题。适合于不同层次的中学生自学，同时，也为中学数学教师提供教学参考，还有助于不等式研究的爱好者捕捉有用的信息。

目录

第一章
不等式的性质

人类社会是一个充满矛盾的世界.矛盾的双方既对立又统一,双方依据一定的条件各向其对立面转化,它反映在数量上,就是相等与不等.相等是相对的,不等是绝对的,在日常生活、生产活动和科学研究中,经常遇到的大小、多少、高低、轻重、长短、远近、快慢等,都是矛盾在数量关系上的具体体现.

相等与不等问题在数学中主要就是方程与不等式的问题,方程与不等式是研究函数性质的基本工具,研究的是数值函数在特殊取值下的自变量的取值情况,可以说方程与不等式分别是函数值取零、正值或负值时自变量应满足的条件,函数在某些情况下,也可用方程或不等式表示,函数、方程、不等式的关系非常密切,是相辅相成的.

本书主要研究不等式的解法和不等式的证明,同时兼顾它们的应用.

第一节　不等式的基本概念

不等式的基本概念是学习不等式理论的前提.我们一定要深入领会、透彻理解有关概念的内涵和外延,为学习不等式

的解法和不等式的证明打下坚实的基础.

1. 不等式的基本概念.

我们知道,表示不等关系的式子,叫做不等式.这是不等式的原始定义.学习了函数以后,还可以从函数角度来定义如下:

用不等号连接两个函数所得的式子叫做不等式,记作 $f(x) > g(x)$,$f(x) \leqslant g(x)$ 等.

不等号“$>$”、“$<$”、“$\geqslant$”、“$\leqslant$”中的每一个符号都表示一种不等关系,分别读作“大于”、“小于”、“大于等于”(或“不小于”)、“小于等于”(或“不大于”).

能使含有未知数的不等式成立的未知数的值叫做这个不等式的解;求不等式的所有解或证明该不等式无解的过程叫做解不等式;把某个不等式的解的全体组成的集合叫做这个不等式的解集.

证明不等式成立的过程叫做证明不等式.

2. 不等式的分类

不等式的分类方法是多种多样,每一种分类方式都有各自不同的用法.

1) 按不等式中是否含有等号分为:严格不等式和非严格不等式.

用“$<$”或“$>$”号连接的不等式叫严格不等式,用“$\leqslant$”或“$\geqslant$”号连接的不等式叫做非严格不等式.

解非严格不等式,应注意其解集是否包含端点值;证明非严格不等式,有时可以根据等号成立的条件出发去证明,证明严格不等式有时可以通过加强命题的方法,转化为证明非严

格不等式去证明.

2) 按不等号开口方向分为:同向不等式与异向不等式.

在两个不等式中,如果每一个的左边都大于(或小于)右边,这两个不等式就是同向不等式.例如 $a+2>a^2+1$,$2a^2+1>4a$ 就是同向不等式;如果一个不等式的左边大于(或小于)右边,而另一个不等式的左边小于(或大于)右边,这两个不等式就是异向不等式,例如 $a^2+2>3a$、$a^2+1<4a$ 是异向不等式.特别地,把不等式的左边和右边交换,所得不等式与原不等式异向.

将不等式区分为同向与异向,对于理解和掌握不等式的基本性质大有帮助.

3) 按不等式对于其中字母能使其成立的取值范围,分为绝对不等式、条件不等式和矛盾不等式.

如果不论用什么实数代替不等式中的字母它都能成立,这样的不等式叫绝对不等式.例如,不等式 $x^2\geqslant 0$,$(a-b)^2\geqslant 0$ 就是绝对不等式.

如果只有用某限定范围内的数值代替不等式中的字母,它才能成立,这样的不等式叫做条件不等式.例如:不等式 $3x+2<2x+3$ 为条件不等式(只有当 $x<1$ 时不等式才能成立).

如果无论用什么数值代替不等式中的字母它都不成立,这样的不等式叫做矛盾不等式.例如,不等式 $x^2<0$ 就是矛盾不等式.

将不等式区分为绝对不等式、条件不等式和矛盾不等式,对于解(证)不等式是非常有用的.

4) 按构成式子的特点(即函数的类型)分为:代数不等式

和超越不等式.

当不等式两边的解析式都是代数式,那么这个不等式叫做代数不等式.如果不等式两边的解析式中至少有一个超越式,那么这个不等式叫做超越不等式.

代数不等式又可分为有理不等式和无理不等式,有理不等式包括整式不等式和分式不等式,无理不等式又称为根式不等式.

超越不等式又可分为初等超越不等式(指的是指数不等式、对数不等式、三角不等式和反三角不等式)和非初等超越不等式(如含绝对值的不等式等).

如果不等式中含有的函数都是整式,这样的不等式就叫做整式不等式;如果不等式中含有的函数至少有一个是分式函数,其他函数是整式函数,则这个不等式就叫做分式不等式;如果不等式中含有无理函数式,其他函数是有理函数式,则这个不等式就叫做无理不等式;如果不等式中含有指数函数(或对数函数),则这个不等式就叫做指数不等式(或对数不等式);如果不等式中含有三角函数(或反三角函数),则这个不等式就叫做三角不等式(或反三角不等式);所有不等式(指整式不等式、分式不等式、无理不等式、指数不等式、对数不等式、三角不等式、反三角不等式)增加绝对值符号后都是含有绝对值的不等式……

对于整式不等式,根据未知数的个数分为:一元不等式,二元不等式,…,m 元(含有 m 个未知数)不等式;根据未知数的次数分为:一次不等式,二次不等式,…,n 次(未知数的最高次数为 n 次)不等式.根据未知数的个数和次数分为:一元一

次不等式，一元二次不等式，…，二元一次不等式，…，m 元 n 次不等式.

含有 m 个未知数且未知数的最高次数为 n 次的整式不等式叫做 m 元 n 次不等式.

一元不等式的分类表如下：

- 一元不等式
  - 代数不等式
    - 有理不等式
      - 整式不等式
        - 一次不等式
        - 二次不等式
        - 高次不等式
      - 分式不等式
    - 无理不等式
  - 超越不等式
    - 初等超越不等式
      - 指数不等式
      - 对数不等式
      - 三角不等式
      - 反三角不等式
    - 非初等超越不等式：如绝对值不等式等

5）对于 m 元 n 次不等式，根据每项未知数的次数是否相同分为：齐次不等式和非齐次不等式.

如果各项次数都相等，这样的 m 元 n 次不等式叫做 n 次齐次不等式. 例如 $a^3+b^3+c^3 \geqslant 3abc(a、b、c>0)$ 的各项次数都是3，是3次齐次式. 各项次数不都相等的 m 元 n 次不等式，叫做非齐次不等式. 例如，若 $a+b+c=1$，则 $4(ab+bc+ca)-9abc \leqslant 1$ 是非齐次的.

对于 m 元 n 次齐次式 $f(a_1,a_2,\cdots,a_m)=k_1a_1^n+k_2a_2^n+\cdots+k_ma_m^n$，显然对任意 $t>0$，恒有 $f(ta_1,ta_2,\cdots,ta_m)=t^nf(a_1,a_2,\cdots,a_m)$. 因而在证明齐次不等式时通常令 a_1+a_2

$+\cdots+a_m=1$.例如:设 x、y、z 是正实数,求证:

$$\frac{1}{8}(x+y)(y+z)(z+x)-\frac{1}{3}(x+y+z)(xyz)^{\frac{2}{3}}\geqslant 0,$$

只需对 $x+y+z=1$,证明不等式:

$$(xyz)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)\geqslant\frac{8}{3}\text{ 成立.}$$

注意到 $\left(\frac{1}{x}-1\right)\left(\frac{1}{y}-1\right)\left(\frac{1}{z}-1\right)=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 9$,知 $9\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}-1\right)\geqslant 8\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)$,从而只需证:

$$\frac{8}{9}(xyz)^{\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\geqslant\frac{8}{3}.$$

这只需用 $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\geqslant 3(xyz)^{-\frac{1}{3}}(x,y,z>0)$ 即可得证.

齐次不等式与非齐次不等式在一定的条件下是可以相互转化的.例如,在“若 $a+b+c=1,a,b,c\geqslant 0$,则 $4(ab+bc+ca)-9abc\leqslant 1$(非齐次不等式)”中,用1换 $a+b+c$ 或 $(a+b+c)^3$,代入 $4(ab+bc+ca)-9abc\leqslant 1$ 即得 $4(ab+bc+ca)(a+b+c)-9abc\leqslant(a+b+c)^3$,此即为齐次不等式.反过来,用1代替 $a+b+c$ 或 $(a+b+c)^3$,上式又变为非齐次不等式.

齐次不等式与非齐次不等式的互化,在解(证)不等式中经常用到.

6) 按不等式中任意两个字母的位置是否能对调分为轮换对称不等式与非轮换对称不等式.

在一个不等式中，如果把不等式中的字母 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 按一定顺序依次轮换（如 a_1 换成 a_2，a_2 换成 a_3，$\cdots$，a_{n-1} 换成 a_n，a_n 换成 a_1）后，不等式不变，这样的不等式叫做关于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的轮换对称不等式. 例如不等式 $\frac{a_1}{a_1+2a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_1+a_2+2a_3}+\frac{a_3}{2a_1+a_2+a_3}\geqslant\frac{3}{4}$，$a_1,a_2,a_3>0$，便是关于 a_1,a_2,a_3 的轮换对称不等式.

在一个不等式中，如果把其中任何两个字母 a_i 和 a_j（$i,j=1,2,\cdots,n$ 且 $i\neq j$）对调位置后，这个不等式不变，这样的不等式叫做关于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的对称不等式. 例如不等式 $\frac{a_1}{2a_1+a_2+a_3}+\frac{a_2}{a_1+2a_2+a_3}+\frac{a_3}{a_1+a_2+2a_3}\leqslant\frac{3}{4}$（$a_1,a_2,a_3>0$）便是关于 a_1,a_2,a_3 的对称不等式.

由轮换对称不等式与对称不等式的定义可知，对称不等式一定是轮换对称不等式，而轮换对称不等式却不一定是对称不等式.

关于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的对称不等式，由于 a_i 与 a_j（$i,j=1,2,\cdots,n$，且 $i\neq j$）互换后原不等式不变，因此，要想按某种方式排列它们的大小顺序，只要调换其位置即可，故可以任意排列 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的大小顺序. 因此，在证明对称不等式时，常可以增设条件：不妨设 $a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$ 或 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_n$. 而关于 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的轮换不等式（不包括对称不等式），则不能任意排列其字母的大小顺序，而只能作较弱的排列，如 $a_1\geqslant a_n,a_2\geqslant a_n,\cdots,a_{n-1}\geqslant a_n$，或 $a_1\leqslant a_2,a_1\leqslant$

$a_3,\cdots,a_1 \leqslant a_n$,即某一个是其中最小的或最大的,总可以通过轮换把某个字母调整到最小或最大的位置.因此,在证明轮换对称不等式(而不是对称不等式)时,只能增设条件:不妨设 $a_1 \geqslant a_n, a_2 \geqslant a_n, \cdots, a_{n-1} \geqslant a_n$ 或 $a_1 \leqslant a_2, a_1 \leqslant a_3, \cdots, a_1 \leqslant a_n$.

在不等式中,如果把不等式中的字母 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 按一定顺序依次轮换(如 a_1 换成 a_2,a_2 换成 a_3,$\cdots$,a_{n-1} 换成 a_n,a_n 换成 a_1),不等式发生改变,这样的不等式叫做非轮换对称不等式.例如:不等式 $\frac{1}{a_1}+\frac{4}{a_2}+\frac{9}{a_3} \geqslant \frac{36}{a_1+a_2+a_3}, a_1, a_2, a_3>0$(非轮换对称不等式),用 a_1 换 a_2,a_2 换 a_3,a_3 换 a_1,得不等式:$\frac{9}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{4}{a_3} \geqslant \frac{36}{a_1+a_2+a_3}, a_1, a_2, a_3>0$(非轮换对称不等式).

第二节　不等式的基本性质

不等式的基本性质是解不等式和证明不等式的重要依据,如果不等式的基本性质含糊不清,解不等式和证明不等式就容易错误百出,不能自圆其说.

1. 实数的基本性质

在实数集或在其子集里,才能比较两数的大小,而在复数集中,两个复数不一定能比较大小.在不等式中不等号两边的式子,要求能够比较大小.因此,只有在实数集或在其子集里才能研究不

等式,本书在没有作特别声明时,所指的数均是实数.

在研究不等式的性质,解不等式和证明不等式时,经常要用到实数的一些基本性质,这些基本性质可概括为8条公理.

公理1 a 是正数 $\Longleftrightarrow a>0$,

b 是负数 $\Longleftrightarrow b<0$,

$a>0$ 且 $b<0 \Longrightarrow a>b$.

公理1可表述为:正数大于零,负数小于零,正数大于负数.

公理2 若 $a>0, b>0$,则 $|a|>|b| \Longleftrightarrow a>b$.

若 $a<0, b<0$,则 $|a|>|b| \Longleftrightarrow a<b$.

公理2可表述为:正(负)数中,绝对值较大的数其数值较大(小),反之亦然.

公理3 $a>0 \Longleftrightarrow -a<0$,

$a<0 \Longleftrightarrow -a>0$.

公理3可表述为:正(或负)数的相反数是负(或正)数.

公理4 $a-b>0 \Longleftrightarrow a>b$,

$a-b=0 \Longleftrightarrow a=b$,

$a-b<0 \Longleftrightarrow a<b$.

公理4可表述为:两数之差大于零,则被减数大于减数;两数之差等于零,则两数相等;两数之差小于零,则被减数小于减数,反之亦然.这是实数的三歧性.

公理4是实数的基本出发点,是实数大小比较的依据,通过“作差”并确定差的符号是实现两个实数比较大小的基本方法.

公理5 $a>0$ 且 $b>0 \Longrightarrow a+b>0$,

$a<0$ 且 $b<0 \Longrightarrow a+b<0$.

公理5可表述为:两个正(或负)数的和仍是正(或负)数.

公理 6 $\begin{cases}a>0\\b>0\end{cases}$或$\begin{cases}a<0\\b<0\end{cases}\Longleftrightarrow a\cdot b>0\Longleftrightarrow\dfrac{a}{b}>0.$

$\begin{cases}a>0\\b<0\end{cases}$或$\begin{cases}a<0\\b>0\end{cases}\Longleftrightarrow a\cdot b<0\Longleftrightarrow\dfrac{a}{b}<0.$

公理 6 可表述为:同号(或异号)两数相乘或相除,其积或其商为正数(或负数),反之亦然.

公理 7 若 $a>0$,且 $b>0$,则:

$$a>b\Longleftrightarrow\frac{a}{b}>1,$$

$$a=b\Longleftrightarrow\frac{a}{b}=1,$$

$$a<b\Longleftrightarrow\frac{a}{b}<1.$$

公理 7 可表述为:两正数之商大于 1,则被除数大于除数;两正数之商等于 1,则被除数等于除数;两正数之商小于 1,则被除数小于除数,反之亦然.

公理 7 是作商法的理论依据.

公理 8 $a\in R\Longleftrightarrow a^2\geqslant 0.$

公理 8 可表述为:任何一个实数的平方都不小于零,反之亦然.

此外,还有:除零外,任何实数与它的倒数同号;两个正数,较大的倒数较小;正数的全量大于它的任一部分……

2. 不等式的基本性质

由实数的基本性质可顺利地推出不等式的 11 条基本性质.

定理 1 $a>b\Longleftrightarrow b<a.$

定理1是不等式的对称性,其证明要用到公理1、公理3、公