

管小思 著

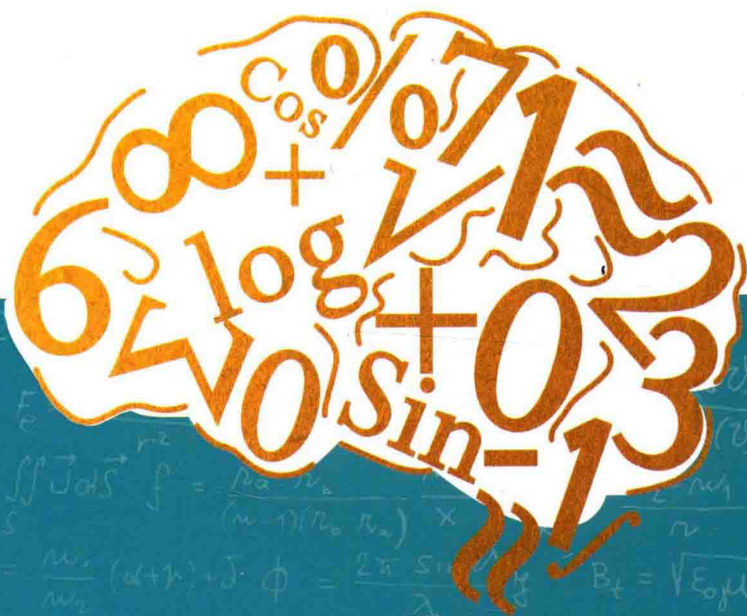
哥德尔定理和悖论、霍金虚时间概念的含义

实数轴上长度为零的点能够充满实数轴吗

突破局限性与推理惯性的束缚

互补模式的规律、生命系统的宏观核心结构模型

开启深层意识、生活对策原理



精英大学生必读

数学智慧

跃迁

精英大学生必读

数学智慧跃迁

管小思 著



同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书讨论的是一些人们曾经思考过的、具有深刻思想并与数学相关的问题。而其基础都在大学数学这一层次上。

本书第1章讨论了与“图灵机”原理扩展有关的“概念定义的一般方法”、“思维过程的定义”、“概念的抽象原理”、“悖论的原理”、“哥德尔定理”和“虚时间概念”等。

“图灵机”原理规定了现代计算机计算能力的极限。所以,如何突破“图灵机”原理对计算机发展的限制,是现代计算机理论发展必须面对的根本性问题,第一章的讨论将会使读者找到解决这一问题的思路。

第2章分为两个部分,第一部分讨论了“分析学”的基本概念,即“无穷”概念的本质,确切说明了“非标准分析”的范畴大于“传统的标准分析”;第二部分则对近世代数学(即抽象代数)的起源和“伽罗瓦理论”的原理做了简单的、整体性的讨论。通过这两部分的讨论,不仅可以使读者获得对数学基本思想方法的认识,也可获得对重要数学思想具体跃迁过程的深刻理解。

第3章讨论了人类思想史中的“易学原理”在社会复杂性控制理论中的系统应用。在学习了大学数学之后,人们都会有一个共同的感觉,即在具体现实生活中很难找到大学数学智慧的实际运用。通过第3章的讨论,会使读者理解到如何将大学数学的严谨思维方式广泛运用到各种社会问题和现实生活的具体对策之中。

本书可作为高等院校理工、经管类专业学生学习大学数学的参考,也可供对数学思想方法、系统科学、人工智能原理、数学建模、数学哲学和数学教育有兴趣的读者阅读。

图书在版编目(CIP)数据

数学智慧跃迁/管小思著. —上海:同济大学出版社,2015.7

ISBN 978-7-5608-5870-8

I. ①数… II. ①管… III. ①数学—普及读物 IV. ①O1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第134251号

精英大学生必读

数学智慧跃迁

管小思 著

责任编辑 陈佳蔚

责任校对 徐春莲

封面设计 陈捷

插画 王石青

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn

(上海市四平路1239号 邮编200092 电话021-65985622)

经 销 全国各地新华书店

印 刷 常熟市大宏印刷有限公司

开 本 787 mm×960 mm 1/16

印 张 14.5

字 数 290 000

印 数 1—1 500

版 次 2015年8月第1版 2015年8月第1次印刷

书 号 ISBN 978-7-5608-5870-8

定 价 42.00元

本书若有印装质量问题,请向本社发行部调换 版权所有 侵权必究

哥德尔定理和悖论、霍金虚时间概念的含义

实数轴上长度为零的点能够充满实数轴吗

突破局限性与推理惯性的束缚

互补模式的规律、生命系统的宏观核心结构模型

开启深层意识、生活对策原理

前 言

——系统科学视野下的大学数学智能思想

著名的“钱学森之问”是这样的：“这么多年培养的学生，还没有哪一个的学术成就，能够跟民国时期培养的大师相比。为什么我们的学校总是培养不出杰出的人才？”

围绕这个问题人们已经进行了很多讨论，它的一个重要方面是：现代大学教育中精英教育的基本目标是什么？一般认为可以概括为以下三个方面：

- (1) 严谨思维方式的训练；
- (2) 培养迅速掌握基础知识和敏锐抓取各类事物核心信息的能力；
- (3) 培养有独立性思想，并且能够站在巨人肩膀上去洞察事物本质的能力。

第1个和第2个方面在发达的现代信息时代是不难达到的，比如可以将基础教学分类为：“基础知识类(基本要求内容)、扩展类(自学与考查内容)和开放类(广泛的兴趣方向)”；而最关键的是如何达到第3个目标，对此我们做以下简要讨论：

任何科学技术知识都是前人在理论和实践中，通过深刻地洞察和总结各类事物本质之后的结晶。所以在传授科学技术知识时，应该重视分析前人在创造这些知识时的主、客观环境，以及传授前人洞察和分析事物本质的思想方法，这样在掌握了前人知识成果的同时，也学习了创造这些知识的方法。



科学伟人和学术巨擘们创造了大量辉煌夺目的科学业绩,与此同时,他们也常常流露并记录下他们在创造和研究过程中的深刻感悟。数学史上有很多耐人咀嚼与无限回味的至理名言,这些都是科学家们对科学研究方法的心得体会,也是他们衡量自己学术成果的重要标准。

俗话说:“山山水水一世界,入各法眼皆不同。”数学大师庞加莱(Poincaré)说:“一个名副其实的科学家,尤其是数学家,在自己的工作中,应当体验到一种与艺术家共有的感觉,其乐趣和艺术家的乐趣之间存在着一种共同的性质,一种同样伟大的力。”庞加莱将数学中这种“同样伟大的力”概括为“统一性、简洁性、对称性、协调性和奇异性”。

著名数学史学家和数学教育家 M·克莱因(M. Kline,《古今数学思想》一书的著者)对数学的发展和数学教育之间的关系做出过精辟的论述,他说:“通常的一些数学课程也使人产生一种幻觉。它们给出一个系统的逻辑叙述,使人们有这种印象:数学家们几乎理所当然地从定理到定理,数学家能克服任何困难,并且这些课程完全经过锤炼,已成定局。学生被湮没在成串的定理中,……历史却形成对比。它教导我们,一个科目的发展……常常需要几十年,甚至几百年的努力才能迈出有意义的几步。……创造过程中的斗争、挫折,以及在建立一个可观的结构之前,数学家所经历的艰苦漫长的道路……”

禅语说:“参透本质,究竟理趣,殊无二致。”

我们在学习和进行科学研究的过程中,也常常只有在经历了一番艰辛之后,将困难的问题借助理解前人的理论从而达到条理清晰、水落石出的境地,这时我们才能感受到什么是思想上的通透,感受到和前辈大师们的思想发生了相通和共鸣,体会到什么才叫做“真理为一体,一体为真理”的高层次境界,而追求真理正是一代代科学家们为之焚膏继晷、不懈努力的方向。

为了有助于实现第3个目标,根据以上思考,本书主要讨论了历史上人们曾经思考过的、具有深刻思想并且与数学相关的基本问题,而其基础都在大学数学这一层次上。从数学史中我们可以看到,数学的各次重大发展常常是不

断地对“传统的标准数学范畴”做出重大突破以后而实现的,是将传统的“数”与“形”以外的内容大量引进到数学之中的结果(例如“图灵机”理论和“哥德尔定理”等(见第1章),“分析学”中的“极限”概念和“抽象代数学”中“伽罗瓦理论”的基本内容等(见第2章)),出现这种现象正是因为数学是高度反映了人类纯粹智能中智慧精华的学科,而且也因为数学思想的发展,在本质上恰恰符合了人类智能发展的普遍性规律,所以在系统科学视野下对大学数学思想的精粹问题做一番系统性讨论,将会对培养独立性思想,并且能够站在巨人肩膀上去洞察事物本质的能力有重要价值。

本书在著述过程中,得到了作者的朋友、同事、单位领导和家人的大力帮助,对此致以真诚的感谢!还要特别感谢同济大学出版社的领导和责任编辑陈佳蔚女士,以及本书的插图作者王石青同学,为他们对本书的出版所给予的热忱帮助表示深挚的谢意!

本书中的错误之处在所难免,深望读者们能够赐予指正,作者将对此表示衷心的感谢!

管小思

2015年1月 于同济大学数学系

目 录

前言——系统科学视野下的大学数学智能思想

1 思维过程的模式——定义、思维的嵌套性结构	1
1.1 概念的定义方法和一般判断推理过程的描述	3
1.1.1 概念的两类定义方法	3
1.1.2 思维的定义	7
1.1.3 概念的一般判断推理过程和自学习过程的描述	10
1.2 思维模式的一个基本性质——判断推理过程中的嵌套性与“数学逻辑学悖论”	15
1.2.1 数学逻辑学悖论	15
1.2.2 数学逻辑学悖论的基本原理	20
1.2.3 机械性“条件反射”模式(“图灵机”)的原理与“图灵机停机问题”	22
1.3 “概念嵌套性推理过程”中存在“逻辑转门”的典型例子	28
1.3.1 一个“不可判定的命题”	30
1.3.2 “对角线方法”和另一个与“哥德尔定理”相关命题的重要证明	33
1.4 “虚时间”概念的基本性质	40
1.4.1 时间概念和虚数	41
1.4.2 虚数逻辑行为的深层意义	47



2	分析和代数——无穷的“动态”定义与代数方法的跨越“局限性”特征	55
2.1	分析的结构——无穷的“动态”定义,非标准分析	58
2.1.1	让“微积分基本公式”的本质能够一目了然	58
2.1.2	“无穷”概念的本质	63
2.1.3	实数点充满实数轴的问题	69
2.1.4	实数轴上除实数点全体之外是否漏掉了其他重要几何要素	71
2.1.5	无穷量的“动态”定义	82
2.1.6	“等价柯西序列”——“几何点充满数轴”的另一种解释方法	93
2.1.7	动态“无穷”概念的一个重要应用	94
2.2	代数方法的跨越局限性特征——突破推理“惯性”的束缚	105
2.2.1	对现代数学方法产生了重大影响的数学学科——抽象代数学的诞生	105
2.2.2	数学家阿贝尔和伽罗瓦	111
2.2.3	伽罗瓦理论的基本原理	120
3	开启深层意识——互补模式的规律和基本对策原理	143
3.1	生命系统的宏观抽象核心模型结构	145
3.1.1	思维想象过程中对宏观生命系统动态行为模式要素的分类	145
3.1.2	宏观互补模式状态的基本相互作用规律	149
3.1.3	中医学经络模型在社会宏观经济理论模型中的应用	160
3.2	基本对策原理	167
3.2.1	生命系统的内部控制结构	167
3.2.2	生命系统的对外博弈结构	170
3.2.3	《易经》卦爻辞的一些重要例子(《乾》、《坤》、《比》、《大有》、《大畜》、《大过》、《恒》、《鼎》、《归妹》、《旅》、《涣》)	176
3.2.4	《易经》卦象与天干、地支周期	195
3.2.5	自我优势潜在性格资源的开发和规避性格劣势引致的灾伤风险	200
3.2.6	从朦胧意识到清晰意识	213
	参考文献	220

1 思维过程的模式

——定义、思维的嵌套性结构

数学的重要特点是“使用严格的逻辑思维推理方式来研究和表述各类事物的状态及其相互关系”。过去人们认为——数学仅仅是一门“研究事物的空间位置和数量关系”的科学，事实上，这种看法只适应于古典数学的基本特性，现代数学研究的对象早就大大超出了这一范围，它已经进入到了全部自然科学的领域和大部分的社会科学领域。

随着科学研究的深入发展，对“数学科学”自身的研究也成为了科学研究的对象，其中人们获得的最早期的重大研究成果就是对数学计算行为自身的研究。通过对数学计算行为自身规律的研究，创立出了著名的“图灵机理论”和“冯·诺依曼理论”，等等，这些重要理论成果为现代计算机科学的发展奠定了根本性理论基础。计算机科学的蓬勃发展为今天社会作出的巨大贡献是有目共睹的，也是任何一门具体数学分支学科所无法比拟的。

计算机科学的巨大成就促使人们对人类智能行为自身规律进行更加深入的理论和应用研究，于是形成了人工智能科学和思维科学等领域，这些学科在本质上是通过对人类智能行为基本规律的研究，使得现代计算机科学技术和各种信息技术越来越智能化，从而大大提高其应用价值，最终达到加快和促进人类社会发展的目的。

使用严谨的逻辑思维推理方式来研究人类计算行为的本质规律，这一点已经被人类所做到并且获得了巨大的成功，接下来利用严谨的逻辑思维推理方式来研究人类智能行为的本质规律，这将是一个极其长远与更加宏伟的目标和领



域,该研究领域的困难程度是不言而喻的,但是它的巨大理论意义和各个阶段性的成果必将会对促进人类社会的发展具有重要的现实性意义。

阿兰·麦席森·图灵(Alan Mathison Turing, 1912年6月23日—1954年6月7日)(图1-1),被誉为“计算机科学之父”和“人工智能之父”。计算机逻辑的奠基者,提出了“图灵机”和“图灵测试”等重要概念。美国计算机协会(ACM)设立的以其名命名的“图灵奖”是计算机界最负盛名和最崇高的一个奖项,有“计算机界的诺贝尔奖”之称。



图 1-1

冯·诺依曼(John von Neumann, 1903年12月28日—1957年2月8日)(图1-2),20世纪最重要的数学家之一。在现代计算机、博弈论和核武器等诸多领域内有杰出建树的最伟大的科学全才之一,被称为“计算机之父”和“博弈论之父”。



图 1-2

概念的定义方法和一般判断推理过程的描述

如果想理解人们是怎样对事物进行思维时,就必须使用思维。那么思维能够思考思维吗?

1.1.1 概念的两类定义方法

一切严谨的逻辑思维推理方式总是建立在严格的概念定义基础之上的,如果我们要运用严谨的逻辑思维推理方式来研究人类智能行为的本质规律,就必须首先对所研究的对象建立起严谨的基本概念。对人类智能行为本质规律的研究,事实上也就是对人类思维过程本质规律的研究,那么对“人类一般思维过程”怎样才能给出一个明确的概念定义,并且这一定义必须表现了“人类一般的思维过程”的本质,而不是仅仅做出范围上的界定呢?为此,我们首先对人们在进行严谨的概念定义时所使用的的基本方法做一系统性的分析。

归纳人类在进行各种理论和应用研究中对大量概念的定义方法,可以看到对概念的基本定义方法能够分成为两大类,第一类就是我们通常在大量理论教科书和各种科学文献中看到的那种方法,我们把这种方法称作为“概念的演绎定义方法”。

“概念的演绎定义方法”可以叙述为如下形式:

“首先从一些被人们看作为已知的概念出发,然后把这些已知概念按照某种特定关系结合起来,所得到的结果即称作为被定义的事物的概念。”

这种定义方法我们是十分熟悉的,它可见于各种理论体系内部对已知概念作系统的陈述之中。

但是当我们遇到了比较陌生的或者在整体认识和把握上较困难或者非常困难的事物时,应该如何给出其概念的适当定义呢?这就需要使用下面详细讨



论的第二类定义方法,即所谓“概念的操作定义方法”,或者也可以称作为“概念的行为定义方法”。

“概念的操作定义方法”可这样一般地叙述:

“直接从观察所要定义的事物出发,认为该事物不宜使用演绎定义方法直接定义,或者虽然可以用演绎方法去定义,但其定义和具体使用之间的关系不密切。这样在使用中就常采用以下的方法:在一个具体的使用或者操作范围内,由于与使用有关的所述事物在使用过程中必定可以以某些特定的行为、包括一些偶然性的行为不断地表现出来(没有这些特定行为也就没有必要去定义这个事物的概念了),所以人们就可以从这些特定行为表现上去定义该事物的概念。”

例如:

(1) 时间概念的操作定义——一般认为,时间指不同的运动在人们意识中相互比较的结果。人们在大量不同的运动中选择出一种相对说来较规律的、并且容易度量的运动去统一地度量其他所有运动,这就是统一度量意义下的时间概念——即通常使用中的时间概念。(在后面 1.4 节我们还将进一步深入讨论这个概念)

(2) 空间概念的操作定义——通常认为,空间指事物(或事务,包括具体事物和抽象事物等)在某种意义上能够存在的一切不同场合的集合。

比如,实数集合可被看作为变量 x 的赋值“空间”;电磁场、电力场、引力场、生物场(这些都被看做是“物质”)和所有物质能够存在的所有不同场合的集合则称为是现实意义上的物理“空间”;……

从上面叙述能够看到“操作定义方法”具有以下两种重要的基本性质:

第一,由于概念的操作定义过程直接建立在实际观察和具体操作的前提下(包括主、客观两个方面),因此,随着人们在定义过程中对事物的观察或操作的不断深入,事物的概念会相应地不断发生改变,所以定义本身常是动态发展着的。

第二,操作定义方法是形成逻辑判断的起点。对这一点我们可以用以下方式来初步地理解这个性质。不妨假设任意给定了一个被定义的事物,又假设它可以用演绎定义方法去定义(这样做并不失一般性),于是我们就可以自然地得

到用来组成这一概念的一些较简单的“被分解之后的”概念,这些简单的分解性概念中的一部分或者全部也许又可以由一些更为简单的概念来组成,即可以进一步用演绎定义方法来定义,如此类推……,最后我们总会达到这样一群“简单概念”,这些简单概念难以再由演绎定义方法去定义,因而只能用概念的操作定义方法定义。于是,我们就能够在某些特定的观察与操作前提下来确定这些将要被定义的简单概念与周围事物,包括同记忆中类似的事物概念之间存在的相同、差异、包含关系,等等(这些逻辑性质显然能够通过依次建立或采用某些简单对立概念来表示,例如事物之间的一种最简单的差别必然可以对应一对简单对立概念,等等),最后当事物在特定的观察或使用操作前提下的基本逻辑判断特征被明确地表示出来之后,我们就不仅仅从感觉上,而且也从逻辑判断的行为上获得了被定义的事物的概念,如图 1-3 所示。

(在一定观察与操作前提下按某些先后顺序使用的“简单对立概念对”)

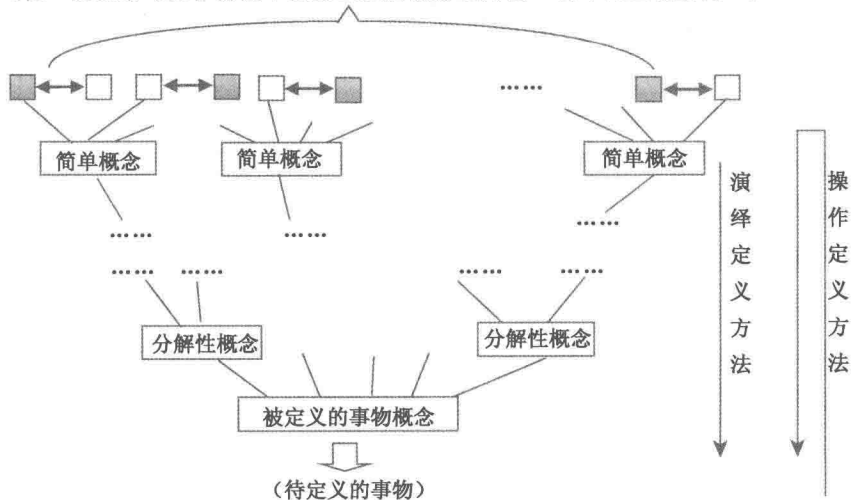


图 1-3 概念定义的结构

例如：“1”的操作定义及其逻辑判断性质。

原始意义下，“1”被认为是指与人们注意任意明确事物时的注意过程自身的对应。“1”的逻辑判断行为就是将目前要考虑的事物同目前不要考虑的事物区别开(“1”的对立概念自然应该对应于目前考虑之外的那些事物的可能考虑



过程),由于“单个”事物是容易区别的对象,所以在习惯上人们又常常把“1”同判断“单个”事物直接联系起来。“1”的概念确立之后,其本身也成为了能够被考虑的一种“抽象”事物,在这种意义下,“1”在行为上又进一步添加了一个重要性质:即使用上的可嵌套性。如:“1个1”、“1群1”,等等。这一性质是许多抽象概念所共同具有的!

从图 1-3 可以深入地看到:任何一个事物的概念,最终总是建立在一定的观察和操作前提下,并且以“简单对立概念”为基础的,所以简单对立概念之间的“相对判断”就恰好成为了形式逻辑和辩证逻辑的判断起点!

又如来具体考察下面一组简单对立概念:有无、同异、先后、大小、动静、彼此、是否、明暗、强弱、曲直、阴阳、清晰模糊、个别一般、绝对相对……。

不难看出,这些概念都具有两个共同的基本性质,即“相互依赖性”和“相对性”。“相互依赖性”是指任意某个处在“极化的”(即明确的、分化的)状态下的事物所对应的(用来表示或分辨这种状态的)两个互相排斥的概念是互相依赖而存在的。相对性则是指对立概念的双方通常同它们各自要表达的具体事物之间没有固定的直接对应关系,在不同的使用前提下,其中任何一方可以先后表达某一事物中不同的相互对立着的方面,这正是一切具体事物概念都具有着辩证性质的依据所在。

下面来考察“强弱”这对概念:任何条件下,“强弱”总是相对的、互相依赖而存在的、不同使用的前提下可以互相转化的,等等(图 1-4)。其余对立概念的性质可依此类推。基本对立概念的性质在第 3 章中还将深入地讨论。

演绎定义方法是操作定义方法的一种特殊情况,而操作定义方法定义概念的逐渐深化过程则是演绎定义方法的逆过程,即概念从个别发展到一般的归纳过程。

从图 1-3 可以看到,概念从“具体”发展到“(相对)抽象”的过程事实上就是对概念中某些“区分性”或“对立性”概念的消去过程。例如,考察三个简单概念:“ a 为实数”,“ a 为实数中的有理数”,“ a 为实数中的非有理数”。显然可以看出,后面两个概念在第一个概念的前提下是互相对立的,但同时又是一对“互补的”概念,去掉这种对立性的区分之后,后面两个具体的概念就同时上升为相对一般化(即相对抽象化)的概念了。这就是概念的“一般抽象原理”。

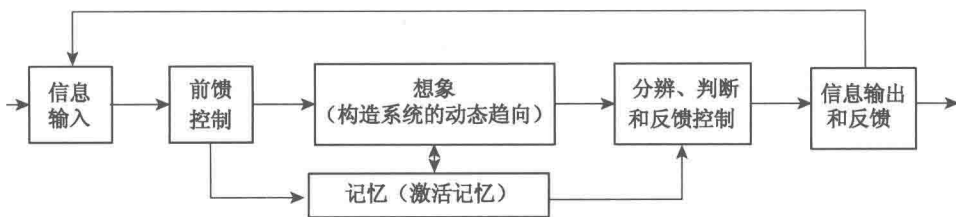


图 1-4 不同使用前提下“强”、“弱”的转化

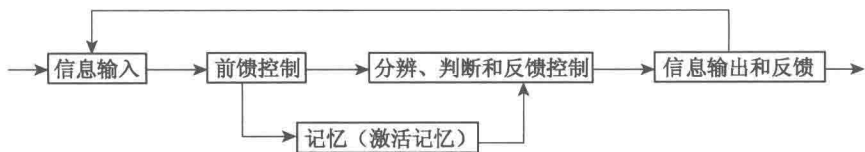
1.1.2 思维的定义

现在利用概念的操作定义方法可以初步地给出一个区分性的“思维定义”。这一定义是利用“条件反射”定义来做为对比而直接得到的。为了使讨论简单，假设条件反射定义及其各种性质为已知。

思维过程的大致结构可用图 1-5 的对比逻辑框图来表示。



(a) “大脑的思维过程”



(b) “大脑的条件反射过程”

图 1-5 思维过程的结构示意图

图 1-5(a)中示意的“思维过程”我们能够给出这样的一般描述：

“当大脑接受了来自外界或内部反馈的一些信息后，大脑就可以利用这些信息——同记忆中的信息相结合——产生若干想象的具体或抽象事物及它们的演变或运动过程，接下来大脑对这些想象过程中的各部分根据经验进行分辨和判断，然后将得到的结果再反馈到大脑的想象部分或者输出；或者结合发生过的思维过程一起存到大脑的记忆中作为以后进一步思考的材料，这个过程可以反复地进行下去……。”

图 1-5(a)中，当去掉了“想象”部分之后，思维过程便退化成为图 1-5(b)所示的条件反射过程(人们所熟悉的“图灵机”(TM)理论模型就可以被看成为是一个(其反射过程由人工建立的)“条件反射模式系统”)。这就是说，思维过程与条件反射过程的本质区别是：条件反射过程中不存在思维的“想象”部分(因而条件反射不具备思维的“理解”功能)！在思维中，大脑能够利用想象中的事物行为在大脑内部构造出具体或抽象事物及其演变或者发展的过程，然后大脑可以把以前对外部事物的分辨和判断能力转变到用于对这些“想象”中的事物上来，即大脑能够把对外部事物的条件反射过程搬进大脑，使之在一个纯粹想象的和记忆的世界中去进行。——这就是“思维”的本质所在！

柏拉图曾经给“人”这一概念下过如此的定义，称：“人是没有羽毛的两足动物”。他的这一定义得到了其追随者们的认可，但是有个聪明人(狄欧根尼)将一只拔掉羽毛的鸡拿到柏拉图学园对众人说：“这就是柏拉图所说的人！”(图 1-6)