工科大学数学类基础课程系列教材

概率论与数理统计

主　编　王保贵

科学出版社

工科大学数学类基础课程系列教材

概率论与数理统计

主　编　王保贵

副主编　谢俊来　邹广玉
　　　　张　玲　张劭婉

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书系统地介绍概率论与数理统计的基本内容以及数理统计的基本思想、原理与方法.内容包括随机事件与概率、一维随机变量及其概率分布、多维随机变量及其概率分布、数字特征、大数定律与中心极限定理、样本及抽样分布、参数估计、假设检验、方差分析与回归分析.各章都配有适量的例题与习题,习题又分为用于基本知识与计算训练的A类习题与综合能力训练的B类习题.本书的特点是着重理论联系实际.

本书可作为高等院校理工科及经济管理类各专业高年级本科学生概率论与数理统计课程的教材.

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王保贵主编.—北京:科学出版社,2015.8

工科大学数学类基础课程系列教材

ISBN 978-7-03-045082-1

Ⅰ.①概… Ⅱ.①王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材 Ⅳ.①O21

中国版本图书馆CIP数据核字(2015)第132167号

责任编辑:张中兴 / 责任校对:张凤琴

责任印制:霍 兵 / 封面设计:迷底书装

科学出版社出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

http://www.sciencep.com

文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2015年8月第 一 版 开本:720×1000 1/6

2015年8月第一次印刷 印张:21 3/4

字数:438 000

定价:39.00元

(如有印装质量问题,我社负责调换)

前　言

“天有不测风云，人有旦夕祸福”形象地说明随机现象的普遍存在，概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门学科，是数学的一个分支. 其理论与方法广泛应用于各个领域，如气象预报、保险业务等，并且渗透到许多学科，如随机分析、随机信号处理等，是人工智能、可靠性理论、风险分析与决策等学科的基础. 因此，概率论与数理统计是高等院校理工科及经济与金融管理类各专业学生必修的一门课程.

本书的第 1～5 章为概率论的主要内容. 第 1 章介绍随机事件及其概率的计算；第 2，3 章介绍随机变量及其概率分布；第 4 章研究随机变量分布中反映概率规律的一些重要的数字特征；第 5 章研究随机变量和的极限问题. 第 6～9 章为数理统计的部分内容. 第 6 章研究抽样及抽样分布；第 7～9 章利用样本观测值，依据概率论及抽样分布对总体的分布或总体分布中的未知参数进行估计以及对它们进行检验.

本书的特点：难易适度，注重启发与思考，理论联系实际，便于学生的学习及能力的提高.

本书的第 1 章由张玲编写；第 2 章与第 4 章由张劭婉编写；第 3 章由邹广玉编写；第 5 章、第 6 章及第 9 章由王保贵编写；第 7 章与第 8 章由谢俊来编写.

编写过程中得到长春工程学院理学院的大力支持，在此表示感谢.

由于编者水平有限，书中不妥之处在所难免，恳请大家批评指正.

编　者

2015 年 3 月 26 日

目　录

第 1 章　随机事件与概率

概率论与数理统计是数学的一个有特色且十分活跃的分支.一方面,它有别开生面的研究课题,有自己独特的概念和计算方法,内容丰富,结果深刻;另一方面它与其他学科又有着密切的联系,是近代数学的重要组成部分,由于它近年来突飞猛进的发展与应用的广泛性,目前已发展成为一门独立的一级学科,该学科的理论与方法已经广泛应用于工业、农业、军事和科学技术中,同时它又向基础学科、工科学科渗透,与其他学科相结合发展成为重要学科.

概率论与数理统计是研究随机现象统计规律性的一门数学学科,为了揭示随机现象的内在规律,建立严密的逻辑体系,本章主要介绍随机事件、概率的定义和性质、古典概型与几何概型、条件概率以及事件的独立性等内容.

1.1　随 机 试 验

在自然界和人类社会生活中常常会出现各种各样的现象.例如,一枚硬币向上抛起后必然落地;每天早上太阳从东方升起;在相同的大气压与温度下,气罐内的分子对罐壁的压力是常数.这类现象的共同特点是:在可以控制的条件一定时,观测到的结果也一定,这类现象称为**确定性现象**.另一类现象则不然.例如,用同一门炮向同一目标射击,各次的弹着点不尽相同,而在一次射击之前无法预测弹着点的确切位置;又如,抛一枚硬币,着地时可能出现正面朝上,也可能出现反面朝上,而在每次抛掷之前,无法确定正面朝上还是反面朝上,呈现不确定性;再如,新出生的婴儿性别,有可能是男孩,也有可能是女孩,也呈现不确定性.但是人们经过长期实践并深入研究之后,发现这类现象在大量试验或观察下,它的结果呈现出某种规律性.例如,同一门炮向同一目标射击的弹着点按照一定的规律分布,多次重复的抛一枚硬币得到正面向上的次数大致占到抛掷总次数的一半等.这种在个别观察中其结果呈现出不确定性,而在大量重复试验或观测中其结果又呈现出规律性的现象,称为**随机现象**,而这种规律称之为**统计规律**.

在现实生活中会遇到各种试验,试验是一个含义广泛的术语,它包含各种各样的科学实验,甚至对某一事物的某一特征的观察也认为是一种试验.

一般地,如果一个试验满足下列两个条件:

(1) 每次试验的可能结果不止一个,并且在试验之前能明确试验的所有可能结果;

(2) 进行一次试验之前不能预知哪一个结果会出现，
则称这样的试验为**随机试验**(random experiment)，用 E 来表示. 如果随机试验在相同的条件下可以重复地进行，则称为**可重复的随机试验**；否则，称为**不可重复的随机试验**.

下面举一些随机试验的例子.

E_1：抛一枚硬币连抛 2 次，观察正面出现的次数；

E_2：将一枚硬币连续抛 2 次，观察正面和反面出现的情况；

E_3：抛一枚骰子，观察出现的点数；

E_4：考察新生儿性别；

E_5：在一批电子元件中任意抽取一只，测试它的寿命；

E_6：记录某城市 119 防灾指挥中心一昼夜接到用户的呼叫次数；

E_7：观察某场篮球比赛的输赢；

E_8：观察某年国民生产总值的增长率.

试验 $E_1 \sim E_6$ 都是可重复的随机试验，而 E_7 和 E_8 均是不可重复的随机试验. 可重复的随机试验已经得到广泛深入的研究，有一套成熟的理论和方法. 但是随着科学技术的进步和社会经济的发展，特别是现代管理和决策分析的需要，不可重复的随机试验的研究引起了人们的广泛关注. 但本书着重讨论可重复的随机试验，因此，在不引起混淆的情况下，以后把可重复的随机试验简称为随机试验或者试验.

1.2　样本空间、随机事件

1.2.1　样本空间

对于随机试验，尽管在每次试验之前不能预知试验的结果，但试验的所有可能结果组成的集合是已知的，我们把随机试验 E 的所有可能结果组成的集合称为 E 的样本空间(sample space)，记为 S. 样本空间的元素，即 E 的每个结果，称为样本点.

如上述试验 $E_i(i=1,2,3,4,5,6)$ 的样本空间 S_i：

$S_1=\{0,1,2\}$；

$S_2=\{HH,HT,TH,TT\}$，其中 H 表示“正面”，T 表示“反面”；

$S_3=\{1,2,3,4,5,6\}$；

$S_4=\{B,G\}$，其中 B 表示“男孩”，G 表示“女孩”；

$S_5=\{t \mid t \geqslant 0\}$；

$S_6=\{0,1,2,3,\cdots\}$.

可见，试验 E_1 和 E_2 的过程都是将一枚硬币连续抛 2 次，但是由于试验的目的不同，所以样本空间 S_1 和 S_2 截然不同，这说明试验的目的决定着试验所对应的样本空间.

1.2.2 随机事件

在研究随机试验时，人们不仅关心试验的单个样本点，而且常常对于试验的某些样本点所组成的集合感兴趣. 例如，若规定某电子元件的寿命小于 1500h 的为次品，那么在 E_5 中我们关心电子元件的寿命是否有 $t \geqslant 1500$h，满足这一条件的样本点组成 S_5 中的一个子集 $A=\{t \mid t \geqslant 1500\}$，并称 A 是试验 E_5 的一个随机事件. 显然，当且仅当子集 A 中的一个样本点出现时，有 $t \geqslant 1500$h，即电子元件为合格品. 如果某次测试电子元件的寿命是 1650h 时，便认为随机事件 A 在这次试验中发生了.

一般地，称试验 E 的样本空间 S 的子集为 E 的**随机事件**(event)，简称为**事件**. 在一次试验中，当且仅当这一子集中的一个样本点出现时，称这一**事件发生**. 随机事件常用大写字母 A,B,C 等来表示.

特别地，由一个样本点组成的单点集，称为**基本事件**. 样本空间 S 包含所有的样本点，它是 S 自身的子集，在每次试验中至少有一个样本点发生，所以 S 必发生，因此 S 称为必然事件. 空集$\varnothing$不包含任何样本点，它也作为样本空间的子集，而它在每次试验中都不发生，称为不可能事件.

下面举出一些例子来理解概念.

例 1.2.1 在随机试验 E_2 中，事件"两次抛掷出现的都是同一面"，即 $A_2=\{HH,TT\}$；

在随机试验 E_3 中，事件"开大点"，即 $A_1=\{4,5,6\}$；

在随机试验 E_5 中，事件"寿命不超过 1700h"，即 $A_3=\{t \mid 0 \leqslant t \leqslant 1700\}$；

在 E_3 中有 6 个基本事件，即$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\},\{5\},\{6\}$；

在 E_4 中有两个基本事件，即{男}，{女}.

1.2.3 事件之间的关系和运算

在一个样本空间中，可以有许多的随机事件，希望通过对较简单的事件了解，去掌握复杂的事件. 为此，需要研究事件之间的关系和运算.

由于事件是一个集合，所以，事件之间的关系和运算自然按照集合论中的集合之间的关系和运算来处理. 下面这些关系和运算的提法是根据集合间的关系和运算，以及"事件发生"的含义给出的.

1. 事件的包含

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生，则称事件 B 包含事件 A，记为 $B \supset A$ 或者 $A \subset B$.

例如，事件 A 表示"电子元件寿命不超过 1200h"，事件 B 表示"电子元件寿命

不超过 1400h”，易见 $A \subset B$.

2. 事件的相等

如果事件 $A \subset B$ 且事件 $B \subset A$，则称事件 A 与事件 B 相等，记为 $A=B$.

3. 和事件

事件 A 与事件 B 至少有一个发生的事件，称为事件 A 与事件 B 的和事件，记为 $A \cup B$ 或者 $A+B$.

例如，事件 A 表示“两次均出现正面”，事件 B 表示“两次均出现反面”，则和事件 $A \cup B$ 表示“两次出现同一面”.

类似地，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 的和事件，称 $\bigcup\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots$ 的和事件.

4. 积事件

事件 A 与事件 B 同时发生的事件，称为事件 A 与 B 的积事件，记为 $A \cap B$ 或者 AB.

类似地，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$ 为 n 个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的积事件，称 $\bigcap\limits_{k=1}^{+\infty} A_k$ 为可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$的积事件.

5. 差事件

事件 A 发生而 B 不发生的事件，称为事件 A 与 B 的差事件，记为 $A-B$.

6. 互不相容事件

如果事件 A 与 B 不能同时发生，则称事件 A 与 B 互不相容，即 $A \cap B=\varnothing$.

7. 对立事件

如果事件 A 与 B 必有一个发生，且仅有一个发生，则称事件 A 与 B 互为对立事件. 事件 A 的对立事件记为 $\overline{A}$.

8. 完备事件组

如果事件 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 两两互不相容，即 $A_iA_j=\varnothing(i \neq j; i, j=1,2,3,\cdots,n)$，且 $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k=S$，则称 $A_1, A_2, A_3, \cdots, A_n$ 是样本空间 S 的一个完备事件组或样本空间 S 的一个划分.

用图 1.2.1～图 1.2.6 可直观表示上述事件间的关系及运算.

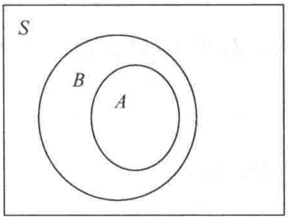

图 1.2.1 $A\subset B$

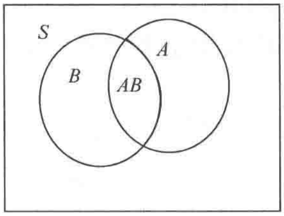

图 1.2.2 $A\cup B$

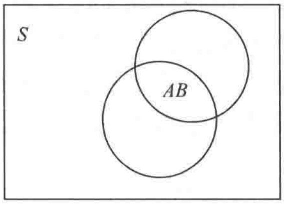

图 1.2.3 $A\cap B$

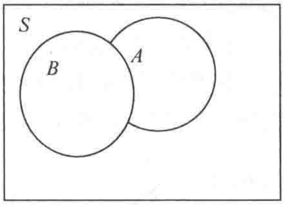

图 1.2.4 $A-B$

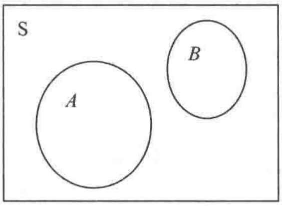

图 1.2.5 $A\cap B=\varnothing$

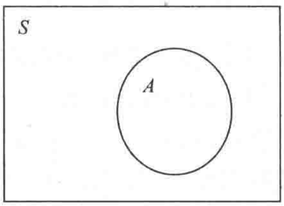

图 1.2.6 $\overline{A}=S-A$

设 A,B,C 为同一随机试验中的事件,其运算规律如下:

交换律 $A\cup B=B\cup A, A\cap B=B\cap A$;

结合律 $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C), (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$;

分配律 $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C), (A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$;

德·摩根律 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}, \overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

例 1.2.2 设 A,B,C 来自于同一试验、同一样本空间的三个事件,用 A,B,C 的运算关系表示下列各事件:

(1) A 发生,B 与 C 不发生;

(2) A,B,C 都不发生;

(3) A,B,C 中至少有一个发生;

(4) A,B,C 中至多有两个发生.

解 (1) $A\overline{B}\overline{C}$;

(2) $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$;

(3) $A\cup B\cup C$;

(4) “A,B,C 中至多有两个发生”等价于“A,B,C 中至少有一个不发生”，所以 $\overline{A}\cup\overline{B}\cup\overline{C}$.

1.3 频率与概率

在实际情况中，除了必然事件和不可能事件外，任意的一个事件在一次试验中可能发生，也可能不发生，而我们常常希望知道这些事件在一次试验中发生的可能性大小. 例如，为了确定水坝的高度，就要知道河流在造水坝地段每年最大洪水达到某一高度这一事件发生的可能性大小. 我们希望找到一个适当的数字来刻画事件在一次试验中发生的可能性大小，为此，就衍生出了概率的概念.

1.3.1 事件的频率

定义 1.3.1 在相同的条件下将试验重复进行 n 次，在这 n 次试验中，事件 A 发生了 n_A 次，n_A 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的频数，而比值 $f_n(A)=\dfrac{n_A}{n}$ 称为事件 A 在这 n 次试验中发生的**频率**(frequency).

根据定义，易知频率具有如下性质：

(1) 对任意事件 A，有 $0\leqslant f_n(A)\leqslant 1$;

(2) 对必然事件 S，有 $f_n(S)=1$;

(3) 若 k 个事件 $A_1,A_2,A_3,\cdots,A_k$ 两两互不相容，则

$$f_n(A_1\cup A_2\cup A_3\cup\cdots\cup A_k)=f_n(A_1)+f_n(A_2)+f_n(A_3)+\cdots+f_n(A_k).$$

由于事件 A 的频率是它发生次数与试验次数之比 $\dfrac{n_A}{n}$ 的大小，它表示事件 A 发生的频率程度. 频率越大，事件 A 发生就越频繁，这就意味着 A 在一次试验中发生的可能性越大. 因此，直观想法就是用事件 A 的频率表示事件 A 在一次试验中发生的可能性的大小，但是否可行呢？我们考察下面的例子.

例 1.3.1 抛一枚质地均匀的硬币试验. 将一枚硬币抛掷 10 次、100 次、1000 次，各做 10 遍. 统计数据见表 1.3.1.

表 1.3.1

实验序号	$n=10$		$n=100$		$n=1000$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
1	4	0.4	58	0.44	503	0.503
2	5	0.5	48	0.48	496	0.496

续表

实验序号	$n=10$		$n=100$		$n=1000$	
	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$	n_H	$f_n(H)$
3	3	0.3	55	0.55	482	0.482
4	6	0.6	52	0.52	518	0.518
5	7	0.7	46	0.46	498	0.498
6	6	0.6	42	0.42	516	0.516
7	5	0.5	51	0.51	495	0.495
8	2	0.2	57	0.57	527	0.527
9	9	0.9	45	0.45	476	0.476
10	5	0.5	53	0.53	503	0.503

表 1.3.2

试验者	n	n_H	$f_n(H)$	$\lvert f_n(H)-0.5\rvert$
德·摩根	2048	1061	0.5181	0.0181
蒲丰	4040	2048	0.5069	0.0069
威廉·费勒	10000	4979	0.4979	0.0021
皮尔逊	12000	6019	0.5016	0.0016
皮尔逊	24000	12012	0.5005	0.0005
维尼	30000	14994	0.4998	0.0002

从表 1.3.2 中数据可以看出，抛硬币的次数 n 较小时，出现正面的频率 $f_n(H)$ 介于 0 和 1 之间的波动，且波动幅度较大. 但是随着试验次数 n 的增大，频率 $f_n(H)$ 逐渐呈现稳定状态，即当 n 逐渐增大时，频率 $f_n(H)$ 在 0.5 的附近波动，且波动的幅度越来越小，也就是频率 $f_n(H)$ 逐渐稳定于 0.5. 我们把频率 $f_n(H)$ 稳定于某个常数这种特性，称为统计规律性，它揭示了隐藏在随机现象中的规律，我们在重复大量试验的前提下，用 $f_n(A)$ 来刻画事件 A 发生的可能性大小是相对合适的. 但是，在实际问题中，我们没必要也不可能对一个事件做大量的重复试验，来从中得到该事件的频率，进而刻画事件发生的可能性大小. 为了理论和实际研究的需要，我们从频率的稳定性和频率的性质得到启发，给出刻画事件发生的可能性大小的概率定义.

1.3.2 事件的概率

定义 1.3.2 设 E 是随机试验，S 是它的样本空间，对于 E 的每一个事件 A 赋予一实数，记为 $P(A)$，称为事件 A 的概率(probability)，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满

足下列条件：

(1) 非负性　对于每一个事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$；

(2) 规范性　对于必然事件 S，有 $P(S)=1$；

(3) 可列可加性　设 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$ 是两两互不相容的事件，即对于 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j;i,j=1,2,3,\cdots$，有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)+\cdots$$

第 5 章的伯努利大数定理将阐明：当试验次数 n 充分大时，事件 A 的频率 $f_n(A)$ 在一定意义下接近事件 A 的概率 $P(A)$. 基于这一事实，我们有理由用概率 $P(A)$ 来度量事件 A 在一次试验中发生的可能性大小.

由概率的定义可以推出概率具有以下性质.

性质 1.3.1　$P(\varnothing)=0$.

证　令 $A_n=\varnothing(n=1,2,3,\cdots)$，则 $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty}A_n=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j;i,j=1,2,3,\cdots$，由概率的可列可加性得

$$P(\varnothing)=P\Big(\bigcup_{n=1}^{+\infty}A_n\Big)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(A_n)=\sum_{n=1}^{+\infty}P(\varnothing)$$

再由概率的非负性可知，$P(\varnothing)\geqslant 0$，故由上式知 $P(\varnothing)=0$.

性质 1.3.2（有限可加性）　若 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 是两两互不相容的事件，则有

$$P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)$$

证　令 $A_k=\varnothing(k=n+1,n+2,n+3,\cdots)$，则有 $A_iA_j=\varnothing,i\neq j;i,j=1,2,3,\cdots$，由概率的可列可加性得

$$\begin{aligned}P(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)&=P\Big(\bigcup_{k=1}^{+\infty}A_k\Big)=\sum_{k=1}^{+\infty}P(A_k)\\&=\sum_{k=1}^{n}P(A_k)+\sum_{k=n+1}^{+\infty}P(A_k)\\&=P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)\end{aligned}$$

性质 1.3.2 得证.

性质 1.3.3　设 A,B 是两个事件，若 $A\subset B$，则有 $P(B-A)=P(B)-P(A)$，$P(A)\leqslant P(B)$.

证　由 $A\subset B$（图 1.2.1）得 $B=A\cup(B-A)$，且 $A\cap(B-A)=\varnothing$，再由性质 1.3.2 得

$$P(B)=P(A)+P(B-A)$$

即

$$P(B-A)=P(B)-P(A)$$

又由概率的非负性得知 $P(B-A)\geqslant 0$，从而 $P(A)\leqslant P(B)$.

性质 1.3.4　对任意事件 A，有 $P(A)\leqslant 1$.