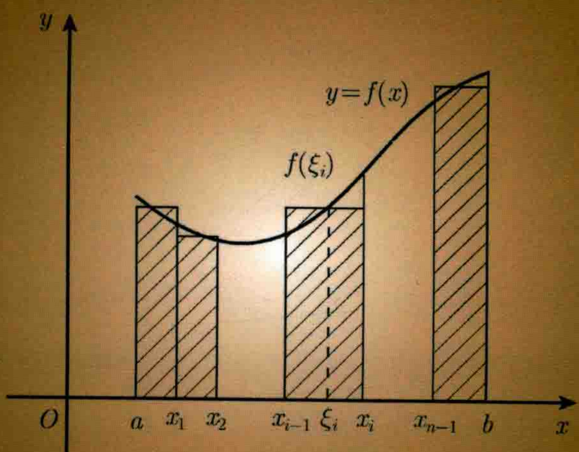
数学分析

（上册）

肖建中 蒋 勇 王智勇 编著



科学出版社

数学分析

(上册)

肖建中　蒋　勇　王智勇　编著

科学出版社

北　京

内 容 简 介

本书讲述数学分析的基本概念、原理与方法，分为上、下两册. 上册内容包括函数、数列极限、函数极限、函数的连续性、导数与微分、微分中值定理及其应用、不定积分、定积分、定积分的应用、广义积分等. 下册内容包括数项级数、函数项级数、幂级数与Fourier级数、多元函数的极限与连续性、多元函数微分学、隐函数定理及其应用、含参量积分、重积分、曲线积分、曲面积分等. 本书除每节配有适量习题外，每章还配有总习题，分为A与B两组. 书末对每道习题都给出参考答案与提示，其中难度大的证明题有较详细的提示，以方便读者在自主学习时查看.

本书可作为理工科院校或师范院校数学类专业的教材使用，也可供其他相关专业选用.

图书在版编目(CIP)数据

数学分析(上册)/肖建中，蒋勇，王智勇编著. —北京：科学出版社，2015.6

ISBN 978-7-03-044964-1

I. 数… II. ①肖… ②蒋… ③王… III. ①数学分析-高等数学-教材 IV. ①O17

中国版本图书馆CIP数据核字(2015) 第129272号

责任编辑：张中兴 王胡权 / 责任校对：钟 洋
责任印制：徐晓晨 / 封面设计：迷底书装

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com

北京东华虎彩印刷有限公司印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2015年6月第 一 版 开本：720×1000 1/16
2015年6月第一次印刷 印张：24 1/2
字数：482 000

定价：49.00元

前　言

数学分析是数学类专业最重要的基础课. 现在我国凡有数学类专业的高校都有该课程的教学大纲, 可谓特色各异. 但细细比较起来, 其中的交集很大, 数学分析经典的部分都被框出. 这说明作为一门基础课, 数学分析的核心内容已经基本定型, 并形成共识. 本书的取材原则是只考虑数学分析的这些稳固的必不可少的部分, 尽量少涉及将在后继的相关课程中能得到详尽讨论的那些内容. 经典再传唱, 曲韵翻新声. 本书的主旨是希望在处理方法上朝着体系严谨、深入浅出、易学好教的方向有所革新, 有所前进.

本书不仅凝聚了我们三十多年从事数学分析教学工作的一些思考, 也是参考借鉴国内外许多相关的优秀著作的结晶. 十多年来, 我们一直选用华东师范大学数学系合编的《数学分析》作教材, 选用常庚哲与史济怀两位教授编著的《数学分析教程》作教学参考书. 这使本书在体系构建、难点处理、深浅把握、叙述风格等诸多方面受益匪浅. 在本书编写中, 我们致力于体现如下一些想法.

1. 在保证体系严谨的前提下贯彻难点分散的原则, 顺应学习者的认知规律. 作为教科书,《数学分析》必须以系统的极限理论为基础, 然后才可讨论微分与积分. 这与数学发展史上的次序恰恰相反. 微分学与积分学起源于 17 世纪, 而在 18 世纪发现了很多重要的应用, 有了进一步的发展; 在 19 世纪初, 极限理论才成为微积分的基础; 至于用来论证精密极限原理的实数完备性理论, 直到 19 世纪后半叶才建立起来. 实数完备性理论无疑是该课程基础理论中的难点, 将其后移的做法曾被一些教材所采用. 数学教育学术界一度认为后移虽然破坏了理论体系的顺序, 但当学习者有了一定理论基础再来学, 困难会小些, 也切合数学发展顺序与认知规律. 根据我们对两种处理的实际教学, 后移的处理并不存在教学效果上的优势. 从教育理论上分析, 将实数完备性理论后移, 难点集中, 与难点分散的教学原则相悖. 本书的处理是将其分散到四个章节中, 兼顾知识的系统性与学生的可接受性. 极限 ε 语言是该课程教学中必须克服的难点, 它贯穿于始终, 体现了这门课程 “于细微处见精神” 的特质. 学习者要靠日积月累才能真正掌握. 为了让其从一开始能有较为清晰的理解, 教材应当设计一条便捷的途径. 本书第 1 章在复习函数知识的同时着重讲述数集的界与确界概念, 为第 2 章讲述数列极限概念作铺垫. 界与确界概念涉及两个逻辑量词, 极限概念涉及三个逻辑量词, 其难点得到分解. 本书从数学内涵、逻辑关系及几何意义等多个层面来重点处理数列极限, 让学习者尽可能深度理解. 对于第 3 章中的函数极限概念, 学习者只要抓住不同极限形式间的差异, 便可循序前

行.

2. 承上启下自然衔接, 贯彻循序渐进的原则, 顺应知识的内在联系. 如果编写中这方面处理得不够精致, 教材使用中就会出现 “青黄不接”“寅吃卯粮” 等现象, 造成不和谐、不协调的尴尬局面. 本书首先注意与现阶段中学教材的衔接, 相关章节编入反三角函数、极坐标等内容. 待定型极限概念在极限运算性质后适时给出而不应置于 L'Hospital 法则讲解中, 因为实际的极限运算不可避免地用到这一概念. 在极限性质一节中就给出复合函数极限法则, 通过变量代换求极限的方法才能及时用起来. 为了回答函数的间断点如何确定的问题, 适合讲聚点概念. Fermat 引理与导数的介值性定理适合放在微分中值定理的章节中. 本书力求让概念和定理在水到渠成之时引出来. 以往对于连续性概念的处理出现前后矛盾的情况, 将多元函数在孤立点定义为连续的, 而一元函数在孤立点不被认为是连续的. 本书利用 ε 语言定义连续性, 很容易揭示连续概念的渐变性本质, 函数在孤立点自然是连续的, 从而将 “一切初等函数在其定义区间上连续” 的结果还原为 “一切初等函数在其定义域上连续”. 以往由于不讲可积函数的换元公式, 因而 Fourier 级数中的积分换元缺少了理论依据. 以往由于积分第一中值定理的中间点不必在区间内部, 因而导出的 Taylor 公式 Cauchy 余项的中间点也不必在区间内部, 这对相关问题的讨论带来不便. 本书介绍了两种条件下的 Newton-Leibniz 公式与可积函数的换元公式, 强化了积分中值定理的讨论, 衔接了数学分析与实变函数两课程间的空白区域.

3. 优化结构模块, 彰显数形结合特色, 提升数学趣味与魅力. 本书部分内容在编排上突破了知识为核心的框架, 以技能为模块重新组合. 利用导数方法证明不等式的一些例题原本零散分布在不同内容中, 但将其集中在一块利于学习者进行方法的选择与比较. 求数列极限的 Stolz 公式置于 L'Hospital 法则之后, 利于学习者认识二者在理论与方法上内在的联系. 本书将一致连续性与一致收敛性分别单独作为一节, 完全是基于强化学习者认知能力方面的考虑. 关于广义积分本书没有按无穷积分与瑕积分进行分节, 而是按被积函数是否为非负函数进行分节, 这样做不仅因为无穷积分与瑕积分可以互相转化, 同时也为了避免理论叙述上的重复, 避免技能培养上的重复. 本书重视一些关键细节的优化处理. 将 “可导蕴涵连续” 扩充为 “左右导数存在蕴涵连续”, 由此易导出开区间上凸函数的连续性, 使凸函数性质得到完整的阐述. 本书发挥数学分析课程在数形结合方面的优势, 借助大量图形与实例力求使知识的 “学术形态” 变为 “教育形态”. 对于光滑曲线概念, 要求 “导数连续” 是好理解的, 要求 “导数的平方和非零” 并不好理解. 本书借助星形线的图形消除学习者的困惑. 对于导数、定积分等这些重要概念, 本书保持了由实例抽象出定义的叙述风格. 有些定义、公式及定理采用了 “发现式” 方法叙述, 如数列极限定义、高阶导数的 Leibniz 公式、Cauchy 中值定理等. 本书也编入了条件收敛级数的 Riemann 定理、函数级数的 Dini 定理、Weierstrass 逼近定理等一些较为深入的内

容以及 e 与 π 的无理性论证等体现分析学应用魅力的一些例子, 对这些内容实际教学中可灵活选择讲授或留作自学.

4. 紧扣章节内容选配习题, 在深难度上保持适当的梯度与弹性. 数学分析课程对于学习者, 不应只是“定义”与“定理”的堆积, 而应该是探索的向导、方法的指南. 本书每节配有适量习题, 其中大部分是以巩固本节知识为目的而设计的基本题, 涉及基本概念与基本理论的理解. 每章还配有总习题, 分为 A 与 B 两组. A 组题难度适中, 供习题课选用. B 组题中有的难度较大, 有的则涉及本书主体内容以外的知识, 是学有余力者的“用武之地”. 本书也设计了一些质疑性、开放性问题, 以培养自主学习、研究性学习的兴趣. 本书书末对每道习题都给出参考答案与提示, 其中难度大的证明题有较详细的提示. 学习者应当正确使用参考答案与提示. 在自主学习中不断尝试解题, 屡遭挫折是正常的, 有时虽未获得解决, 但尝试解题过程本身加深了对基本概念与基本理论的理解, 也是功不可没的. 经过努力解题之后再查看参考答案与提示, 才会真正学有收效.

本书共分为 20 章, 前 10 章为上册，后 10 章为下册, 其中第 1~13 章由肖建中主笔编写, 第 14~20 章由夏大峰主笔编写, 蒋勇、王智勇、成荣等参与了全书的构思策划、习题配备、统稿整理、审读修改等工作.

本书的出版得到了南京信息工程大学精品教材项目 (13JCLX015) 的资助. 周伟灿教授与张永宏教授始终关心支持本书的编写与出版, 提出了宝贵的指导性意见, 作者对他们的鼓励与支持表示衷心的感谢. 作者特别感谢科学出版社对本书的出版所给予的支持与帮助, 感谢编辑付出的辛劳!

“鞋子是否合脚, 穿着走才知道.” 作者衷心希望本书的出版能受到广大读者的欢迎, 并能对数学分析的教学与研究起到促进作用. 书中难免会有一些疏漏和不妥之处, 作者谨向提出建议与指正者致以诚挚的谢意.

作　者

2014 年 11 月 20 日于南京信息工程大学

目　　录

第 1 章　函数

CHAPTER 1

概而言之, 数学是研究空间形式 (几何) 与数量关系 (代数) 的学问, 集合与映射是其基本的研究对象, 而数学中的“分析学”是指运用极限过程分析处理问题的数学分支. 微积分作为古典分析学的开端从几何和代数的主干上生长出来, 几何思想与代数方法的结合成为它的一个基本特征. 将微积分建立在严密的极限理论基础之上, 发展形成了数学分析这一学科. 因此, 从数学发展的内涵与本质上来看, 数学分析无疑是数学科学 (或专业) 最重要的基础课之一.

数学分析研究的基本对象是定义在实数集上的函数. 本章将简要介绍相关的基本概念与记号, 这是后继内容的预备.

1.1 实 数 集

在数学上, 集合是最基本的概念. 通常把有某种特定性质的对象汇集成的总体称为**集合**或**集**. 设 S 是由具有某种性质 P 的元素构成的集, 则 S 通常表示为

$$S=\{x:x\text{具有性质}P\}\quad\text{或}\quad S=\{x|x\text{具有性质}P\}.$$

若 x 是 S 的元素, 则称 x 属于 S, 记为 $x\in S$. 若 x 不是 S 的元素, 则称 x 不属于 S, 记为 $x\notin E$. 两个集合 A, B 的并, 交, 差, 余运算分别定义为

$$A\bigcup B=\{x:x\in A\text{或}x\in B\};$$

$$A\bigcap B=\{x:x\in A\text{且}x\in B\};$$

$$A\backslash B=\{x:x\in A\text{且}x\notin B\};$$

$$A^{\mathrm{c}}=\{x:x\notin A\}.$$

容易知道并、交、差、余运算满足关系 $A\backslash B=A\bigcap B^{\mathrm{c}}$, 且满足对偶律 (De Morgan 律):

$$(A\bigcup B)^{\mathrm{c}}=A^{\mathrm{c}}\bigcap B^{\mathrm{c}};\quad (A\bigcap B)^{\mathrm{c}}=A^{\mathrm{c}}\bigcup B^{\mathrm{c}}.$$

若集合 A 的元素都属于 B, 则称 A 是 B 的子集, 记为 $A\subset B$. 空集记为 $\varnothing$. 函数

$$\mu_S(x)=\begin{cases}1, & x\in S,\\ 0, & x\notin S\end{cases}$$

称为集合 S 的特征函数.

数集是最常见的集合. 通常, 自然数集 (非负整数集) 用符号 $\mathbb{N}$ 表示, 正整数集用符号 $\mathbb{Z}^+$ 表示, 整数集用符号 $\mathbb{Z}$ 表示, 有理数集与实数集分别用符号 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{R}$ 表示.

逻辑上为了简约表示推理与论证, 常用下述记号. 量词 $\forall$ 表示的意思是任意或所有, 量词 $\exists$ 表示的意思是存在或找到. 例如, 数集 S 中的数都是正数表示为

$$\forall x \in S, 有 x > 0;$$

数集 S 中至少有一个数是正数表示为

$$\exists x \in S, 有 x > 0.$$

设 α, β 是两个判断, 若当 α 成立时 β 也一定成立, 则称 α**推出**β, 或 α**蕴涵**β, 记为 $\alpha \Rightarrow \beta$. 若 $\alpha \Rightarrow \beta$ 且 $\beta \Rightarrow \alpha$, 则称 α 与 β**等价**, 或 α 与 β 互为充分必要条件, 记为 $\alpha \Leftrightarrow \beta$.

在中学数学里已经知道, **实数**包括有理数和无理数两种. 有理数可用分数表示, 也可用有限十进制小数或无限十进制循环小数表示, 无限十进制不循环小数称为无理数.

定义 1.1.1 把每个实数都表示成无限十进制小数, 其中 0 表示为 $0.000\cdots$, 每个形如 $y = \pm b_0.b_1b_2\cdots b_k$ 的正或负有限十进制小数用 9 循环表示为

$$y = \pm b_0.b_1b_2\cdots(b_k - 1)999\cdots.$$

设 $n \in \mathbb{N}$, $x = a_0.a_1a_2\cdots a_k\cdots$ 为非负实数. 称有理数

$$x_n^- = a_0.a_1a_2\cdots a_n$$

为 x 的 n 位**不足近似**, 而有理数

$$x_n^+ = a_0.a_1a_2\cdots a_n + \frac{1}{10^n}$$

称为 x 的 n 位**过剩近似**. 对于负实数 $x = -a_0.a_1a_2\cdots a_k\cdots$, 其 n 位不足近似与过剩近似分别规定为

$$x_n^- = -a_0.a_1a_2\cdots a_n - \frac{1}{10^n} 与 x_n^+ = -a_0.a_1a_2\cdots a_n.$$

从上述定义容易知道, 不足近似 x_n^- 随 n 增大而递增, 过剩近似 x_n^+ 随 n 增大而递减, 即有

$$x_0^- \leqslant x_1^- \leqslant x_2^- \leqslant \cdots \leqslant x_n^- \leqslant \cdots \leqslant x \leqslant \cdots \leqslant x_n^+ \leqslant \cdots \leqslant x_2^+ \leqslant x_1^+ \leqslant x_0^+.$$

实数集 $\mathbb{R}$ 在几何上用数轴表示. 就是说, 每个实数与数轴上的点有着一一对应关系. 因此常把 "实数 a" 与 "数轴上的点 a" 作为同义语, $\mathbb{R}$ 也称为实直线. 实数集有下述一些较为直观的性质, 本书省去其推导. 关于实数的严密定义与详细论述, 可参阅相关书籍.

定理 1.1.1 设 $\mathbb{R}$ 为实数集, 则

(1) $x, y \in \mathbb{R}$, $x < y$ 的充分必要条件是 $\exists n \in \mathbb{N}$, 使 $x_n^+ < y_n^-$. 这里 x_n^+ 是 x 的 n 位过剩近似, y_n^- 是 y 的 n 位不足近似 (图 1.1.1).

(2) $\mathbb{R}$ 是一个数域. 就是说, $\mathbb{R}$ 对四则运算是封闭的, 任意两个实数的和、差、积、商 (除数不为 0) 仍然是实数. 有理数集 $\mathbb{Q}$ 也是一个数域, 但无理数集 $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ 不是数域.

(3) $\mathbb{R}$ 是一个有序集 (或称为全序集). 就是说, $\forall a, b \in \mathbb{R}$ 必满足 (且仅满足) 下述三个关系之一: $a < b$; $a = b$; $a > b$.

图 1.1.1

例 1.1.1 设 $a, b \in \mathbb{R}$. 证明: 若 $\forall \varepsilon \in \mathbb{Q}$, $\varepsilon > 0$ 有 $a < b + \varepsilon$, 则 $a \leqslant b$.

证明 (反证法) 假设结论不成立, 据 $\mathbb{R}$ 是全序的可设 $a > b$. 于是 $\exists n \in \mathbb{N}$, 使 $a_n^- > b_n^+$. 令 $\varepsilon_0 = a_n^- - b_n^+$, 则 $\varepsilon_0 > 0$. 又因 $a_n^-, b_n^+ \in \mathbb{Q}$, 故 $\varepsilon_0 \in \mathbb{Q}$. 按题设应有

$$a < b + \varepsilon_0 = b + a_n^- - b_n^+ = (b - b_n^+) + a_n^- \leqslant a,$$

这是矛盾的. 因此原结论成立.

实数 x 的**绝对值**定义为

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

从数轴上看, $|x|$ 就是点 x 到原点的距离. $|a-b|$ 表示 a 与 b 的距离. 用 $\max\{a,b\}$ 与 $\min\{a,b\}$ 分别表示 a, b 中最大者与最小者, 则容易验证

$$\max\{a,b\} = \frac{a+b}{2} + \frac{|a-b|}{2}; \quad \min\{a,b\} = \frac{a+b}{2} - \frac{|a-b|}{2}.$$

上述关系的几何意义不难从数轴上看出. 对 $\forall x, y \in \mathbb{R}$ 有如下的**三角形不等式**:

$$||x| - |y|| \leqslant |x \pm y| \leqslant |x| + |y|, \tag{1.1.1}$$

等号成立 $\Leftrightarrow x$ 与 $\pm y$ 同号.

例 1.1.2 设 $a_i \in \mathbb{R}, i=1,2,\cdots,n$. 证明: $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n} |a_i|$.

证明 (数学归纳法) $n=1$ 时不等式显然成立. 假设 $n=k$ 时不等式成立, 即

$$\left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_i|, \tag{1.1.2}$$

则当 $n=k+1$ 时, 由 (1.1.1) 及 (1.1.2) 式得

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^{k+1} a_i\right| &= \left|\left(\sum_{i=1}^{k} a_i\right) + a_{k+1}\right| \leqslant \left|\sum_{i=1}^{k} a_i\right| + |a_{k+1}| \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{k} |a_i| + |a_{k+1}| = \sum_{i=1}^{k+1} |a_i|.\end{aligned}$$

这表明不等式当 $n=k+1$ 时也成立. 因此不等式对一切正整数 n 成立.

区间是最常见的一类实数集的子集. 设 $a,b \in \mathbb{R}$, $a<b$, 则有限区间有下列 4 种形式:

$$\text{开区间 } (a,b)=\{x: a<x<b\}; \quad \text{闭区间 } [a,b]=\{x: a \leqslant x \leqslant b\};$$

$$\text{半开半闭区间 } (a,b]=\{x: a<x \leqslant b\} \text{ 与} [a,b)=\{x: a \leqslant x<b\}.$$

无限区间有下列 5 种形式:

$$(-\infty,a)=\{x: x<a\}; \quad (-\infty,a]=\{x: x \leqslant a\};$$

$$(a,+\infty)=\{x: x>a\}; \quad [a,+\infty)=\{x: x \geqslant a\};$$

$$(-\infty,+\infty)=\{x: -\infty<x<+\infty\}=\mathbb{R}.$$

邻域是实数集的重要的一类子集, 用来描述 “某个点的附近”.

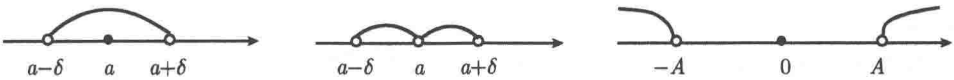
定义 1.1.2 设 $a \in \mathbb{R}$, $\delta>0$. 集合 $\{x: |x-a|<\delta\}$(即开区间 $(a-\delta, a+\delta)$) 称为**点 a 的 δ 邻域**, 记作 $U(a,\delta)$. 这里, a 称为邻域的中心, δ 称为邻域的半径. 点 a 的 δ 邻域可简称为点 a 的邻域, 简记作 $U(a)$. **点 a 的空心 δ 邻域**定义为

$$U^o(a,\delta)=\{x: 0<|x-a|<\delta\},$$

同样地可简记作 $U^o(a)$. 设 $A>0$. 集合 $\{x: |x|>A\}$ 称为 **∞邻域**, 记作 $U(\infty, A)$ 或 $U(\infty)$. 上述 $U(a,\delta)$,$U^o(a)$ 及 $U(\infty)$ 如图 1.1.2 所示.

上述定义中, δ 可理解为较小的正数, A 可理解为较大的正数. 注意, $U(a)$ 与 $U^o(a)$ 的差别在于: $U^o(a)$ 不包含点 a. 此外, 还常用到以下 6 种邻域:

点 a 的右邻域 $U(a+)=[a,a+\delta)$; 点 a 的空心右邻域 $U^o(a+)=(a,a+\delta)$;
点 a 的左邻域 $U(a-)=(a-\delta,a]$; 点 a 的空心左邻域 $U^o(a-)=(a-\delta,a)$
$+\infty$ 邻域 $U(+\infty)=\{x:x>A\}$; $-\infty$ 邻域 $U(-\infty)=\{x:x<-A\}$.



(a) $U(a,\delta)$ (b) $U^o(a)$ (c) $U(\infty)$

图 1.1.2

定理 1.1.2 有理数在 $\mathbb{R}$ 中是稠密的, 就是说,

(1) 若 $x,y\in\mathbb{R}$, $x<y$, 则 $\exists r\in\mathbb{Q}$, 使 $x<r<y$. 即任意两个不相等的实数间必有有理数;

或者

(2) $\forall a\in\mathbb{R}$, $\forall\delta>0$, 必定 $\exists r\in\mathbb{Q}$, 使 $r\in U^o(a,\delta)$. 即每个实数点的任意空心邻域 (不论多小) 都包含有理数.

证明 因 $x<y$, 故 $\exists n\in\mathbb{N}$, 使 $x_n^+<y_n^-$. 令 $r=\dfrac{x_n^++y_n^-}{2}$, 则由 $x_n^+,y_n^-\in\mathbb{Q}$ 可知 $r\in\mathbb{Q}$, 且有 $x\leqslant x_n^+<r<y_n^-\leqslant y$, 即 $x<r<y$, (1) 得证.

因 $U^o(a,\delta)\supset(a,a+\delta)$, $a<a+\delta$, 故由 (1) 可知 $\exists r\in\mathbb{Q}$, 使 $a<r<a+\delta$, 即 $r\in U^o(a,\delta)$, (2) 得证.

用类似的方法可以证明, 无理数在 $\mathbb{R}$ 中也是稠密的.

习 题 1.1

1. 设 r 为有理数, x 为无理数, 试证明: (1)$r+x$ 是无理数; (2) 当 $r\neq0$ 时, rx 是无理数.
2. 设 $a,b\in\mathbb{R}$. 证明: 若对任何正数 ε 有 $|a-b|<\varepsilon$, 则 $a=b$.
3. 证明: 无理数在 $\mathbb{R}$ 中也是稠密的, 即
   (1) 若 $x,y\in\mathbb{R}$, $x<y$, 则存在无理数 p, 使 $x<p<y$;
   (2) $\forall a\in\mathbb{R}$, $\forall\delta>0$, 必定存在无理数 p 使 $p\in U^o(a,\delta)$.
4. 证明: 对任何 $x,a,b\in\mathbb{R}$, 有
   (1) $|x-a|+|x-b|\geqslant|a-b|$; (2) $|x-a|+|x-b|+|x-(a+b)|\geqslant\max\{a,b\}$.
5. 证明 Bernoulli (伯努利) 不等式: 对任何 $n\in\mathbb{N}$, $x>-1$, 有 $(1+x)^n\geqslant1+nx$.
6. 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 n 个正数, 称 $\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 是其算术平均值, $\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$ 是其几何平均值, $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$ 是其调和平均值. 证明如下的均值不等式:

$$\frac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

1.2 初等函数

函数是数学的基本概念之一, 在中学数学里对此已有初步认识, 它是一类特殊的映射.

定义 1.2.1 设 X 与 Y 是两个非空集合. 若按对应法则 f, 对 X 中的每一个元素 x, 均可找到 Y 中唯一确定的元素 y 与之对应, 则称 f 是集 X 到集 Y 的一个**映射**, 记为

$$f : X \to Y.$$

将 x 的对应元 y 记作 $f(x) : x \mapsto y = f(x)$. 若 Y 是实数集 $\mathbb{R}$ 的子集, 则称 f 是**函数**或**实函数**. 称 x 为**自变量**, y 为**因变量**; y 也称为 f 下 x 的**像**或**函数值**, 而 x 称为 f 下 y 的**原像**(**逆像**). 集合 X 称为 f 的**定义域**, 而 X 的所有元素的像 $f(x)$ 的集合

$$f(X) = \{y : y = f(x), x \in X\}$$

称为映射 f 的**值域**($f(X) \subset Y$). 称由自变量与因变量的序对组成的集合

$$G_f = \{(x, y) : x \in X, y = f(x)\}$$

为 f 的**图像**或**图形**.

由于数学分析中主要讨论函数这类特殊的映射, 因而下面对映射与函数在术语上不加区分. 函数 $y = f(x)$ 的图像通常可在直角坐标平面中画出, 其几何形状通常是曲线, 所以也常称为曲线 $y = f(x)$. 表示函数的主要方法有图像法、解析法 (或公式法) 和列表法等三种. 当函数用解析法表示时, 若无特别指明, 则默认定义域是自变量所能取的使解析式有意义的一切实数. 常用的术语 “**f在D上有定义**” 指的是 D 为定义域的子集. 此时也称 $f(D) = \{y : y = f(x), x \in D\}$ 为 **f关于D的值域**.

概括地说, 确定函数的基本要素有两个: 定义域与对应法则. 所以, 通常认为 Y 就是实数集 $\mathbb{R}$, 常用

$$y = f(x), \quad x \in X$$

表示一个函数. 由此, 称两个函数相同 (相等), 是指它们有相同的定义域与对应法则. 例如, $f(x) = x + 1$ 与 $g(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$ 是两个不同的函数, 而 $\varphi(x) = |x|$ 与 $\psi(x) = \sqrt{x^2}$ 是两个相等的函数.

需要指出的是, 上述函数的定义强调了元素的像必须是唯一的, 这样定义的函数也称为**单值函数**, 其图像特征是自变量坐标轴的垂直线与图像至多有一个交点. 若同一个自变量 x 值允许对应多于一个的因变量 y 值, 则称这种函数为**多值函数**. 本书只讨论单值函数.

数列是一类特殊的函数.

定义 1.2.2 若函数 f 的定义域是正整数集 $\mathbb{Z}^+$, 则称此函数为**数列**. 因 $\mathbb{Z}^+$ 的元素可按从小到大的顺序排列, 对 $\forall n \in \mathbb{Z}^+$, 记 $f(n) = a_n$, 故数列可写成

$$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots,$$

或简记为 $\{a_n\}$, 其中 a_n 称为数列 $\{a_n\}$ 的**通项**.

例如, $\{n\}$, $\left\{\dfrac{1}{2^n}\right\}$, $\{(-1)^n\}$ 等都是数列; 一个实数 x 的不足近似 $\{x_n^-\}$ 与过剩近似 $\{x_n^+\}$ 也都是数列.

借助图像的直观性是认识和研究函数的重要方法. 数列的图像可以在平面上表示, 也可以在数轴上表示. 记住一些常用函数的图像是有必要的. 从图像上看, 指数函数 (图 1.2.1)

$$y = a^x (a > 0, a \neq 1), \quad x \in (-\infty, +\infty)$$

与对数函数 (图 1.2.2)

$$y = \log_a x (a > 0, a \neq 1), \quad x \in (0, +\infty),$$

其性态是容易弄清的.

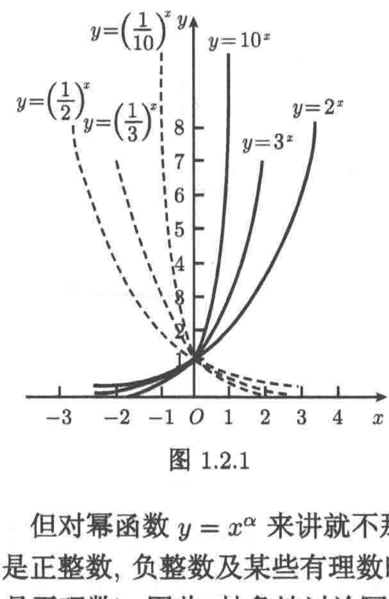


图 1.2.1

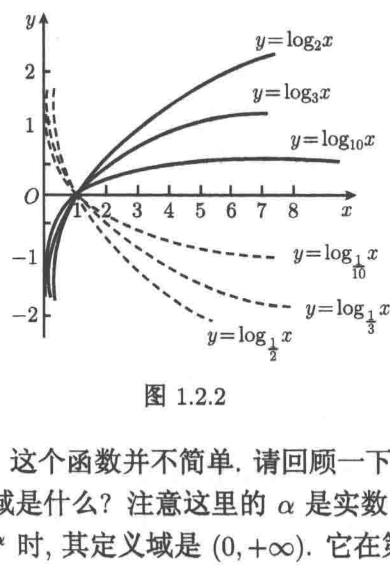


图 1.2.2

但对幂函数 $y = x^\alpha$ 来讲就不那么乐观了. 这个函数并不简单. 请回顾一下, 当 α 是正整数, 负整数及某些有理数时, 其定义域是什么? 注意这里的 α 是实数 (可以是无理数). 因此, 抽象地讨论幂函数 $y = x^\alpha$ 时, 其定义域是 $(0, +\infty)$. 它在第一象限内的图像如图 1.2.3 所示.