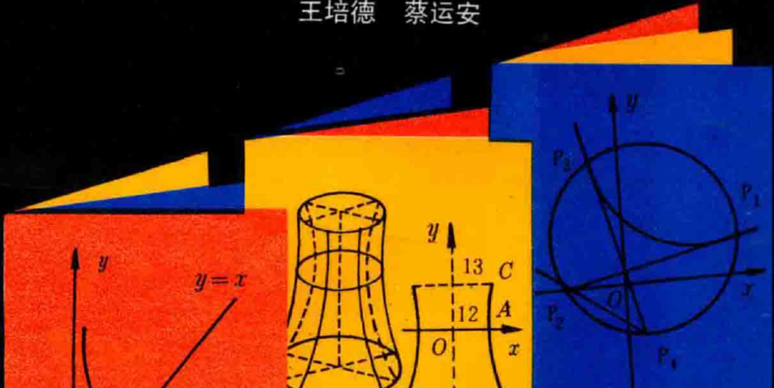
高中学习指导丛书

高考数学新题型
探索题与应用题500例

王培德　蔡运安



天 津 教 育 出 版 社

高中学习指导丛书

高考数学新题型

探索题与应用题500例

王培德　蔡运安

天津教育出版社

（津）新登字006号

高中学习指导丛书
高考数学新题型
探索题与应用题500例
王培德　蔡运安
＊
天津教育出版社出版
(天津市张自忠路189号)
邮政编码：300020
新华书店天津发行所发行
河北省永清县第二印刷厂印刷
＊
787×1092毫米 32开　17印张　366千字
1995年11月第1版
1995年11月第1次印刷
印数 1—2550
ISBN 7—5309—2049—9

G·1656　定价：14.00

目　录

前　言

自从一九七八年恢复高考的全国统一命题以来，出现过一些探索性和应用性问题，它对高考数学试题的改革做了有益的尝试，推动了中学数学教学的改革。

1993年国家教委考试中心数学学科秘书任子朝先生在《专家谈高考命题》中说："对应用性和探索性问题的考查应考虑到目前考生的知识水平和心理适应程度，考虑到问题形式化、数量化的程度。通过逐步的努力促进中学教学达到大纲规定的目的：注重知识产生、抽象和应用过程的教学，使学生学习理解人类完整的思维过程。"在电视讲话中，对于探索性问题他明确指出："再就是考查一些探索中的问题，对一个没有确定结论的问题，考生应当能够经过自己的观察、分析、比较、概括，得出这个结论，最后加以证明。"

任子朝先生的以上谈话，十分清晰地告诉我们，加强应用性和探索性问题的考核是今后高考数学命题的方向之一。特别是对探索性问题，既明确了它是"没有确定结论的问题"，又指出了探索性问题的解题思路："经过自己的观察、分析、比较、概括，得出这个结论，最后加以证明。"

从高考的目的来看，既要能为高等学校选拔人才，又要有利于中学数学教学改革。因此，我们必须在中学数学教学和复习中，加强对应用性和探索性问题的研究，从问题编制、教学方法、训练层次和评价手段等方面全面进行探讨，

以推动中学数学教学改革的深入。

回顾数学教学的历史。传统的数学教学观念认为，中学数学教学主要任务是传授数学知识。在这种观念之下，数学教学偏重演绎论证的训练，注重灌输现成的知识。教师提出的问题往往都是封闭性的，学生学习带有一定的模仿倾向，常常是按照“模式加方法”来“对号入座”式解题。培养出的学生大多数属于模仿继承型人才。

50年代，我们在数学教学中提出要重视双基，即在教学中突出基础知识和基本技能，同时强调数学的抽象性、严密性以及广泛的应用性。

60年代，经过若干次教学改革和教学实验，提出了要通过中学数学教学培养学生三大能力，即运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力。使中学数学教学成为传播知识和培养能力的过程。

70年代，在中学数学教学中强调了数学的广泛应用性。注重理论联系实际，提出培养运用所学习的知识和方法来分析问题和解决问题的能力。

80年代，为了适应社会主义经济建设对人才培养的需要，随着对中学数学教学的深入研究，提出数学教学是数学思维过程的教学，重视对数学思维的研究，把培养数学思维能力做为数学教学的主要任务，把形成良好的个性心理品质做为由“应试教育”向“素质教育”转化的重要标志。

90年代，伴随社会主义四个现代化建设对开拓创造型人才的需要，注重了在数学教学中渗透数学思想方法，明确地提出了中学数学教学要使学生掌握和运用函数与方程思想、分类的思想、数形结合的思想和化归的思想。

在这种要求之下，传统的封闭型数学问题不能完全满足对学生思维能力的训练和数学思想方法的掌握，更不能完全满足培养学生良好思维品质的需要。在这个背景之下，应用性问题和探索性问题便应运而生，逐步进入到课堂教学和高考试卷，并逐年加强这类问题的题量和提高其考察力度。

在国外，广用性问题比我国更早更多地进入各级各类考试和数学竞赛试卷，探索性问题也引起了广泛的重视。美国心理学家布鲁纳就说过："探索是数学的生命线。"相比之下，对应用性和探索性问题的研究，美国、日本等国比我国来的还早。

所谓"应用性"问题，众所周知，是指数学知识用来解决其它数学问题、邻近学科的问题、日常生活中的问题以及生产、科研中提出来的实际问题。

所谓"探索性"问题，是相对于中学数学课本中绝大多数有明确结论的封闭性问题而言的。从入题系统的角度看，在问题的条件、应用的知识、使用的思想方法和结论四个因素中，完全具备四个因素的问题叫做全封闭性问题；仅仅缺少一个因素的问题叫做半封闭性问题；仅仅缺少二个因素的问题叫做开放性问题；缺少三个因素的问题叫做全开放性问题。开放性问题和全开放性问题就是我们所说的"探索性"问题。

探索性问题常见的形式有以下几种：

其一是给出条件，没给明确的结论，或者结论不确定的问题，而需要解题者去探索结论并且加以证明；

其二是给出结论，没有给出条件的问题，需要解题者分析出结论满足应具备的条件，并且给予证明；

其三是改变某命题（往往是已经解决了的问题）的条件，探讨结论相应地会发生什么变化，或者改变该命题的结论，探讨条件相应地需要发生什么变化；

其四是从实际问题出发，结合生产、生活的实际，测试出一组数据，通过对这组数据和实际问题的具体分析，建立相应的数学模型，然后采用适当的数学工具来解决这个问题，从而使这个实际问题得到彻底解决。

应用性问题的解决，需要学生首先把这个其它数学分支的问题、其它学科的问题或者生产、生活的实际问题转化为某个数学问题，通过这个转化成的新的数学问题的解决，使得原问题得到解决。

探索性问题的解决，一般需要学生去观察、试验、类比、归纳、猜测出结论或条件，然后严格给以证明。这就要求学生不但会演绎法，还必须熟悉归纳法；不但要掌握严密的逻辑推理，还必须注重直觉发现；不但要善于把具体问题转化为数学问题，也必须掌握合情合理地分析问题解决问题的方法。

应用性和探索性问题更加接近社会生产和科学研究的实际，对于培养学生的应用意识和创造才能具有很好的作用。这是数学教学大纲所明确要求的，也是当前中学数学教学比较薄弱的环节。数学教学改革需要应用性、探索性问题；学生自身数学思维能力的提高需要应用性、探索性问题；数学思想方法的渗透教学需要应用性、探索性问题；跨世纪的开拓创造型人才的成长更需要应用性、探索性问题。应用性、探索性问题为中学数学教学实现自己的目的，完成自己的使命开辟了一条新的道路。

应用性、探索性问题的核心就是要求学生独立去探究。教育心理学指出：在人的心灵深处，都有一个根深蒂固的需要，这就是自己是一个发现者、研究者、探索者。中学生更是如此，他们思维敏捷、活跃、开放，具有丰富的想象力和强烈的好奇心。而应用性、探索性问题所设置的引人入胜、诱人入境的问题情境，恰好为他们提供了机会和条件，使他们的聪明才智有了用武之地，使他们强烈的探索欲望得到了满足。

应用性、探索性问题的解决，要求学生必须将学过的知识、思想和方法，按照个人接受、理解的深度、广度，通过自己的观察、分析、比较、概括得出结论，加以证明，无疑对提高学生的思维能力，考查学生的探索能力是非常有效的。

数学来源于实践，又服务于实践，强调数学在实际生产、生活中的应用十分重要。解决实际应用问题，将具体问题抽象化，转化为数学问题，再利用有关的数学知识和方法来解决，对培养和提高学生分析问题和解决问题能力也是十分必要的。

对于没有明确结论和常规解法的探索性问题，实事求是地分析问题的特点，掌握已知与未知的矛盾，采取适宜的对策，对于让学生掌握具体问题具体分析的科学方法，理论联系实际很重要。运用学过的知识和方法去解决这些新颖的、没有固定解题程式、没有已知结论的问题，在数学知识和方法的应用中，一方面提高学生的运算能力、逻辑思维能力和空间想象力等一般的数学能力，同时也要培养和提高观察、比较、分析、综合、抽象、概括、归纳、猜想等一般的心理能力。

存在型问题

用数学的知识与方法去判断一个事物是否存在或者是否具有某种性质，这样的问题叫做存在型问题。

存在型问题中，问题的提出往往是这样的形式：某事物或其某种性质是否存在，若不存在给予证明，若存在说明理由。在数学命题中，常以适合某种性质的结论“存在”、“不存在”、“是否存在”等形式出现。

“存在”就是具有适合某种条件或某种性质的对象。对于这类问题无论用什么方法只要找出一个，就说明存在。

“不存在”就是无论用什么方法都找不出一个适合某已知条件或某种性质的对象。这样的问题一般需要推理论证。

“是否存在”的结论有两种可能，若“存在”需要找出来；若“不存在”，则需说明理由。

存在型问题的解题思路，往往先假设结论是肯定存在的，若经过一系列推论，没有发生矛盾，即肯定结论；若推证出矛盾，即可否定结论。对存在型问题来说，反证法在证明问题中起着重要的作用。

比较型问题

比较若干事物的关系或若干事物某些性质上的异同点，从中找出规律性的东西，这种问题叫做比较型问题。如比较若干代数式或超越式值的大小，比较若干函数的性质，比较若干条曲线的某种特点，比较若干种数列的共性及特性等

等。

比较型问题的解题思路因题目的不同要求而异。比较若干代数式或超越值的大小，可以用求差比较法、求商比较法、基本不等式法、函数单调法以及图象法等方法来解；从逻辑角度上看，有综合法、分析法、反证法、归纳法等。

比较若干函数（乃至若干事物）性质，就要善于抓住它们之间的本质联系和区别，用类比与联想来分析。具体说，就要用数形结合方法，特殊化方法通过研究其性质的基础上的比较、分析、对比来获得结论。

比较若干条曲线的性质不仅要从几何特征，如曲线范围、特殊点、最大（小）值等入手比较，而且要善于用表示曲线的函数（有时属于隐函数）本身的性质。如定义域、值域、单调性、奇偶性、周期性、极值性、凸凹性等函数性质来比较和分析。

比较若干数列的性质，就要抓住数列本身特点，尽可能转化为等差数列或等比数列来比较和分析其异同点。

归纳型问题

未给出问题，需要由特殊情况入手去猜想，进而证明一般性结论的问题，或者将一些比较复杂的问题分门别类地进行讨论，进而归纳出结论，这样的问题叫做归纳型问题。

涉及到自然数的命题，如含自然数 n 的等式、不等式、整除性问题和有关几何的问题，其中有相当数量的都属于归纳型问题。

归纳型问题的解题思路，往往从所给条件出发，通过观

察、试验、分析、归纳、比较、概括、猜想，探索出一般规律，然后再对归纳、猜想的结论进行证明，或者将原来比较复杂的大问题化整为零，按各种情况分门别类进行讨论，进而归纳成一般规律，从而得到问题的解答。对于含自然数 n 的命题，可以考虑采用数学归纳法来证明。解题的关键在于正确的归纳和猜想。探索规律的方法，可以用演绎推理的方法，可以根据问题特点用直觉猜想，也可以用试验的方法，甚至多次实验探求规律。

结果不定型问题

问题的结论是开放型的，命题中既不含有"是否存在"字样，也没有"猜想一般规律"，结论本身隐含着不确定性，即结论可以是多样化的，或由多种形式表达出来的，这样的问题叫做结果不定型问题。

求出某种性质成立的充要条件的问题，该性质满足的充要条件可以是多种，因此，该问题的结论就是不确定的，它就属于结果不定型问题。用反三角函数表示角的问题，其表达形式可以用反正弦函数、反余弦函数、反正切函数，甚至反余切函数，而且每一种函数均可用多种形式表达，这种问题也属于结果不定型问题。

结果不定型问题不像存在性问题那样由设问方式便可判断出问题性质，它属于隐含探索型问题。

结果不定型问题的解题思路没有固定的模式，往往要从具体问题的特点出发，来寻~~找~~解题的突破口。这种类型问题还可由结论的几种形式的等价性来检验结论的正确性。这类

问题的解决可以通过由此及彼、由彼及此的类比、联想，估计出结论，再进行证明；可以由具体到抽象，由特殊到一般的归纳得出结论，再进行证明；还可以根据定义、定理直接进行演绎推理，使问题“水落石出”。

发散型问题

凡属需要多层次、多角度、多方位、多向的考虑和分析来讨论解决的问题叫做发散型问题。发散型问题的解决往往需要通过发散性思维来寻找解题方向，即需要在解题过程中具有敏锐的直觉思维、广阔的联想思维、丰富的想象思维和深刻的抽象思维，还要善于将形象思维和抽象思维有机地结合起来，使二者相辅相成、相互转化、相映成趣。

发散型问题的解题思路要从多种假设和多种途径中寻求答案，通过思维的流畅、得体、灵活、变通、独特和变异中探索解题思路。不拘泥常法，不恪守成规，善于开拓变异，加大发散的量，提高发散的质，使创新意识强烈化，不断改变思维的对比参考系，使之具有伸缩性，以便冲破旧的传统模式。使学生逐步养成使用多方向、多角度立体式思维来观察问题解决问题的习惯，善于改变思维方向，以超凡脱俗的气质来观察问题，从意想不到的角度去认识事物，进而找到解题的突破口。

讨论型问题

凡属需要通过对问题进行深入剖析，研究讨论解决的叫讨论型问题。如讨论函数的性质，讨论某个角的性质、范

围，讨论某事物（－1的虚立方根）性质等等。

讨论型问题的解决需要根据问题类型和特点，分门别类地研究，具体问题具体分析、讨论。

论论型问题的解题思路就是从问题的要求出发，挖掘题目提供的各种信息，特别是隐含信息，通过思维的直觉序列、正向序列、联想序列、逆向序列，从问题的信息、涉及到的知识、采用的方法中，不断地深化对问题的剖析和理解，使对问题的认识得以展开深化，以便开展讨论，使问题迎刃而解。

例如讨论某一函数性质，首先就要明确讨论什么，即问题要求讨论的内容，如函数定义域、值域、函数图象的对称性、特殊点，曲线范围、渐近线、函数单调性、奇偶性、周期性、最值性等。进而逐一讨论，使问题得以解决。又如讨论某个角的性质，就要抓住角本身的特点，这个角与其它角之间的关系，从它们的某些三角函数出发，利用各种工具（如正余弦定理）和各种方法（如放缩法、角与三角函数互化法），来通过这个角在问题中的地位讨论这个角的性质。

应用型问题

在生产或生活中遇到的实际问题或应用某些数学知识去解决另一些数学问题的叫应用型问题。数学来源于实践，又服务于实践，因此强调数学在实际生产、生活中的应用是十分必要的，解决实际应用问题也是培养和提高学生分析问题和解决问题能力的需要。应用某些数学知识去解决另一些数学问题，即综合型问题，这是数学能力的综合体现。