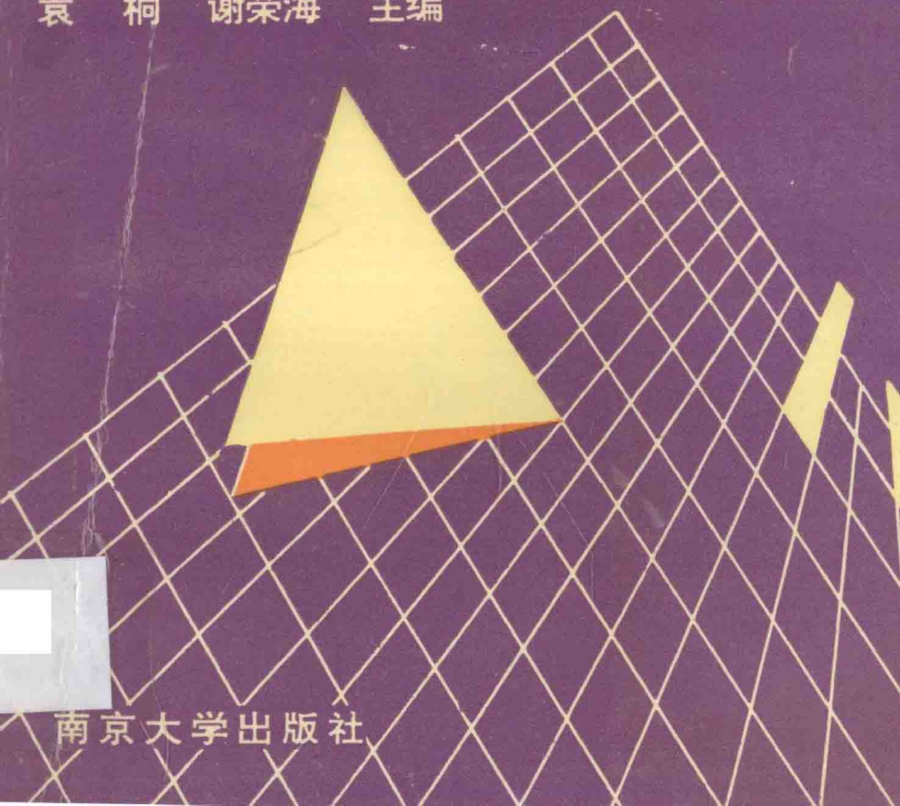
Bian Chu Zhong Shu Xue Da Guan

新编
初中数学大观

袁　桐　谢荣海　主编



南京大学出版社

新编初中数学大观

修订本

袁桐 谢荣海 主编

南京大学出版社

1995 · 南京

（苏）新登字第011号

内 容 提 要

本书通过典型例题的解答和评注，介绍了初中数学的主要内容和方法，并配以适量的练习和习题；通过一定数量的初中数学竞赛问题的解说分析，循序渐进地介绍了初中数学竞赛的概貌，穿插了一些与初中数学有关的数学史话，数学知识的内容。可供初中教师，学生家长参考，也可供初中学生伴读、自学、复习、竞赛使用。选材精当，深入浅出，实用性强。

全书习题统一编序，并附解答或提示。

参加修订工作的还有石玉明、高鸣、曹德惠、王紫电、张逸麟同志。

与本书同时出版的还有《新编高中数学大观》及《新编小学数学大观》。

新编初中数学大观

修订本

袁桐　谢荣海　主编

南京大学出版社出版

（南京大学校内）

江苏省新华书店发行　江苏丹徒印刷厂印刷

1990年6月第1版　1995年4月第6次印刷

开本 787×1092　1/32　印张：11.625

字数：251千　印数：86501—91500

ISBN 7-305-00833-8

O·49　定价：6.80元

目 录

第一章 数的概念……………………………………………………（1）
第一节 有理数……………………………………………………（1）
第二节 实数……………………………………………………（11）
阅读材料……………………………………………………（20）
数学竞赛之窗：填数字（20）求六位数（21）整数的分类（22）抽屉原理（25）整数的个位数字（26）实数的整数部分和小数部分（27）有理数的稠密性（29）
数学史话：数学符号（30）实数（31）
数学知识介绍：二进数（32）
第二章 代数式……………………………………………………（34）
第一节 有理式……………………………………………………（34）
第二节 幂和根式……………………………………………………（54）
阅读材料……………………………………………………（66）
数学竞赛之窗：数的整除性（66）式的变形与运算（71）根式的化简与计算（73）完全平方数（76）分解因式（77）无理数的证明（77）
数学史话：平方根（78）代数式（79）数论（79）
数学竞赛（79）国际数学奥林匹克（80）
第三章 方程和不等式……………………………………………………（81）
第一节 一次方程和一次不等式……………………………………（81）

第二节　二次方程……………………………………（92）
第三节　一元二次不等式……………………………（105）
第四节　列方程解应用题……………………………（108）
阅读材料………………………………………………（114）
数学竞赛之窗：二次方程的根（114）二次方程的根与判别式（117）判别式与最值（119）二次方程的根与系数的关系（121）二次方程的公共根问题（122）分式方程、无理方程解例（124）
数学史话：代数方程（127）阿贝尔（127）费尔马大定理（128）
第四章　函数……………………………………………（129）
第一节　一次函数……………………………………（129）
第二节　二次函数……………………………………（137）
第三节　对数…………………………………………（145）
阅读材料………………………………………………（149）
数学竞赛之窗：适应性试题（144）函数与方程的关系（151）二次函数的极值（153）绝对值函数（156）指数和对数（158）
数学史话：我国古代的著名数学家（160）我国近代的著名数学家（161）
第五章　解三角形………………………………………（163）
第一节　锐角三角函数………………………………（163）
第二节　解三角形……………………………………（168）
阅读材料………………………………………………（178）
数学竞赛：直角三角形中的边角关系（178）三角形的面积（180）正弦、余弦定理的应用（182）证明定值问题（187）构造几何图形（188）

数学史话：正弦定理与余弦定理（192）三角学（193）
第六章　统计初步……………………………………………（194）
第一节　统计图表…………………………………………（194）
第二节　抽样统计…………………………………………（200）
阅读材料……………………………………………………（209）
数学竞赛之窗：数据处理（209）信息处理（212）称珍珠（217）计算机信息（217）
计算器中统计内容计算方法介绍（218）
第七章　直线形………………………………………………（219）
第一节　直线、相交线、平行线…………………………（219）
第二节　三角形……………………………………………（227）
第三节　四边形……………………………………………（245）
第四节　直线形的面积……………………………………（256）
阅读材料……………………………………………………（259）
数学竞赛之窗：线段与直线（259）正方形中的问题（260）证明三角形全等（265）等积变形（265）对称变换（266）旋转变换（267）
数学史话：勾股定理（270）几何原本与欧几里得（270）
数学知识介绍：镶嵌图（271）几何论证（273）
第八章　相似形………………………………………………（276）
阅读材料……………………………………………………（288）
数学竞赛之窗：比例与恒等式（288）相似形与面积（291）比例替换（294）相似三角形的判断（296）求线段的比（297）证明三线共点（299）证明三点共线（300）直角三角形中的子三角形（300）
数学史话：三角形相似的判定定理（301）

数学知识介绍：共线点的有关定理（302）共点线的有关定理（303）
第九章　圆……………………………………………………（304）
第一节　圆的性质及位置关系………………………………（304）
第二节　圆的度量及正多边形………………………………（322）
阅读材料……………………………………………………（328）
数学竞赛之窗：覆盖（328）圆幂定理与方程（336）四点共圆（337）作辅助圆（338）正多边形（339）圆的对称性（342）
数学史话：圆周率（343）
附录一：综合练习题选………………………………………（345）
附录二：答案…………………………………………………（353）
练习答案……………………………………………………（353）
习题答案……………………………………………………（355）
综合练习题答案……………………………………………（365）

第一章　数的概念

小学数学里，数的运算与分析，只限于扩大的自然数列，（即自然数和零），正分数（或正小数）．初中代数里，数的概念要扩大．首先在初一要出现负数，然后在初二要出现无理数．也就是先扩大到有理数，再扩大到实数．本书代数部分，是按“块”集中的，在编写中注意到实际教学过程中的教学次序所给的知识准备．初一学生阅读本书就应该先跳过本章第二节．

第一节　有理数

[主要概念]

一、自然数

1.自然数　表示物体个数的数，如1，2，3，……等叫自然数，也叫做正整数．

2.自然数列　把自然数从小到大依次排成一列数：1，2，3，4，5，……叫做自然数列．自然数列有第一个数1，而没有最后一个数，因此自然数的个数是无限的．

3.奇数与偶数　不能被2整除的自然数叫做奇数（一般用$2k-1$表示，k为自然数）．能被2整除的自然数叫做偶数（一般用$2k$表示，k为自然数）．

4.因数与倍数　自然数a能被自然数b整除，就称b是

自然数 a 的因数；同时，也称 a 是 b 的倍数。

例如：6是2的倍数，而1，2，3，6都是6的因数。

5.质数与合数　如果自然数的因数中，有不同于1和本身的因数，就称它是合数。如6有因数2和3，它们不同于1和6。反之，则称为质数（或素数）。不难知道，质数都大于1，而且最小的质数是2；而唯一的是偶数的质数也是2。

6.最大公因数与最小公倍数　两个（或两个以上的）自然数的公有的因数中，最大的一个，称为这两个自然数的最大公因数（或说最大公约数）。设两个自然数为 a，b。通常用 (a, b) 表示它们的最大公因数。如果 $(a, b)=1$，就称 a、b 互质。

两个(或两个以上的自然数)，共同的倍数中，最小的一个，称为它们的最小公倍数。设两个自然数为 a，b。通常用 $[a, b]$ 表示它们的最小公倍数。

7.完全平方数　自然数中，1，4，9，16，25，36……分别表示了 1×1，2×2，3×3，4×4，5×5，6×6……的结果，称它们为完全平方数。它们的个位数字只能是0，1，4，5，6，9六个中的一个。

二、整数

1.整数　正整数、零和负整数统称整数。既无最小的整数，也无最大的整数。

2.奇数与偶数　与自然数相比，有了负奇数和负偶数，还有0也是偶数。

奇数用 $2k+1$ 或 $2k-1$（k 为整数）表示；

偶数用 $2k$（k 为整数）表示。

3.因数与倍数　与自然数相比，有了负因数。例如6的因数有±1，±2，±3，±6。同样有了负倍数。例如，-12是6的-2倍。

但是，最大公因数的概念未变，而最小公倍数，应该理解为最小的正的公倍数。

三、有理数

1.有理数　整数（正整数、零和负整数）和分数（正分数和负分数）统称有理数。

任何一个有理数总可以表示成分数$\frac{p}{q}$（p为整数，q为自然数，且p，q互质）的形式。如果把有理数表示成小数，那末一定是有限小数或者无限循环小数。

2.绝对值　数轴上表示一个数的点离开原点的距离叫做这个数的绝对值。我们有

$$|a|=\begin{cases}a，当a>0时；\\0，当a=0时；\\-a，当a<0时.\end{cases}$$

3.有理数的运算　有理数的加、减、乘、除运算法则见下表。

法则 \ 运算（原数）	同号：符号	同号：绝对值	异号：符号	异号：绝对值
加法	保持原号	相加	同绝对值较大者	相减
减法	按减去一个数等于加上它的相反数，转化为加法			
乘法	+	相乘	-	相乘
除法	+	相除	-	相除

注：（1）有理数间，经过加、减、乘、除（除数不为零）的运算，其结果仍为有理数。

（2）有理数的加法和减法运算可统一成求代数和的运算。

（3）一个数除以另一个不为0的数，等于这个数乘以另一个数的倒数；

（4）以前所学过的运算定律对有理数仍然适用：

加法交换律　$a+b=b+a$

加法结合律　$(a+b)+c=a+(b+c)$

乘法换交律　$a\cdot b=b\cdot a$

乘法结合律　$(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$

乘法分配律　$a\cdot(b+c)=ab+ac$

掌握运算定律后，可以简化运算过程。

[练习一]

一、判断题（对的打"√"，错的打"×"）

(1)非负数就是指一切正数　（　　）

(2)$-a$一定是负数　（　　）

(3)任何有理数都有相反数　（　　）

(4)任何有理数都有倒数　（　　）

(5)$|a|=a$，则$a>0$　（　　）

(6)两个有理数的和一定比其中每一个数大（　　）

(7)任何有理数的绝对值都是正数（　　）

(8)零除以任何数都是零　（　　）

二、填空

(1)$\frac{1}{3}$的相反数是______，绝对值是$\frac{1}{3}$的数是____；

$-\frac{1}{3}$的倒数是________。

（2）绝对值大于3.2而小于6.4的整数有______。

（3）用“>”“=”“<”填空：

1) -10___0.1　　2) $|-3|$___$|-5|$

3) $-(+3\frac{1}{3})$___$-\left|-3\frac{2}{3}\right|$

4) $-(-\frac{2}{5})$___$|0.4|$

（4）若$a>0$，$b<0$，那么当______时，$a+b<0$。

（5）若$a>0$，那末当b______时，$\frac{a}{b}<1$。

（6）若$\frac{a}{b}<0$，且$|a|=|b|$，则$a+b=$______。

三、选择题（每题有且只有一个正确答案，把正确答案的序号填入括号内）

（1）零是（　　）

（A）最小的整数；　　（B）最小的非负有理数；

（C）最小的自然数；　（D）最小的有理数。

（2）如果a是任意一个有理数。则a与$3a$的大小关系是（　　）

（A）$a<3a$　　（B）$a>3a$；

（C）$|a|<|3a|$　（D）不能确定。

（3）绝对值小于5的整数有（　　）

（A）6个；　（B）8个；　（C）9个；　（D）无数个。

四、把下列各数填在相应的大括号内：

3，$5\frac{3}{4}$，6.7，-23，0，0.003，-3.14，$\frac{1}{2}$

整数集合　{　　　　　　　　　　　　…}
负数集合　{　　　　　　　　　　　　…}
正分数集合{　　　　　　　　　　　　…}
负分数集合{　　　　　　　　　　　　…}

五、将上题中列出的有理数，依从小到大的次序重新排列起来。

六、计算

(1) $-3-3-5$

(2) $|-16|-|+16|$;

(3) $(-3\frac{1}{4})-(-7\frac{2}{5})$;

(4) $-(-5\frac{1}{4})+(-32\frac{1}{3})+(-3\frac{1}{7})+(-5\frac{1}{4})$

$-(-12\frac{6}{7})$;

七、(1)写出－15的全部正因数

(2)求最大公因数：(189，294)

(3)求最小公倍数：[189，294]

(4)(189，294)×[189，294]　与189×294谁大？

八、(1)求(189，294，315)及[189，294，315]的值。

(2)两个质数的和是奇数，那么其中一定一个质数是几？为什么？

[主要方法例说]

例1．已知相邻两个奇数的和是－280，求这两个奇数。

要领：奇数的表示法

解：设此二奇数为$2k-1$，$2k+1$（k为整数），则由已知，$(2k-1)+(2k+1)=-280$，即$4k=-280$，

$\therefore\ k=-70$。

因此，一个奇数是-141，另一个奇数是-139。

注："设"很重要．设得好，可以把问题中的不少已知条件都包含进去．本题中，奇数可设为$2k+1$（或$2k-1$），k为整数．如果把大的看作是$2k+1$，则小的是$2k-1$。如果把小的看作是$2k+1$，则大的就设成$2k+3$。这是因为两个相邻的奇数，相差2．

习题中的4、5、6三题，其关键都在"设"上，这是常用的一种方法．

［习题］

1.不大于3的自然数有__________。

2.在五位数3427□里，在□的位置上分别填上哪些数字就能使这个数成为：

（1）2的倍数；　　（2）3的倍数；

（2）5的倍数；　　（4）10的倍数；

（3）11的倍数。

3.45的约数有________；30和45的公约数有________；它们的最大公约数是________；最小公倍数是________。

3.已知相邻的三个整数之和是-27，求这三个数。

5.证明一个奇数与一个偶数的和是奇数。

6.证明两个偶数的积仍是偶数。

例2.计算$16\times(-3)^2+5\times(-3)-12\div2+(-60)\div(-4)+18\times(-2)^3-(-3)\times(+2)$。

要领：有理数的运算顺序是先乘方，再乘、除，最后加减；要在运算过程中根据问题的具体情况，应用运算定律和性质简化运算。

解：$16\times(-3)^2+5\times(-3)-12\div 2+(-60)\div(-4)+18\times(-2)^3-(-3)\times(+2)$

$=16\times 9+5\times(-3)-12\div 2+(-60)\div(-4)+18\times(-8)-(-3)\times(+2)$

$=144-15-6+15-144+6$

$=0$

注：计算题，除了正确无误，还要力求简捷迅速。这就要求解题时，首先要统观全题，发现特点，然后下手，做到心中有数。本题中，注意到把相反数合并，是它的特点。

> 例3.计算下列各题：
>
> (1) $[(-4)^2-(-6)]-(2\frac{1}{7}-3\frac{1}{4})\times 28$；
>
> (2) $(-0.1)\times[(-10)\times(-3)\times(-7)\times(-\frac{1}{3})\times(-\frac{1}{14})]$。

要领：(1)中第二项括号内不必通分；(2)中首先确定符号。

解：(1) 原式 $=[16+6]-(\frac{15}{7}-\frac{13}{4})\times 28$

$=22-(60-91)=22+31=53$。

(2) 原式 $=0.1\times 10\times 3\times 7\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{14}$

$=(0.1\times 10)\times(3\times\frac{1}{3})\times(7\times\frac{1}{14})$

$$=\frac{1}{2}$$

注：统观全题的做法，数学上称为整体观念。本例中的两题，尽管内容不同，思路是一致的。

［习题］

7.计算下列各题：

(1) $-1\frac{2}{3}\times(-1\frac{1}{5})\div(-4)$；

(2) $-1\frac{2}{3}\div\left[-1\frac{1}{5}\div(-4)\right]$；

(3) $(-\frac{3}{8})\times(-16)-(-5)(-4)(-0.5)$；

(4) $-3^2+(-2\frac{1}{2})^2-(-2)^3+2$；

(5) $-4^2+2\times(-3)^2-6\div\frac{1}{4}$；

(6) $\frac{1}{2}(-3)^2\div(-\frac{3}{4})-(\frac{2}{3})^3\times(-\frac{3}{4})^2$；

(7) $-\frac{1}{12}+(0.3\times3\frac{1}{3}+\frac{1}{3})\div|-4|$；

(8) $(-100)\times\left[(+0.7)+(+0.03)+(-\frac{4}{5})+(-\frac{3}{10})\right]$；

(9) $\left[(-\frac{1}{2})-\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}\right]\cdot(-12)$；

(10) $\frac{1}{5}\div\frac{1}{3}+(1\frac{1}{2})\cdot(-\frac{1}{3}(-\frac{1}{2}\div5+\frac{3}{7}\div(-2))+(-\frac{1}{2})^2-(-\frac{2}{5})(-\frac{5}{7})+(-\frac{1}{2})^3$；

例．求4171与5723的最大公因数。

要领：用辗转相除法

解：设 $a=4171$，$b=5723$。

步骤一：以 a 去除 b，可得商1，余1552，写成：

1	5723	4171
	4171	
	1552	

步骤二：以1552去除 a，可得商2，余1067。

1	5723	4171	2
	4171	3104	
	1552	1067	

以下，再将1552看作 b，1067看作 a，继续施行上法，完整的写法为：

1	5723	4171	2
	4171	3104	
1	1552	1067	2
	1067	970	
5	485	97	
	485		
	0		

即（4171，5723）＝97。

注：本例的求法称为辗转相除法，它适用于两个数字比较大，而且不容易看出质因数的情况。

［习题］

8．求（1400，420）及［1400，420］．

9．若 a 是整数，$\dfrac{5}{a+1}$ 也是整数，求 a 值。

10．求（504，588）及（311467，308503）。