



高等数学

GAODENG SHUXUE

● 主编 龚三琼 李 娟 吴多康

 南京大学出版社

高等数学

GAODENG SHUXUE

主 编 龚三琼 李 娟 吴多康
副主编 王 威 滕海勇 王 磊



图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 龚三琼, 李娟, 吴多康主编. —南京 :
南京大学出版社, 2014. 8
ISBN 978-7-305-13700-6

I. ①高… II. ①龚… ②李… ③吴… III. ①高等数
学—高等学校—教材 IV. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 178581 号

出版者 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
出版人 金鑫荣

书 名 高等数学
主 编 龚三琼 李 娟 吴多康
责任编辑 吴 汀 编辑热线 025-83686531
照 排 南京紫藤制版印务中心
印 刷 南京人文印务有限公司
开 本 787×1092 1/16 印张 23.25 字数 566 千
版 次 2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-13700-6
定 价 40.00 元

网址: <http://www.njupco.com>
官方微博: <http://weibo.com/njupco>
官方微信号: njupress
销售咨询热线: (025)83594756

-
- * 版权所有, 侵权必究
 - * 凡购买南大版图书, 如有印装质量问题, 请与所购
图书销售部门联系调换

前 言

为了适应我国现代职业教育的快速发展以及构建现代职业教育体系的迫切需要,努力“为学生多样化选择、多路径成才搭建‘立交桥’”,我们根据教育部的有关文件精神和社会对职业教育学生的素质要求,贯彻“以应用为目的,以必需、够用为度”的编写原则,在认真总结多年来职业教育数学教学经验的基础上,编写了本教材。

本教材在编写过程中,继承了传统高等数学教材的一些特点,也汲取了许多职业教育高等数学教材的优点,同时我们也作了一些尝试,主要体现在下列几点:

1. 按照阶梯式分程度设计教材内容和习题

现代职业教育体系下的职业教育生源呈现多样性特点,在初等数学的掌握程度和个人发展规划等方面也呈现多层次性.为适应不同层次学生的学习需求,对每一章的重点内容和解题方法,采取边讲解边让学生“练一练”的方法,并按照由易到难的顺序安排课后“习题”和每章的“复习题”;为便于学生自学,每章之后配备“学习指导”;同时为适应部分学生继续深造的需要,适当加深一些内容,加深的內容以“※”号标示,或者放在每章的“知识拓展”部分。

2. 通过实例分析突出微积分应用的广泛性

每章都列举一些典型的实例,并通过分析,让读者了解微积分在日常生活、经济、物理、医疗卫生等诸多领域的广泛应用,让读者感受到微积分的重要和奥妙,激发学生学习微积分的热情,为后续学习奠定基础。

3. 增加软件应用内容

随着计算机的广泛应用和数学软件的日趋完善,数学也开始引进实验手段.我们在第十章介绍了如何用 MATLAB 软件进行微积分的符号计算,包括绘制函数图像、求极限、导数、积分和级数运算以及解微分方程等.这部分内容的引入对于培养学生的动手能力、解决实际问题的能力和利用计算机解决问题的能力无疑是十分有利的。

4. 注重教材内容的通俗易懂

教材编写过程中,注意讲清概念,适度淡化深奥的数学理论,减少论证,力求使学生掌握基本概念、基本理论和计算技能,初步具备应用微积分方法解决实际问题的能力。

尽量按照从感性到理性、从直观到抽象、从定性到定量的循序渐进的认知过程展开知识,概念、定理的描述尽量形象直观,力求使学生感知概念、定理的形成过程,便于学生理解和掌握.

5. 注重教材内容的衔接

随着高中数学课程的改革和现代职教体系的构建,学生的初等数学学习情况存在较大程度的差异.我们在研究中学数学教材的基础上,注重教学内容的衔接,如基本初等函数、极坐标系、复数和中学常用数学公式等知识内容的引入,有利于不同层次学生的学习.

6. 注重数学建模方法的介绍

教材在附录中介绍了数学模型的含义和建立数学模型的步骤,并且通过对一个实例建模过程的分析,让学生体会数学建模的过程,提高学生应用数学建模解决实际问题的意识和能力.

本教材适用于高职高专理工科和本科少学时数学课程的教学.

苏州高博软件技术职业学院的龚三琼、吴多康、滕海勇、王磊老师以及南京应天职业技术学院的李娟、王威老师参加了本书的编写工作.本书的结构布局、统稿、定稿工作由龚三琼承担.

由于水平有限,书中难免存在谬误之处,敬请广大读者不吝赐教!

编者
2014年7月

目 录



第一章 函数、极限与连续	1
§ 1.1 函数	1
一、函数概念	1
二、函数的基本性态	3
三、反函数	4
四、初等函数	4
五、建立函数关系举例	6
习题 1.1	6
§ 1.2 极限概念	7
一、数列的极限	7
二、函数的极限	9
三、无穷小与无穷大的概念	11
* 四、极限的精确定义	13
习题 1.2	14
§ 1.3 极限运算	15
一、极限运算法则	15
二、两个重要极限	16
三、无穷小的比较	19
习题 1.3	20
§ 1.4 函数的连续性	21
一、函数的连续性	21
二、间断点及其分类	23
三、初等函数的连续性	24
四、闭区间上连续函数的性质	25
习题 1.4	26
知识拓展: 常见经济函数的介绍	27
典型实例分析	29
一、连续复利问题	29
二、四脚方椅的稳定问题	30
学习指导	31
复习题一	33



第二章 导数与微分	37
§ 2.1 导数概念	37
一、引例	37
二、导数的概念	38
三、导数的几何意义	42
四、可导与连续的关系	43
习题 2.1	44
§ 2.2 求导法则	44
一、导数的四则运算法则	44
二、反函数的求导法则	46
三、复合函数的求导法则	46
四、隐函数求导法	48
五、基本初等函数的求导公式	49
* 六、参数方程所表示函数的导数	50
习题 2.2	50
§ 2.3 高阶导数	51
习题 2.3	53
§ 2.4 函数的微分	54
一、微分的定义	54
二、微分的几何意义	56
三、微分公式与运算法则	56
四、微分形式不变性	57
习题 2.4	57
知识拓展:微分在近似计算中的应用	58
典型实例分析	59
一、导数在经济学中的含义	59
二、经济量的弹性问题	60
三、人影移动的速率问题	61
学习指导	61
复习题二	64
第三章 导数的应用	68
§ 3.1 洛必达法则	68
一、“ $\frac{0}{0}$ ”型和“ $\frac{\infty}{\infty}$ ”型未定式	68
二、其他类型极限求法	71
习题 3.1	71
§ 3.2 函数的单调性和极值	72



一、函数的单调性	72
二、函数的极值	74
三、最大值与最小值问题	76
习题 3.2	78
§ 3.3 曲线的凹凸性与拐点	78
习题 3.3	80
§ 3.4 函数作图	80
一、曲线的渐近线	80
二、函数图形的描绘	81
习题 3.4	82
知识拓展:微分中值定理	82
典型实例分析	85
一、利润最大问题	85
二、计算机为何采用二进制	85
学习指导	87
复习题三	91
第四章 不定积分	95
§ 4.1 不定积分的概念与性质	95
一、原函数与不定积分的概念	95
二、不定积分的几何意义	96
三、不定积分的性质	97
四、基本积分公式	97
五、直接积分法	98
习题 4.1	99
§ 4.2 换元积分法	99
一、第一类换元积分法(凑微分法)	100
二、第二类换元积分法	102
习题 4.2	105
§ 4.3 分部积分法	106
习题 4.3	109
§ 4.4 积分表的使用	110
一、直接代入表中公式求解	110
二、先变形或进行变量替换,再查表求积分	110
三、利用递推关系式查表求解	110
习题 4.4	111
知识拓展:几种特殊类型函数的积分	111
典型实例分析	117
一、他的胰脏正常吗	117



二、用马尔萨斯人口方程预测人口总数	117
学习指导	118
复习题四	124
第五章 定积分及其应用	126
§ 5.1 定积分的概念与性质	126
一、引例	126
二、定积分的定义	128
三、定积分的几何意义	129
四、定积分的性质	130
习题 5.1	133
§ 5.2 定积分的计算	133
一、牛顿-莱布尼兹公式	133
二、定积分的换元积分法	134
三、定积分的分部积分法	136
习题 5.2	137
§ 5.3 定积分的应用	137
一、微元法简介	137
二、定积分的几何应用	138
* 三、定积分的物理应用和经济应用举例	142
习题 5.3	143
§ 5.4 广义积分	144
一、无穷区间上的广义积分	144
* 二、无界函数的广义积分	145
习题 5.4	146
知识拓展:积分上限的函数及其导数	147
典型实例分析	149
一、储存费问题	149
二、车辆的平均行驶速度问题	150
学习指导	150
复习题五	154
第六章 常微分方程	159
§ 6.1 微分方程的基本概念	159
习题 6.1	161
§ 6.2 一阶微分方程	161
一、可分离变量的微分方程	162
二、齐次方程	163
三、一阶线性微分方程	165



习题 6.2	168
§ 6.3 二阶常系数线性微分方程	168
一、线性微分方程解的结构	168
二、二阶常系数线性齐次微分方程	170
三、二阶常系数线性非齐次微分方程	172
习题 6.3	175
知识拓展	176
一、可降阶的二阶微分方程	176
二、伯努利方程	177
典型实例分析	179
一、招生问题	179
二、破案问题	179
学习指导	180
复习题六	185
第七章 空间解析几何及向量代数	187
§ 7.1 空间直角坐标系	187
一、空间点的坐标	187
二、空间两点间的距离	188
习题 7.1	189
§ 7.2 空间向量	189
一、向量的概念	189
二、向量的加减法与向量的数乘	190
三、向量的坐标表示	191
四、向量的数量积	193
五、向量的向量积	195
习题 7.2	197
§ 7.3 平面及其方程	197
一、平面方程	197
二、平面之间的关系	200
* 三、点到平面的距离	201
习题 7.3	201
§ 7.4 空间直线及其方程	201
一、直线方程	201
二、两直线的夹角	203
三、直线与平面的夹角	204
习题 7.4	204
知识拓展:空间曲面与空间曲线	205
典型实例分析	211



一、垂直渡河问题	211
二、光线的反射问题	212
学习指导	212
复习题七	217
第八章 多元函数微积分学	219
§ 8.1 多元函数的基本概念	219
一、多元函数的概念	219
* 二、二元函数的几何意义	221
三、二元函数的极限	221
四、二元函数的连续性	222
习题 8.1	223
§ 8.2 偏导数	224
一、偏导数的定义及其算法	224
二、高阶偏导数	226
习题 8.2	227
§ 8.3 全微分	228
一、全微分的定义	228
* 二、全微分的算法	229
* 三、全微分在近似计算中的应用	229
习题 8.3	230
§ 8.4 多元复合函数和隐函数的求导法	230
一、多元复合函数的求导法	230
二、隐函数的求导法	233
习题 8.4	234
§ 8.5 偏导数的应用	235
一、二元函数的极值	235
二、最大值与最小值问题	236
三、条件极值	237
* 四、偏导数的几何应用	238
习题 8.5	240
§ 8.6 二重积分的概念与性质	240
一、二重积分的概念	240
二、二重积分的性质	243
习题 8.6	244
§ 8.7 二重积分的计算	244
一、利用直角坐标计算二重积分	244
* 二、利用极坐标计算二重积分	248
习题 8.7	251



* § 8.8 二重积分的应用举例	251
一、求体积	251
二、求曲面的面积	252
三、求平面薄板的质量	253
习题 8.8	253
知识拓展:简单经济问题中的最大值、最小值求法	253
典型实例分析	255
一、洗衣淘米问题——节约用水很重要	255
二、火山喷发后高度的变化问题	256
学习指导	256
复习题八	263
第九章 无穷级数	268
§ 9.1 常数项级数的概念与性质	268
一、常数项级数的概念	268
二、常数项级数的性质	271
三、级数收敛的必要条件	272
习题 9.1	272
§ 9.2 常数项级数的审敛法	273
一、正项级数及其审敛法	273
二、交错级数及其审敛法	276
三、任意项级数的绝对收敛与条件收敛	277
习题 9.2	279
§ 9.3 幂级数	279
一、函数项级数的一般概念	279
二、幂级数及其收敛区间的求法	280
* 三、幂级数的运算	283
习题 9.3	285
§ 9.4 函数展开成幂级数	285
一、泰勒级数	285
二、函数展开成幂级数	286
习题 9.4	289
知识拓展:根值判别法	290
典型实例分析	291
一、齐诺悖论问题	291
二、银行存款问题	292
学习指导	293
复习题九	304



第十章 软件应用	307
§ 10.1 MATLAB 简介	307
一、MATLAB 概述	307
二、MATLAB 的基本运算与函数	308
三、函数绘图	310
§ 10.2 MATLAB 在微积分中的应用	313
一、求一元函数的极限	313
二、求一元函数的导数	313
三、求一元函数的积分	315
四、解常微分方程	315
五、求偏导数	316
六、求二重积分	317
七、进行级数运算	318
附录一 基本初等函数的图形及其主要性质	320
附录二 常用数学公式	323
附录三 希腊字母表	328
附录四 简易积分表	329
附录五 极坐标系和复数简介	338
附录六 数学建模方法简述	341
参考答案	345
参考文献	360



函数是现代数学的基本概念之一,也是微积分学中最基本的概念,是高等数学的主要研究对象,极限概念是微积分的理论基础,极限方法是微积分的基本分析方法,连续则是函数的一个重要性质.本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法,为微积分的学习奠定基础.

§ 1.1 函 数

一、函数概念

1. 区间与邻域

把介于某两个实数之间的全体实数称为区间,这两个实数称为区间的端点,两端点间的距离称为区间的长度,区间包括有限区间和无限区间.

有限区间: 设 a, b 为两个实数,且 $a < b$, 数集 $\{x | a < x < b\}$ 称为开区间,记为 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

类似地,有闭区间和半开半闭区间:

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}, [a, b) = \{x | a \leq x < b\}, (a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

无限区间: 引入记号“ $+\infty$ ”(读作“正无穷大”)及“ $-\infty$ ”(读作“负无穷大”), 并记 $[a, +\infty) = \{x | x \geq a\}$, $(-\infty, b] = \{x | x \leq b\}$. 特别地,全体实数的集合 \mathbf{R} 也可以表示为 $(-\infty, +\infty)$. 常用 I 来表示区间.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 为任一实数,以 a 为中心的任何一个开区间称为点 a 的一个**邻域**,记为 $U(a)$.

若开区间的端点到中心的距离为 δ ,则称此邻域为点 a 的 δ 邻域,记为 $U(a, \delta)$, 即 $U(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta\}$. 将 $U(a, \delta)$ 的中心 a 去掉的点集称为点 a 的去心 δ 邻域,记为 $\dot{U}(a, \delta)$, 即 $\dot{U}(a, \delta) = \{x | a - \delta < x < a + \delta, \text{ 且 } x \neq a\}$.

2. 常量与变量

生活中存在着各种形式的量,有些量在研究的过程中保持不变,可用固定的数值来表示,这种量称为**常量**,常用字母 a, b, c 等表示;还有一些量在研究的过程中是变化着的,可以取不同的数值,这种量称为**变量**,常用字母 x, y, z, t 等表示.



需要指出的是,常量和变量都是相对的概念,同一个量在某个问题中是常量,而在另外的问题中则可能是变量.

初等数学主要研究常量,而高等数学主要研究变量,着重研究变量与变量之间的依从关系.

3. 函数的定义

在某一自然现象或社会现象中,常常会遇到许多变量,这些变量并不是孤立变化的,而是相互联系并遵循一定的规律的,函数就是描述各种变量之间相互关系的一个法则.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量, D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x \in D$, 变量 y 按照一定的法则 f , 总有唯一确定的数值和它对应, 则称 y 是 x 的函数, 记作 $y=f(x), x \in D$.

其中, x 称为自变量, y 称为因变量, 数集 D 称为这个函数的定义域, 当 x 取遍 D 的各个数值时, 对应函数值的全体组成的数集称为函数的值域, 记为 $M=\{y|y=f(x), x \in D\}$.

函数的两个要素是对应法则和定义域. 在实际问题中, 函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的. 如果不考虑所讨论函数的实际意义, 它的定义域就是使解析式有意义的一切实数构成的集合.

【例 1.1.1】 确定函数 $y=\frac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 该函数的定义域为满足不等式组 $\begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases}$ 的集合, 解不等式组得

$$-1 \leq x \leq 1 \text{ 且 } x \neq 0,$$

所以定义域为

$$D=[-1, 0) \cup (0, 1].$$



【练一练】 求下列函数的定义域:

(1) $y=\frac{1}{1-x^2}$;

(2) $y=\sqrt{x-4}$.

4. 函数的表示法

(1) **表格法** 把一系列自变量的值与对应的函数值列成表格的方法, 例如平方表、三角函数表等, 这就是函数的表格法.

(2) **图像法** 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法. 例如, 图 1-1 是绝对值函数 $y=|x|$ 的图形.

(3) **公式法(解析法)** 自变量和因变量之间的关系用数学表达式来表示的方法.

需要指出的是, 有时一个函数在其定义域的不同范围内具有不同的表达式, 这样的函数称为分段函数.

例如, 函数 $y=\begin{cases} 2\sqrt{x} & 0 \leq x \leq 1 \\ 1+x & x > 1 \end{cases}$ 是分段函数, 其定义域为 $[0, +\infty)$, 值域为 $[0, +\infty)$, 如图 1-2 所示.

图 1-2 所示.

又如, 符号函数 $y=\begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ 也是分段函数, 其定义域为 $(-\infty, +\infty)$, 值域为 $\{-1, 0, 1\}$,



如图 1-3 所示.

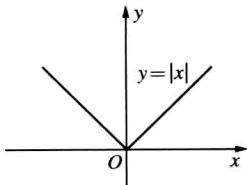


图 1-1

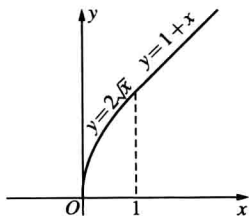


图 1-2

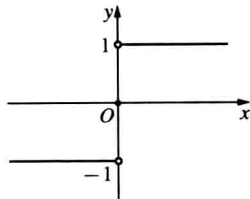


图 1-3

二、函数的基本性态

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称, 若对任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为偶函数; 若对任意的 $x \in D$, 恒有 $f(-x) = -f(x)$, 则称 $f(x)$ 为奇函数.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的, 奇函数的图形是关于原点对称的. 例如, 函数 $y = \sin x$, $y = x^3$ 是奇函数, 函数 $y = \cos x$, $y = x^2$ 是偶函数.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 如果对于区间 I 上的任意两点 $x_1 < x_2$, 都有 $f(x_1) < f(x_2)$ (或 $f(x_1) > f(x_2)$) 则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加 (或单调减少) 的, 区间 I 称为单调增区间 (或单调减区间).

例如, 函数 $y = x^2$ 在区间 $(-\infty, 0)$ 内是单调减少的, 在区间 $(0, +\infty)$ 内是单调增加的; 函数 $y = x^3$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 内是单调增加的.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 如果存在非零常数 T , 使得对一切 $x \in D$, 有 $T+x \in D$, 且 $f(x+T) = f(x)$, 则称 $f(x)$ 为周期函数, 称 T 为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期不唯一, 通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期.

例如, $y = \sin x$, $y = \cos x$ 都是以 2π 为周期的函数, $y = \tan x$, $y = \cot x$ 是以 π 为周期的函数.

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若存在一个正数 $M > 0$, 使得对一切 $x \in D$, 恒有

$$|f(x)| \leq M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界, 或称 $f(x)$ 是 I 上的有界函数, 否则称 $f(x)$ 在 I 上无界. 每一个具有上述性质的 M , 都是该函数的界, 也即函数的界不是唯一的.

例如, 函数 $y = \sin x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有界, 因为对任何的实数 x , 恒有 $|\sin x| \leq 1$. 函数 $y = \tan x$ 在区间 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上有界, 而在区间 $[0, \frac{\pi}{2})$ 内无界.



三、反函数

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , 值域为 M . 对于 M 中的任意的 y 值, D 中有唯一的 x 值与之对应, 使得 $y=f(x)$ 成立, 于是得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量、 x 为因变量的新函数

$$x=f^{-1}(y),$$

称为 $y=f(x)$ 的反函数.

习惯上总是用 x 表示自变量, 用 y 表示函数, 因此往往把 $x=f^{-1}(y)$ 改写成 $y=f^{-1}(x)$, 所以今后的反函数也记为 $y=f^{-1}(x), x \in M$.

从反函数的定义可以看出, 函数的定义域恰好是反函数的值域, 值域恰好是其反函数的定义域. 在同一坐标系下, 函数 $y=f(x)$ 和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$ 的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

【例 1.1.2】 求函数 $y=\frac{x}{1+x}$ 的反函数.

解 由 $y=\frac{x}{1+x}$, 解得 $x=\frac{y}{1-y}$, 故反函数为:

$$y=\frac{x}{1-x}, x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty).$$



【练一练】 求函数 $y=\lg x+1$ 的反函数.

四、初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常数函数 $y=C$ (C 是常数).

(2) 幂函数 $y=x^\mu$ (μ 是常数).

(3) 指数函数 $y=a^x$ ($a>0, a \neq 1, a$ 是常数).

高等数学里常用到以无理数 e 为底的指数函数: $y=e^x$ ($e=2.718281\cdots$).

(4) 对数函数 $y=\log_a x$ ($a>0, a \neq 1, a$ 是常数).

当 $a=10$ 时, $y=\log_{10} x$, 简记为 $y=\lg x$, 称为常用对数.

当 $a=e$ 时, $y=\log_e x$, 简记为 $y=\ln x$, 称为自然对数.

(5) 三角函数

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$ 、余弦函数 $y=\cos x$ 、正切函数 $y=\tan x$ 、余切函数 $y=\cot x=\frac{1}{\tan x}$ 、正割函数 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$ 和余割函数 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}$ 六种.

(6) 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 反正弦函数为 $y=\arcsin x$, 反余弦函数为 $y=\arccos x$, 反正切函数为 $y=\arctan x$, 反余切函数为 $y=\operatorname{arccot} x$.

这些函数的性质、图形在中学里已经学过, 这里不再重复, 对基本初等函数不熟悉的读者, 可查阅附录一.