高等数学

GAODENG SHUXUE

主编 龚三琼 李 娟 吴多康

南京大学出版社

高等数学

GAODENG SHUXUE

主　编　龚三琼　李　娟　吴多康
副主编　王　威　滕海勇　王　磊

南京大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

高等数学 / 龚三琼，李娟，吴多康主编. --南京 ：南京大学出版社，2014.8
ISBN 978-7-305-13700-6

Ⅰ. ①高… Ⅱ. ①龚… ②李… ③吴… Ⅲ. ①高等数学—高等学校—教材 Ⅳ. ①O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2014)第 178581 号

出 版 者 南京大学出版社
社 址 南京市汉口路 22 号 邮 编 210093
出 版 人 金鑫荣

书 名 高等数学
主 编 龚三琼 李 娟 吴多康
责任编辑 吴 汀 编辑热线 025-83686531
照 排 南京紫藤制版印务中心
印 刷 南京人文印务有限公司
开 本 787×1092 1/16 印张 23.25 字数 566 千
版 次 2014 年 8 月第 1 版 2014 年 8 月第 1 次印刷
ISBN 978-7-305-13700-6
定 价 40.00 元

网址：http://www.njupco.com
官方微博：http://weibo.com/njupco
官方微信号：njupress
销售咨询热线：(025)83594756

前　　言

为了适应我国现代职业教育的快速发展以及构建现代职业教育体系的迫切需要，努力“为学生多样化选择、多路径成才搭建‘立交桥’”，我们根据教育部的有关文件精神和社会对职业教育学生的素质要求，贯彻“以应用为目的，以必需、够用为度”的编写原则，在认真总结多年来职业教育数学教学经验的基础上，编写了本教材.

本教材在编写过程中，继承了传统高等数学教材的一些特点，也汲取了许多职业教育高等数学教材的优点，同时我们也作了一些尝试，主要体现在下列几点：

1. 按照阶梯式分程度设计教材内容和习题

现代职业教育体系下的职业教育生源呈现多样性特点，在初等数学的掌握程度和个人发展规划等方面也呈现多层次性. 为适应不同层次学生的学习需求，对每一章的重点内容和解题方法，采取边讲解边让学生“练一练”的方法，并按照由易到难的顺序安排课后“习题”和每章的“复习题”；为便于学生自学，每章之后配备“学习指导”；同时为适应部分学生继续深造的需要，适当加深一些内容，加深的内容以“※”号标示，或者放在每章的“知识拓展”部分.

2. 通过实例分析突出微积分应用的广泛性

每章都列举一些典型的实例，并通过分析，让读者了解微积分在日常生活、经济、物理、医疗卫生等诸多领域的广泛应用，让读者感受到微积分的重要和奥妙，激发学生学习微积分的热情，为后续学习奠定基础.

3. 增加软件应用内容

随着计算机的广泛应用和数学软件的日趋完善，数学也开始引进实验手段. 我们在第十章介绍了如何用 MATLAB 软件进行微积分的符号计算，包括绘制函数图像、求极限、导数、积分和级数运算以及解微分方程等. 这部分内容的引入对于培养学生的动手能力、解决实际问题的能力和利用计算机解决问题的能力无疑是十分有利的.

4. 注重教材内容的通俗易懂

教材编写过程中，注意讲清概念，适度淡化深奥的数学理论，减少论证，力求使学生掌握基本概念、基本理论和计算技能，初步具备应用微积分方法解决实际问题的能力.

尽量按照从感性到理性、从直观到抽象、从定性到定量的循序渐进的认知过程展开知识，概念、定理的描述尽量形象直观，力求使学生感知概念、定理的形成过程，便于学生理解和掌握.

5. 注重教材内容的衔接

随着高中数学课程的改革和现代职教体系的构建，学生的初等数学学习情况存在较大程度的差异.我们在研究中学数学教材的基础上，注重教学内容的衔接，如基本初等函数、极坐标系、复数和中学常用数学公式等知识内容的引入，有利于不同层次学生的学习.

6. 注重数学建模方法的介绍

教材在附录中介绍了数学模型的含义和建立数学模型的步骤，并且通过对一个实例建模过程的分析，让学生体会数学建模的过程，提高学生应用数学建模解决实际问题的意识和能力.

本教材适用于高职高专理工科和本科少学时数学课程的教学.

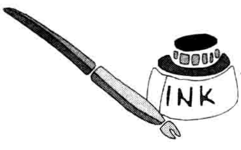
苏州高博软件技术职业学院的龚三琼、吴多康、滕海勇、王磊老师以及南京应天职业技术学院的李娟、王威老师参加了本书的编写工作.本书的结构布局、统稿、定稿工作由龚三琼承担.

由于水平有限，书中难免存在谬误之处，敬请广大读者不吝赐教!

编者

2014 年 7 月

目　录



第一章 函数、极限与连续

函数是现代数学的基本概念之一，也是微积分学中最基本的一个概念，是高等数学的主要研究对象，极限概念是微积分的理论基础，极限方法是微积分的基本分析方法，连续则是函数的一个重要性质. 本章将介绍函数、极限与连续的基本知识和有关的基本方法，为微积分的学习奠定基础.

§1.1 函　　数

一、函数概念

1. 区间与邻域

把介于某两个实数之间的全体实数称为**区间**，这两个实数称为区间的端点，两端点间的距离称为区间的长度，区间包括有限区间和无限区间.

有限区间：设 a,b 为两个实数，且 $a<b$，数集 $\{x|a<x<b\}$ 称为开区间，记为 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x|a<x<b\}.$$

类似地，有闭区间和半开半闭区间：

$[a,b]=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$[a,b)=\{x|a\leqslant x<b\}$，$(a,b]=\{x|a<x\leqslant b\}$.

无限区间：引入记号"$+\infty$"（读作"正无穷大"）及"$-\infty$"（读作"负无穷大"），并记 $[a,+\infty)=\{x|x\geqslant a\}$，$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$. 特别地，全体实数的集合 $\mathbf{R}$ 也可以表示为 $(-\infty,+\infty)$. 常用 I 来表示区间.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 为任一实数，以 a 为中心的任何一个开区间称为点 a 的一个**邻域**，记为 $U(a)$.

若开区间的端点到中心的距离为 δ，则称此邻域为点 a 的 δ 邻域，记为 $U(a,\delta)$，即 $U(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta\}$. 将 $U(a,\delta)$ 的中心 a 去掉的点集称为点 a 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{U}(a,\delta)$，即 $\mathring{U}(a,\delta)=\{x|a-\delta<x<a+\delta,且\ x\neq a\}$.

2. 常量与变量

生活中存在着各种形式的量，有些量在研究的过程中保持不变，可用固定的数值来表示，这种量称为**常量**，常用字母 a,b,c 等表示；还有一些量在研究的过程中是变化着的，可以取不同的数值，这种量称为**变量**，常用字母 x,y,z,t 等表示.

需要指出的是，常量和变量都是相对的概念，同一个量在某个问题中是常量，而在另外的问题中则可能是变量.

初等数学主要研究常量，而高等数学主要研究变量，着重研究变量与变量之间的依从关系.

3. 函数的定义

在某一自然现象或社会现象中，常常会遇到许多变量，这些变量并不是孤立变化的，而是相互联系并遵循一定的规律的，函数就是描述各种变量之间相互关系的一个法则.

定义 1.1 设 x 和 y 是两个变量，D 是一个给定的非空数集. 如果对于每个数 $x\in D$，变量 y 按照一定的法则 f，总有唯一确定的数值和它对应，则称 y 是 x 的**函数**，记作 $y=f(x),x\in D$.

其中，x 称为自变量，y 称为因变量，数集 D 称为这个函数的定义域，当 x 取遍 D 的各个数值时，对应函数值的全体组成的数集称为函数的值域，记为 $M=\{y\,|\,y=f(x),x\in D\}$.

函数的两个要素是对应法则和定义域. 在实际问题中，函数的定义域是根据问题的实际意义而确定的. 如果不考虑所讨论函数的实际意义，它的定义域就是使解析式有意义的一切实数构成的集合.

【例 1.1.1】 确定函数 $y=\dfrac{1}{x}+\sqrt{1-x^2}$ 的定义域.

解 该函数的定义域为满足不等式组 $\begin{cases} x\neq 0 \\ 1-x^2\geqslant 0 \end{cases}$ 的集合，解不等式组得

$$-1\leqslant x\leqslant 1 \text{ 且 } x\neq 0,$$

所以定义域为

$$D=[-1,0)\cup(0,1].$$

【练一练】 求下列函数的定义域：

(1) $y=\dfrac{1}{1-x^2}$； (2) $y=\sqrt{x-4}$.

4. 函数的表示法

(1) **表格法** 把一系列自变量的值与对应的函数值列成表格的方法，例如平方表、三角函数表等，这就是函数的表格法.

(2) **图像法** 在坐标系中用图形来表示函数关系的方法. 例如，图 1 - 1 是绝对值函数 $y=|x|$ 的图形.

(3) **公式法(解析法)** 自变量和因变量之间的关系用数学表达式来表示的方法.

需要指出的是，有时一个函数在其定义域的不同范围内具有不同的表达式，这样的函数称为**分段函数**.

例如，函数 $y=\begin{cases} 2\sqrt{x} & 0\leqslant x\leqslant 1 \\ 1+x & x>1 \end{cases}$ 是分段函数，其定义域为 $[0,+\infty)$，值域为 $[0,+\infty)$，如图 1 - 2 所示.

又如，符号函数 $y=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0 \end{cases}$ 也是分段函数，其定义域为 $(-\infty,+\infty)$，值域为 $\{-1,0,1\}$，

如图 1－3 所示.

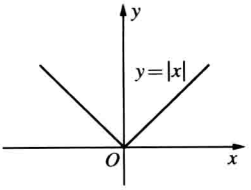


图 1－1

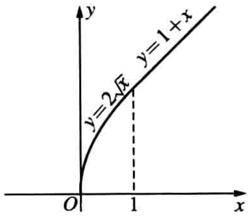


图 1－2

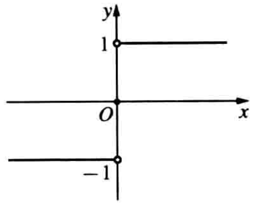


图 1－3

二、函数的基本性态

1. 函数的奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，若对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为**偶函数**；若对任意的 $x\in D$，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为**奇函数**.

偶函数的图形是关于 y 轴对称的，奇函数的图形是关于原点对称的. 例如，函数 $y=\sin x$，$y=x^3$ 是奇函数，函数 $y=\cos x$，$y=x^2$ 是偶函数.

2. 函数的单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，如果对于区间 I 上的任意两点 $x_1<x_2$，都有 $f(x_1)<f(x_2)$（或 $f(x_1)>f(x_2)$）则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上是**单调增加**（或**单调减少**）的，区间 I 称为**单调增区间**（或**单调减区间**）.

例如，函数 $y=x^2$ 在区间 $(-\infty,0)$ 内是单调减少的，在区间 $(0,+\infty)$ 内是单调增加的；函数 $y=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调增加的.

3. 函数的周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在非零常数 T，使得对一切 $x\in D$，有 $T+x\in D$，且 $f(x+T)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为周期函数，称 T 为 $f(x)$ 的周期. 周期函数的周期不唯一，通常所说的周期函数的周期是指其最小正周期.

例如，$y=\sin x$，$y=\cos x$ 都是以 2π 为周期的函数，$y=\tan x$，$y=\cot x$ 是以 π 为周期的函数.

4. 函数的有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若存在一个正数 $M>0$，使得对一切 $x\in D$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M,$$

则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上有界，或称 $f(x)$ 是 I 上的有界函数，否则称 $f(x)$ 在 I 上无界. 每一个具有上述性质的 M，都是该函数的界，也即函数的界不是唯一的.

例如，函数 $y=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有界，因为对任何的实数 x，恒有 $|\sin x|\leqslant 1$. 函数 $y=\tan x$ 在区间 $\left[0,\frac{\pi}{4}\right]$ 上有界，而在区间 $\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$ 内无界.

三、反函数

定义 1.2 设函数 $f(x)$的定义域为 D,值域为 M. 对于 M 中的任意的 y 值,D 中有唯一的 x 值与之对应,使得 $y=f(x)$成立,于是得到一个定义在 M 上的以 y 为自变量、x 为因变量的新函数

$$x=f^{-1}(y),$$

称为 $y=f(x)$的**反函数**.

习惯上总是用 x 表示自变量,用 y 表示函数,因此往往把 $x=f^{-1}(y)$改写成 $y=f^{-1}(x)$,所以今后的反函数也记为 $y=f(x)$,$x\in M$.

从反函数的定义可以看出,函数的定义域恰好是反函数的值域,值域恰好是其反函数的定义域. 在同一坐标系下,函数 $y=f(x)$和它的反函数 $y=f^{-1}(x)$的图像是关于直线 $y=x$ 对称的.

【例 1.1.2】 求函数 $y=\dfrac{x}{1+x}$的反函数.

解 由 $y=\dfrac{x}{1+x}$,解得 $x=\dfrac{y}{1-y}$,故反函数为:

$$y=\frac{x}{1-x},x\in(-\infty,1)\cup(1,+\infty).$$

【练一练】 求函数 $y=\lg x+1$ 的反函数.

四、初等函数

1. 基本初等函数

(1) 常数函数 $y=C$ (C 是常数).

(2) 幂函数 $y=x^{\mu}$(μ 是常数).

(3) 指数函数 $y=a^x$($a>0,a\neq1,a$ 是常数).

高等数学里常用到以无理数 e 为底的指数函数:$y=\mathrm{e}^x$($\mathrm{e}=2.718281\cdots$).

(4) 对数函数 $y=\log_a x$($a>0,a\neq1,a$ 是常数).

当 $a=10$ 时,$y=\log_{10} x$,简记为 $y=\lg x$,称为常用对数.

当 $a=\mathrm{e}$ 时,$y=\log_{\mathrm{e}} x$,简记为 $y=\ln x$,称为自然对数.

(5) 三角函数

三角函数有正弦函数 $y=\sin x$、余弦函数 $y=\cos x$、正切函数 $y=\tan x$、余切函数 $y=\cot x=\dfrac{1}{\tan x}$、正割函数 $y=\sec x=\dfrac{1}{\cos x}$和余割函数 $y=\csc x=\dfrac{1}{\sin x}$六种.

(6) 反三角函数

反三角函数是三角函数的反函数. 反正弦函数为 $y=\arcsin x$,反余弦函数为 $y=\arccos x$,反正切函数为 $y=\arctan x$,反余切函数为 $y=\mathrm{arccot}\, x$.

这些函数的性质、图形在中学里已经学过,这里不再重复,对基本初等函数不熟悉的读者,可查阅附录一.