



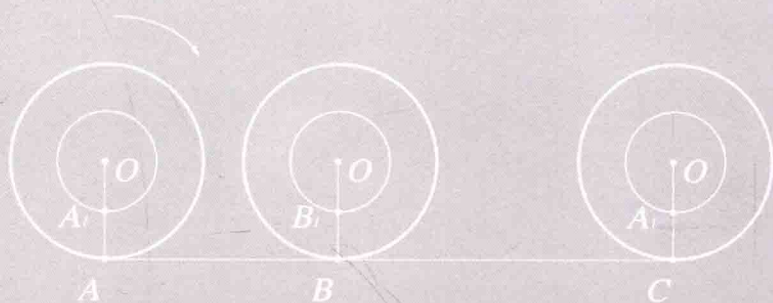
一课研究丛书·图形与几何系列

主编 朱乐平

圆的周长

教学研究

任敏龙◎著



教育科学出版社

ESPH Educational Science Publishing House



一课研究丛书·图形与几何系列

主编 朱乐平

圆的周长

教学研究 | 任敏龙◎著

教育科学出版社

· 北 京 ·

出版人 所广一
策划编辑 郑 莉
项目统筹 郑 莉
责任编辑 池春燕
版式设计 宗沅雅轩 贾艳凤
责任校对 贾静芳
责任印制 曲凤玲

图书在版编目 (CIP) 数据

圆的周长教学研究 / 任敏龙著. —北京: 教育科学出版社, 2014. 1
(一课研究丛书 / 朱乐平主编, 图形与几何系列)
ISBN 978-7-5041-8160-2

I. ①圆… II. ①任… III. ①圆—周长—教学研究—小学 IV. ①G623.502

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2013) 第 304070 号

一课研究丛书·图形与几何系列

圆的周长教学研究

YUAN DE ZHOUCANG JIAOXUE YANJIU

出版发行 教育科学出版社

社 址 北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号

邮 编 100101

传 真 010-64891796

市场部电话 010-64989009

编辑部电话 010-64989441

网 址 <http://www.esph.com.cn>

经 销 各地新华书店

制 作 北京金奥都图文制作中心

印 刷 保定市市中画美凯印刷有限公司

开 本 169 毫米×239 毫米 16 开

印 张 18

字 数 272 千

版 次 2014 年 1 月第 1 版

印 次 2014 年 1 月第 1 次印刷

印 数 1—3 000 册

定 价 39.00 元

如有印装质量问题, 请到所购图书销售部门联系调换。

这是一套什么样的书？

你见过对一节课的研究形成一本十几万字的学术专著吗？

你见过查阅百年来课标（大纲）后综述对一节课的教学要求吗？

你见过对一节课的内容进行国内外多个版本教材比较吗？

你见过对主要杂志上关于一节课的研究成果进行综述吗？

你见过根据一节课的内容给出许多个不同的教学设计吗？

你见过对一节课的研究形成系列校本教研的活动方案吗？

你见过以作者与读者互动对话的形式写成的学术专著吗？

本丛书将让你见到上面所有的“样子”。

《一课研究丛书·图形与几何系列》（以下简称“丛书”）是对课的研究。其中的每一本都是围绕小学数学“图形与几何”领域的一节课（或两节相关的课）进行多视角系统研究而形成。

研究的内容主要根据教师的课堂教学实践与理论水平提高的需要来确定。主要维度如下：

1. **数学知识维度。**数学老师要上好一节课，就应该比学生有更多关于这节课的数学知识，即“上位数学知识”。它是指超越了小学数学一节课的内容，在初中、高中（或中等师范学校）以及大学数学中出现的相关数学知识。很显然，没有上位数学知识是无法上好一节课的，但只有上位的数学知识也远远不够，还必须能够从中获得教学的启示。也就是说，要把围绕一节课的上位数学知识与小学数学紧密结合，指导小学数学教学。这一维度的研究主要解决老师在知识上的“一桶水”问题。

2. 课程标准（教学大纲）维度。从理论上说，一个教师有了数学知识以后，首先要关注的就是课程标准（教学大纲）。这是因为数学课程标准（教学大纲）是一个规定了数学学科的课程性质、目标、内容和实施建议的教学指导性文件。对一节课展开研究应该从最高的纲领性文件入手，明确这节课的目标定位。丛书中所涉及的每一节课，其作者都查阅了自20世纪初到现在的一百多年来国内所有和国外部分数学课程标准（教学大纲），从标准的视角，展现出一节课教学要求的历史沿革过程并从中获得启示。

3. 教材比较维度。数学教材为学生学习一节课的内容提供了基本线索和知识结构，它是重要的数学课程资源。丛书对一节课的教材从多个角度进行比较研究。从时间的角度看，进行了纵向与横向比较研究。纵向比较研究是对不同时期出版的教材进行比较，特别是对同一个出版社或同一个主编不同时期编写的教材进行多角度比较，从历史的沿革中感悟一节课不同时期的编写特点；横向比较研究是对同一时期出版的多种不同版本教材进行比较。从地域的角度看，进行了中国大陆与港、澳、台教材的比较，以及国内外教材的比较。教材比较研究可以为研究这节课或去给小学生上这节课的老师开阔视野，帮助找到更多有价值的课程资源。丛书的每一本不但在正文中对教材进行了比较，而且还在附录中完整呈现了多个版本的相关教材，供读者进一步研究参考。

4. 理论指导维度。我们知道，没有实践的理论是空虚的，没有理论的实践是盲目的。要上好一节课，自然需要理论的指导。奇怪的是，虽然有许多教育理论，但要真正系统地指导一节课的时候，特别是要指导一节课进入实践操作时，却又常常是困难的。丛书在数学教育理论指导课堂教学方面做了探索，努力做到让理论进入课堂教学实践，使得实践者能够真正感受到理论的力量。

5. 学生起点维度。学生是学习的主体，要进行一节课的教学，自然要研究学生的起点。丛书不仅阐述了如何了解学生起点的方法，而且还围绕一节课的学习，对学生起点情况进行分析与研究，以便更好地进行教学设计。

6. 教学设计维度。有了上述五个维度的研究后，我们就可以进入教学设计的研究维度。丛书首先对一节课的教学设计进行综述，就是把散见在多种重要杂志和专著上的教学设计成果进行整理（比如，查阅《小学数学教师》《小学教学》等刊物自创刊以来的全部内容），试图明确这节课迄今为止的所有研究成果。然后再根据学生的情况和多个不同的角度设计出新的不同的教学过程。这些新的教学设计都可以直接进入课堂教学实践。

7. 课堂教学维度。有了教学设计就可以进入课堂教学研究。这一维度主要是对一节课进行课堂教学的观察与评价，具体阐述了如何从多个角度了解教师与学生的情况，如何对教师的教与学生的学进行观察与评价。

8. 课后评价维度。课后评价维度是指在学生学习了一节课以后，对学生的学习情况进行了解与评价。丛书主要从情感态度与“四基”（基础知识、基本技能、基本思想、基本活动经验）内容两大方面，对学生进行测查评价，包括如何进行课后测查与访谈，学生容易掌握的内容和容易出错的地方的调查与研究，等等。

9. 校本教研维度。校本教研的重要性不言而喻。丛书主要围绕一节课提供校本教研的活动方案。即提供了老师们对一节课开展系列研究的活动方案，以便在更广的范围内对一节课进行全面深入系统的研究。

上述九个维度是丛书研究的基本视角，丛书中每一本书的作者还会根据课的具体内容与特点有所侧重地展开研究。所以，每本书既有自己的个性，又有丛书的共性。

从写作形式来说，丛书中每一本书的目录基本都采用了问题形式，以便读者能够快速查到自己感兴趣的内容。正文中的阐述方式采用了平等对话的形式，并提出了一些问题让读者思考。这样的写作形式，试图拉近作者与读者的距离，增加读者的参与度，让读者更感亲切。

这套书是如何形成的？

时间与人员：丛书撰写历时五年。丛书作者 25 人，有省特级教师、省优秀教师、省市教坛新秀和骨干教师。他们都是“朱乐平小学数学名师工作室”的成员，是经过自愿报名、笔试、面试后，在众多的报名者中脱颖而出者。

目标与问题：丛书撰写的目标是为了与大家分享成果，试图在分享中促进数学老师的专业发展，让更多的老师能够减轻工作负担，提高数学教学水平。如何真正促进数学教师的专业发展？有人说，要“实践—认识—再实践—再认识”。这很正确，但任何一个专业要发展都应该如此。也有人说，要“多读书，多交流”。这很对，但对所有专业的发展都适用。还有人说，要“多实践，多反思”。这也很有道理，但缺少了教师专业发展的特点。

观念与操作：通过课例研究，促进专业发展——这是具有教师职业特点的专业发展之路。数学教师主要通过一节课一节课的教学体现出自己的专业水平，学生主要通过一节一节数学课的学习而成长。可见，对一节课进行研究的重要性怎么强调都不会过分。数学教师通过一节一节课的研究定能提高自己的专业水准，而研究出的成果又可以与同行分享，并有可能减轻同行的工作负担。正是基于上面的这些想法，我们才花五年时间写出了这套丛书，希望同行们能够从中得到一些启迪。

由于水平所限，书中一定存在不足甚至错误，敬请读者批评指正。

目 录

1 上位数学知识研究

1.1 上位数学知识解读 / 3

1.1.1 圆周长概念的解读 / 3

如何给圆周长下定义? / 3

为什么“滚动法”可以测量圆周长? / 4

1.1.2 圆周率概念的解读 / 6

如何给圆周率下定义? / 6

为什么圆周率是一个常数? / 7

圆周率 π 是一个怎样的常数? / 8

如何认识 π 精确度的价值? / 10

圆周率与弧度制之间有什么关系? / 12

1.1.3 研究圆周率的主要方法 / 13

1.1.4 如何用实验法探索圆周率 / 18

测量直径长度的常用方法有哪些? / 18

测量圆周长的常用方法有哪些? / 20

如何认识和减少测量误差? / 20

如何利用回归分析求圆周率? / 23

1.1.5 圆周长计算公式的主要应用 / 27

怎样计算圆的周长? / 27

怎样计算半圆面的周长? / 28

圆周长的应用问题情境模型有哪些? / 28

如何理解转圈悖论? / 30

1.2 上位数学知识对教学的启示 / 33

1.2.1 圆周率的研究历史对教学的启示 / 33

1.2.2 圆周长的认识与计算的教学困难 / 34

1.2.3 如何探索圆周率? / 34

如何让学生感知周长与直径的增函数关系? / 34

如何让学生认识周长与直径的正比例关系? / 35

如何让学生理解“滚动法”可测圆周长? / 36

如何减少测量中的误差? / 37

如何让学生体会逼近思想? / 37

1.2.4 如何处理近似计算与用“=”表示的矛盾? / 38

1.3 教师容易表达错误或不确切的语言 / 39

2 课程标准(教学大纲)要求比较研究

2.1 课程标准(教学大纲)中相关教学内容要求的演变 / 50

2.1.1 教学内容进入小学数学教育几经沉浮 / 50

未进入: 1902—1922 年颁布的四个相关文件 / 50

似进入: 1923 年颁布的课程标准 / 51

未进入: 1929 年颁布的课程标准 / 52

进入: 1932—1941 年颁布的三个课程标准 / 53

退出: 1948—1956 年颁布的四个课程标准(教学大纲) / 53

再进入: 1963 年至今的九个课程标准(教学大纲) / 55

2.1.2 教学内容要求的演变 / 58

教学要求的提法有什么变化? / 58

描述教学要求的行为动词有什么变化? / 58

教学内容的具体要求有什么变化? / 60

2.2 教学内容要求的演变带来的启示 / 62

2.2.1 如何不断探索“大众数学”之路? / 62

2.2.2 如何不断细化、完善育人目标? / 63

2.3 2011 年课程标准基本精神的研究落实 / 63

2.3.1 如何根据课程目标探索教材教学? / 64

2.3.2 如何根据课程理念探索教材教学? / 65

2.3.3 如何根据能力培养要求探索教材教学? / 67

3 教材比较研究

3.1 纵向比较：同种教材编写特点比较 / 76

3.1.1 人教版教材编写的沿革特点 / 76

 年级安排、呈现方式与教材结构 / 77

 课题引入与新知探究 / 79

 公式的给出与应用 / 83

3.1.2 刘静和、张天孝主编教材的编写沿革特点 / 87

 年级安排、呈现方式与教材结构 / 87

 课题引入与新知探究 / 89

 公式的给出与应用 / 93

3.2 横向比较：同期教材编写特点比较 / 96

3.2.1 1980 年代教材编写特点比较 / 96

3.2.2 1990 年代教材编写特点比较 / 98

 年级安排、呈现方式与教材结构 / 99

 课题引入与新知探究 / 100

 公式的给出与应用 / 102

3.2.3 2000 年后教材编写特点比较 / 105

 年级安排、呈现方式与教材结构 / 105

 课题引入与新知探究 / 108

 例题和练习的安排 / 113

3.2.4 2000 年后中国台湾、澳门地区和日本教材编写
 特点比较 / 117

 课程基本精神比较 / 118

- 年级安排、呈现方式与教材结构 / 119
- 课题引入与新知探究 / 120
- 公式的给出与应用 / 123
- 3.3 综合比较:教材编写的规律与启示 / 125
 - 3.3.1 圆周率教学安排的规律与启示 / 126
 - 教学内容整体处理的规律与启示 / 131
 - “引入新课、提出问题”的规律与启示 / 131
 - “分析问题、确定变量”的规律与启示 / 133
 - “方法研讨、探索规律”的规律与启示 / 134
 - “定义概念、导出公式”的规律与启示 / 135
 - 3.3.2 例题安排的规律与启示 / 135
 - 3.3.3 练习安排的规律与启示 / 137

4 学生学习圆周长的可能性研究

- 4.1 学生学习圆周长的潜在可能性 / 141
 - 4.1.1 学生学习的逻辑起点分析 / 141
 - 4.1.2 学生学习的现实起点调查分析 / 143
- 4.2 学生学习圆周长的实际可能性 / 151
- 4.3 学习的可能性研究对教学的启示 / 161
 - 4.3.1 如何加强概念教学? / 161
 - 如何进行圆周长概念的教学? / 161
 - 如何进行圆周率概念的教学? / 162
 - 4.3.2 如何展开圆周率的探究? / 162
 - 4.3.3 如何进行圆周率研究史的教学? / 163
 - 4.3.4 如何加强能力的培养? / 163
 - 如何培养学生的空间观念? / 163
 - 如何发展学生的推理能力? / 164
 - 如何培养学生的符号感? / 164
 - 如何培养学生的应用意识? / 165

5 教学设计比较研究

5.1 教学理念与价值取向 / 169

5.1.1 哪些教学理念与价值取向长期保持不变? / 169

5.1.2 哪些教学理念与价值取向发生了变化? / 169

5.2 新课引入 / 171

5.2.1 复习引入 / 171

5.2.2 情境引入 / 172

5.2.3 直接引入 / 173

5.2.4 历史典故引入 / 174

5.2.5 自学引入 / 174

5.2.6 动手操作引入 / 175

5.3 提出研究问题 / 176

5.3.1 教师直接提出 / 176

5.3.2 游戏激趣中提出 / 176

5.3.3 在体会必要性中提出 / 176

5.3.4 在学情了解中提出 / 177

5.4 体会直径与周长之间的共变关系 / 178

5.4.1 借助直觉, 定性描述 / 178

5.4.2 设置参照, 感受定量 / 179

5.5 展开实验探究 / 182

5.5.1 有哪些测量的方法? / 182

5.5.2 如何处理实际测量与演示的关系? / 183

5.5.3 如何对数据进行合理的处理和使用? / 185

5.5.4 如何介绍圆周率? / 186

5.6 导出计算公式 / 187

5.7 例题、习题安排 / 188

5.8 圆周率研究史料的利用 / 191

6 理论指导下的教学实践与探索

6.1 范希尔几何思维水平理论的教学启示 / 197

6.1.1 几何思维水平有哪些层次? / 197

6.1.2 如何划分圆周长、圆周率的几何思维水平层次? / 199

6.1.3 对教学有什么启示? / 202

如何进行教材结构分析与处理? / 203

如何进行学生几何思维水平评估? / 214

如何进行课堂教学设计与实施? / 223

6.2 程序性知识学习理论的教学启示 / 228

6.2.1 学生对程序性知识的理解特点 / 228

6.2.2 如何进行程序性知识的教学? / 229

理论基础 / 229

教学策略 / 229

教学过程 / 231

6.2.3 对教学有什么启示? / 232

如何检测学生的程序性知识的理解水平? / 232

如何评估学生头脑中产生式系统的完备性? / 233

如何指导课堂教学的设计与实施? / 238

6.3 文化复演论的教学启示 / 242

6.3.1 文化复演论的基本观点有哪些? / 242

6.3.2 对教学有什么启示? / 245

参考文献 / 249

附录 / 253

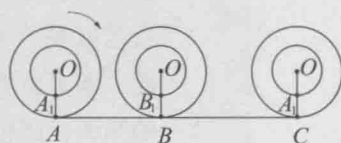
1 根据 2001 年课标编写的“圆的周长”教材图片 / 255

2 两个典型教学设计 / 264

后记 / 274

1

上位数学知识研究



看到这一章的标题，你可能就在想：什么叫作上位数学知识？它对我们的数学教育实践又有什么积极意义？

所谓的上位数学知识，是指教师所具有的特定学科的知识，与当下教学的数学知识之间是上下位的关系，既包括当下知识的源头，也包括当下知识的后续发展。显然，具有丰厚的上位数学知识有利于教师在教学中更好地把握教学内容的数学本质，设计符合数学本身发生、发展规律而又切合学生学习特点的教学过程，使教师教得轻松、学生学得轻松。要更好地把握所教知识的数学本质，不仅要理解该知识在学科逻辑体系中的地位和作用，把握其与前后知识之间的联系，还要了解该知识发生、发展的历史过程，更好地理解我们所教的知识是如何以及为何会成为如今的面貌，从而为设计与实施自然流畅、清新易懂的教学过程奠定扎实的基础。因此，本书所界定的上位知识不仅包括作为学科科学体系的知识，还包括关于它发生、发展的历史的知识。

本章我们将与你一起思考并讨论、交流上述问题。

1.1 上位数学知识解读

1.1.1 圆周长概念的解读

● 如何给圆周长下定义？

思考

在你的求学生涯中，学到过哪些圆的周长的不同形式的定义？分别与哪些数学分支相关？

在平面几何中，周长是指封闭曲线一周的长度。由于圆是“到定点的距离等于定长的点的轨迹”，因此，这一轨迹（封闭曲线）的长度就是圆的周长。

圆也被定义为是欧氏平面内到定点的距离等于定长的点的集合，即点集 $R = \{P \mid OP = r, r > 0\}$ ，圆的周长可以被认为这是点集的测度。

在解析几何中，圆被定义为满足方程 $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 的点的集合，如图 1.1 所示。其图像为笛卡尔坐标系中以 $O(a, b)$ 为圆心， r 为半径的圆，围成圆的曲线长即是圆周长。

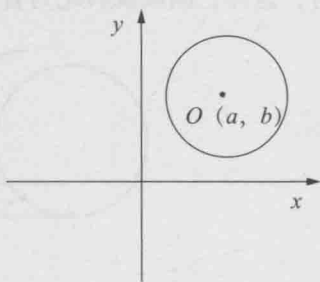


图 1.1

圆周长是曲线长，曲线长不同于直线长。如何利用直线长来刻画曲线长呢？我们知道，当圆内接（或外切）正多边形的边数无限增加时，正多边形就无限趋近于圆，这就有了极限意义上的圆周长：当圆内接（或外切）正多边形的边数无限增加时，内接（或外切）正 n 边形的周长 P_n 就无限接近于一个确定的值，这个值叫作圆周长 C ，即 P_n 的极限是 C 。

思考

你所教的教材是否明确定义了圆周长？如果是，是上述中的哪一种？定义中的关键词有哪些？你如何引导学生理解？如果不是，你认为需要明确定义吗？为什么？在没有明确定义的情况下，你将如何让学生把握概念本质？

④ 为什么“滚动法”可以测量圆周长？

思考

你打算如何向学生解释为什么“滚动法”可以测量圆周长，即为什么“圆沿直线滚动一周所经过的距离就是这个圆的周长”？

为什么“圆沿直线滚动（以下所说的‘滚动’均为‘无滑动的滚动’）一周所经过的距离就是这个圆的周长”呢？这样的解释你听说过吗？如图 1.2 所示，在滚动的过程中，圆周上的每一个点都正好与直线上的一点重合，这样，曲线就转化为直线，圆周长就转化为直线上线段的长度。

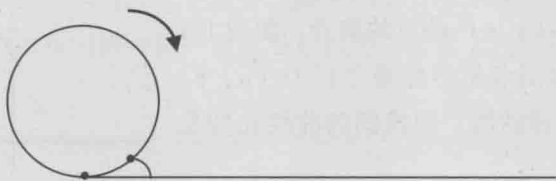


图 1.2

这样的解释会导致“同心圆周长相等”的“悖论”：

如图 1.3 所示， O 为两个同心圆的圆心，在滚动的初始位置，大圆与直线相切于 A 点，连接 OA ，交小圆于 A_1 ，此时， O 、 A 、 A_1 三点成一直线。同理，在滚动的过程中，必始终存在圆心、切点、小圆上一点三点成一直线，也就是说，大圆与直线的任一切点总有小圆上唯一的一个点与之对应；反之，小圆上任意一点必有大圆与直线的唯一的一个切点与之对应，因此大圆滚动一周，小圆也必然正好滚动一周，大圆滚动一周所经过的距离就是大圆的周长，小圆滚动一周所经过的距离就是小圆的周长，显然，大圆和

小圆滚动一周所经过的距离都是直线上线段 AC 的长度，因此，大圆周长等于小圆周长，即“同心圆周长相等”。

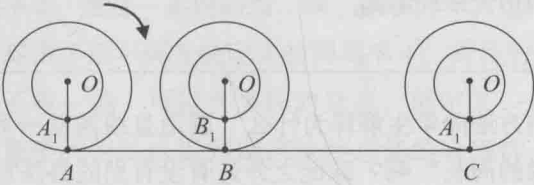


图 1.3

“同心圆周长相等”显然是一个荒谬的结论，导致这一悖论的原因何在呢？我们把圆看成“点的集合”，通过圆心、切点、小圆上一点三点成一直线，建立大圆、小圆、线段 AC 上点之间的一一对应关系，这只能说明这三个“点的集合”是等势的，而不能说明大圆周长、小圆周长、线段 AC 的长度之间有任何关系。原因很简单，因为“点没有大小”，是不能用几何量来刻画的，它只表示线上的一个位置。同样，我们也不能用“点重合”来解释“圆沿直线滚动一周所经过的距离就是这个圆的周长”。

如何来理解这一命题呢？让我们借助“点动成线”来思考：

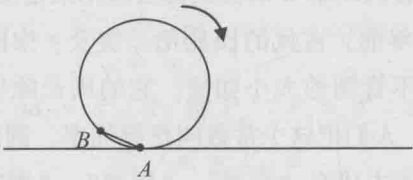


图 1.4

如图 1.4 所示，设一点 M 做圆周运动，从时刻 t_1 到时刻 t_2 由图中 A 处运动到 B 处，用 Δt 表示从时刻 t_1 到时刻 t_2 的时间增量， Δs 为弧 AB 的长度。当 Δt 无限趋向于 0 时， Δs 也趋于 0，弦 AB 的长度无限逼近弧 AB 的长度。弧 AB 不能与直线上的线段重合，但弦 AB 却可以。如果把弧看作弦的极限，把弦的极限看作弧的等价替代物，这样，我们就可以把圆周长 C 看作正 n 边形周长 P_n 的极限——正 n 边形沿直线滚动，其每一边自然可以与直线上的线段重合，其周长相应地就转化为直线上的线段长，相应地，点的圆周运动转化为圆的滚动，圆周长就转化为直线上线段的长度。