高分经验分享！

小鑫考研嘚吧嘚

电子社考研权威辅导丛书

考研

考研数学历年真题解析

（数学三）

潘　鑫◎编著

语言生动活泼　通俗易懂

知识回顾详实　查漏补缺

解题思路连贯　实战精髓

全书视频讲解　效率提升

中国工信出版集团

電子工業出版社
PUBLISHING HOUSE OF ELECTRONICS INDUSTRY
http://www.phei.com.cn

电子社考研权威辅导丛书

小鑫考研嘚吧嘚

考研数学历年真题解析（数学三）

潘鑫　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 • BEIJING

内 容 简 介

本书作者深入分析考研数学试题的特点和难点，对2009—2015年考研数学三的真题进行了详细的解读，力求将清晰完整的解题思路呈献给广大考生。通过自学本书，考生可以对考题难度及考点分布有一定程度的了解，并对往年真题的解题技巧和策略有全面的掌握。除此之外，书中含有大量知识点回顾和生动的讲解、举例，对培养考生独立解题思路具有重要意义。

本书配有真题讲解视频，有助于考生提高复习效率，全面掌握解题方法，最终取得优异成绩。

图书在版编目(CIP)数据

小鑫考研嘚吧嘚．考研数学历年真题解析．数学三／潘鑫编著．—北京：电子工业出版社，2015.7
（电子社考研权威辅导丛书）
ISBN 978-7-121-26495-5

Ⅰ．①小⋯ Ⅱ．①潘⋯ Ⅲ．①高等数学－研究生－入学考试－题解 Ⅳ．①O13

中国版本图书馆CIP数据核字（2015）第147053号

策划编辑：齐 岳
责任编辑：徐 静 齐 岳 特约编辑：刘 凡
印 刷：三河市华成印务有限公司
装 订：三河市华成印务有限公司
出版发行：电子工业出版社
北京市海淀区万寿路173信箱 邮编100036
开 本：787×980 1/16 印张：18.75 字数：420千字
版 次：2015年7月第1版
印 次：2015年7月第1次印刷
定 价：52.00元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换。若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：（010）88254888。

质量投诉请发邮件至zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至dbqq@phei.com.cn。

服务热线：（010）88258888。

前　言

在大学四年生活接近尾声的时候，何去何从成了最引人注意的话题。在社会竞争日益激烈的今天，继续深造无疑是有志青年不约而同的选择，而其中大多数同学选择考研，所以如何在这场“战役”中夯实基础，走好每一步变得十分关键。本书是一本非常朴实的书，它毫无保留地告诉你每一道题应该怎么做，帮助你把相关知识点吃透，像一位不辞劳苦的老师一遍遍唠叨着类似问题该如何处理。细读本书，你会发现它在众多考研数学辅导书籍中独树一帜，在看似唠叨的讲解中，你会轻轻松松掌握考研数学的实战精髓。

本书定位

本书是一本适合自学的真题解析书，它内容详尽、语言通俗，解题步骤一步不落，在重点难点处还配有知识点回顾及视频讲解。本书的真题解析通俗易懂，不存在让考生费解的跳跃性强的解题步骤，基础薄弱的考生也能迅速看懂解析，轻松掌握知识点，实现会做题、做对题的最终效果。

真题解析书籍的优劣体现在它是“授之以渔”还是“授之以鱼”，书中每一道题的讲解都有举一反三的效果，每一个容易被忽视的细节、容易被钻空子的思维定势、容易被混淆的知识点都被详尽地阐述出来。也许有的同学不理解为什么一道选择题、填空题竟然有4页解析，其实这正体现了本书的最大特色：注重解题思路。只有全面掌握解题思路，在考场上才会游刃有余。如果踏踏实实看完本书，相信通过本书“手把手”的辅导，你会从中悟出一些解题的技巧和道理，在汲取本书的精粹之后，你便可以甩开拐杖，独立行走。

本书特色

1. 语言通俗

市面上的很多考研数学真题解析类书籍的叙述方式都比较晦涩拗口，虽然解题步骤看似简洁明了，但是对于紧锣密鼓准备考研的同学来说，却显得不那么体贴。考生往往需要用很长的时间去理解文字表达的意思和公式推导的步骤，这样不仅降低了复习效率，也使考生的复习情绪更加焦躁。考研辅导书最重要的特点就应该是通俗易懂，毕竟我们需要动脑筋的地方不是揣测作者的意思，而是真正把题做透、做明白。我力图把本书编写得更加

活泼生动，在解题步骤的叙述上避免一切不利于理解的障碍和歧义，希望读者在看书做题的时候能体会到和作者的互动交流，抛弃沉重的负担，轻松掌握知识。

2. 逻辑清晰

本书的编排合理，逻辑关系十分清楚。具体来讲，书中没有一处讲解是可有可无的，每一步推导、每一个细小的知识点对于解题来说都是至关重要的。当考生遇到不会做的题时，这样全面详尽的讲解会让你一下捕捉到自己知识储备的盲点，不论这个盲点有多么微小，都是阻碍你考出理想成绩的绊脚石。本书的讲解就像是多米诺骨牌：一道题被轻轻一推，一类题就都拜倒在我们脚下了。

我是一个标准的90后，痴迷于大学阶段的各种数学类课程。在本科学习阶段就利用课余时间给同学们办讲座，帮助大家顺利通过期末考试。在考研数学的实战中，我取得了近乎满分的成绩，这得益于我在平时学习和备考过程中总结的一套特有的学习方法。在读研阶段，我一边学习一边在各大考研机构授课并录制教学视频，为的是把自己的学习方法教给更多需要帮助的同学，在考研路上助他们一臂之力。

本书的编写经过了多次修改，对题目的分析也尽力达到透彻完整。谨以此书献给所有在考研路上拼搏的同学们，我相信踏实的努力和认真的态度会帮助你们取得满意的成绩。

莫道功名需百战，愿效滴水洞石穿。为有胸怀摘星志，手足协力共登攀。莫道征途路漫漫，愿效江水去不还。大势所向天地宽，终究奔涌归浩瀚。祝同学们考研成功！

潘鑫

2015年6月于北京

目录 CONTENTS

2015 年全国硕士研究生入学统一考试试题及精解

一、选择题：1 ~8 小题，每小题 4 分，共 32 分。下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的。请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上。

(1) 设 $\{x_n\}$ 是数列，下列命题中不正确的是(　　)。

(A) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1} = a$

(B) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$

(C) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1} = a$

(D) 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$

解： 解答本题之前，我先提醒大家一下，本题让选择的是“不正确的”，大家一定要注意审题。

先来看（A）选项。

(A) 选项是“若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1} = a$”。这句话显然是正确的，因为若某数列的极限为 a，则该数列的任意一个子数列的极限肯定也是 a。而数列 $\{x_{2n}\}$ 和数列 $\{x_{2n+1}\}$ 显然是数列 $\{x_n\}$ 的两个子数列(数列 $\{x_n\}$ 是 x_1、x_2、$x_3\cdots$；数列 $\{x_{2n}\}$ 是 x_2、x_4、$x_6\cdots$；数列 $\{x_{2n+1}\}$ 是 x_3、x_5、$x_7\cdots$)，所以数列 $\{x_{2n}\}$ 和数列 $\{x_{2n+1}\}$ 的极限肯定也是 a，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1} = a$。所以（A）选项正确。

再来看（B）选项。

(B) 选项是“若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1} = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$”。按理来说，子数列的极限是推不出原数列的极限的(只能从原数列的极限推子数列的极限)，但是（B）选项所说的这个结论却是正确的。大家不必去问为什么，直接背下来就好，这个结论非常有用，很多题中都会用到。由于（B）选项正确，所以本题不能选择（B）选项。

再来看（C）选项。

(C) 选项是“若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n = a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n} = \lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1} = a$”。这句话显然是正确的，因为若某

数列的极限为 a，则该数列的任意一个子数列的极限肯定也是 a。而数列 $\{x_{3n}\}$ 和数列 $\{x_{2n+1}\}$ 显然是数列 $\{x_n\}$ 的两个子数列(数列 $\{x_n\}$ 是 x_1、x_2、$x_3\cdots$；数列 $\{x_{3n}\}$ 是 x_3、x_6、$x_9\cdots$；数列 $\{x_{2n+1}\}$ 是 x_3、x_5、$x_7\cdots$)，所以数列 $\{x_{3n}\}$ 和数列 $\{x_{2n+1}\}$ 的极限肯定也是 a，即 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{2n+1}=a$。所以 (C) 选项正确 。

其实现在我们已经可以确定本题应该选择 (D) 选项了，不过还是来判断一下吧。

来看 (D) 选项。

(D) 选项是"若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$"。我们来举个反例，例如：

$$x_{3n}=1+\frac{1}{3n}$$

$$x_{3n+1}=1+\frac{1}{3n+1}$$

$$x_{3n+2}=2+\frac{1}{3n+2}$$

一定要注意：有的同学认为既然 $x_{3n}=1+\frac{1}{3n}$，那么 x_{3n+1} 必然就是 $1+\frac{1}{3n+1}$，x_{3n+2} 必然就是 $1+\frac{1}{3n+2}$，所以这些同学会认为上面写的 $x_{3n+2}=2+\frac{1}{3n+2}$ 写错了。而实际上，x_{3n}、x_{3n+1}、x_{3n+2} 这三者互相之间是没有任何关系的，想怎么设就怎么设(比如完全可以设 $x_{3n}=n$，$x_{3n+1}=2n$、$x_{3n+2}=n^2$)。现在大家明白了吧。

那么大家来看，很显然有

$$\lim_{n\to\infty}x_{3n}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n}\right)=1$$

$$\lim_{n\to\infty}x_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{3n+1}\right)=1$$

也就是说，我们设的 x_{3n} 和 x_{3n+1} 满足 (D) 选项中所说的"若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$"，现在来看看这是否能推出"$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$"。

假设能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$(对于本题来说就是"假设能推出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}(1+\frac{1}{3n})=1$")，根据定理"若某数列的极限为 a，则该数列的任意一个子数列的极限肯定也是 a"可知 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+2}=1$。可是实际上，由于 $x_{3n+2}=2+\frac{1}{3n+2}$，所以很明显 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+2}=2\neq1$。可知"$\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{3n+1}=a$"根本就推不出"$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$"，所以 (D) 选项是不正确的，本题应该选择 (D) 选项。

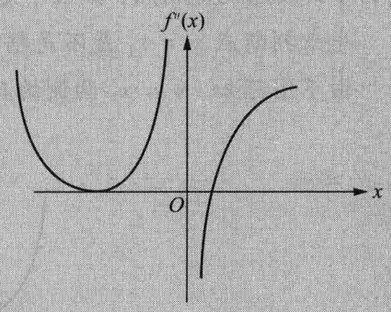
(2) 设函数$f(x)$在$(-\infty, +\infty)$上连续，其2阶导函数$f''(x)$的图形如右图所示，则曲线$y = f(x)$的拐点个数为(　　)。

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 3

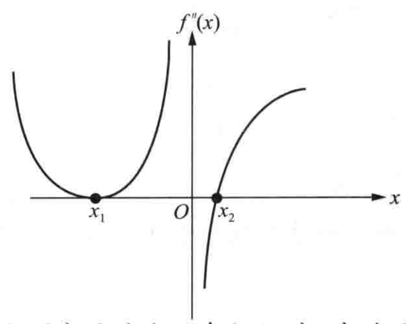


解：我们先来关注一下本题所给的图。

也许大多数同学的心中都有一个可怕的思维定势，那就是：平面直角坐标系的两个轴肯定是 x 轴和 y 轴。正是由于很多同学都有着这个可怕的思维定势，所以我才说先来关注一下本题所给的图。

大家仔细看一下，本题所给的平面直角坐标系的两个轴是 x 轴和 y 轴吗？不是！是 x 轴和 $f''(x)$ 轴。也就是说，本题所给出的图像是二阶导函数 $f''(x)$ 的图像，而不是函数 $f(x)$ 的图像。如果没有注意到这一点，那么这道题必错无疑，因此审题至关重要。

为了方便后续的讲解，先在题中所给的平面直角坐标系中标出两个点 x_1 和 x_2，如下图所示。



本题问的是曲线 $y = f(x)$ 的拐点个数，我们知道，拐点取自二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点。

那么从上图中，很容易看出：点 $x = x_1$ 和点 $x = x_2$ 是二阶导函数为 0 的点，点 $x = 0$ 是二阶导函数不存在的点。

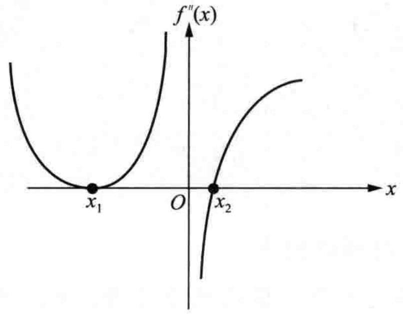
这时有的同学就说了："那就是一共三个点嘛，所以本题选 (D)。"这种说法是完全错误的，因为我刚才用的词是"取自"。也就是说，并非所有二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点都一定是拐点（当然，也有可能所有二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点都是拐点），而是拐点从二阶导函数为 0 的点和二阶导函数不存在的点中取罢了。

那么，在 $x = x_1$、$x = x_2$、$x = 0$ 这三个点中，究竟哪个是拐点呢？我们怎么判断？判断的方法是：分别看这三个点，看每个点两侧的二阶导函数是否一个大于0 一个小于0。如果

是，那么该点就是拐点；如果不是，该点就不是拐点。

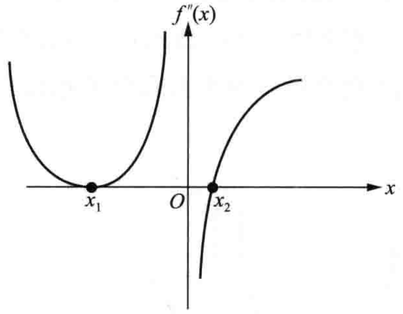
先来判断点 $x = x_1$ 是不是拐点。

由下图可知，$x = x_1$ 两侧的二阶导函数都是大于0的，所以 $x = x_1$ 不是拐点。



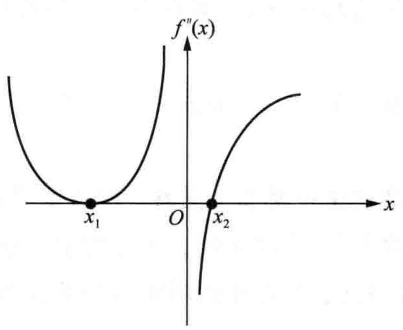
再来判断点 $x = 0$ 是不是拐点。

由下图可知，$x = 0$ 左侧的二阶导函数大于0，$x = 0$ 右侧的二阶导函数小于0，所以 $x = 0$ 是拐点。



最后判断点 $x = x_2$ 是不是拐点。

由下图可知，$x = x_2$ 左侧的二阶导函数小于0，$x = x_2$ 右侧的二阶导函数大于0，所以 $x = x_2$ 是拐点。



综上所述，曲线 $y = f(x)$ 一共有两个拐点，所以本题应该选择（C）选项。

(3) 设 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x, x^2+y^2\leqslant 2y\}$，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\quad)$。

(A) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(B) $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$

(C) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{x}f(x,y)\mathrm{d}y$

(D) $2\int_0^1\mathrm{d}x\int_x^{\sqrt{2x-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y$

解：本题是计算二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。大家都知道，二重积分可以用“直角坐标系法”来计算，或者用“极坐标系法”来计算。

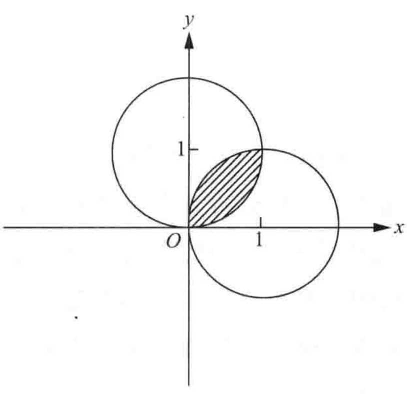
本题所给的四个选项中，(A) 选项和 (B) 选项是用“极坐标系法”来计算的，(C) 选项和 (D) 选项是用“直角坐标系法”来计算的。

本题我所采用的讲解方法是“先告诉大家答案，然后再给大家解释为何选这个答案”。

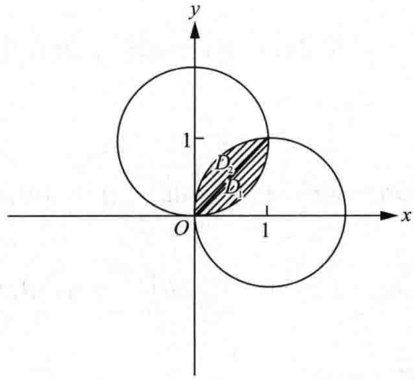
本题应该选择 (B) 选项，下面我来解释一下原因。

首先，在平面直角坐标系中画出二重积分的积分区域 D，也就是画出 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 2x, x^2+y^2\leqslant 2y\}$。

$x^2+y^2\leqslant 2x$ 可以整理为 $(x-1)^2+y^2\leqslant 1$，这是圆心在 $(1,0)$、半径为 1 的圆。$x^2+y^2\leqslant 2y$ 可以整理为 $x^2+(y-1)^2\leqslant 1$，这是圆心在 $(0,1)$、半径为 1 的圆。所以图像如下图所示。



画出积分区域 D 的图，然后以直线 $y=x$ 将积分区域分为 D_1 和 D_2 两个区域，如下图所示。



所以有

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

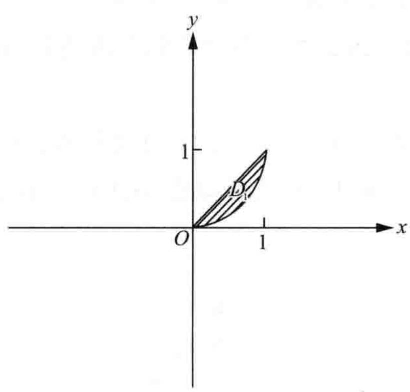
先用"极坐标系法"计算$\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

将$\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$写为$\iint_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}\theta \int_c^d f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\mathrm{d}r$。

现在来确定一下外层积分θ的积分上下限a、b，以及内层积分r的积分上下限c、d。

先来确定θ的积分上下限a、b。

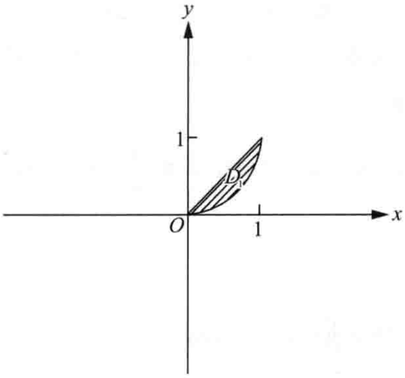
大家来看下图所示阴影区域。



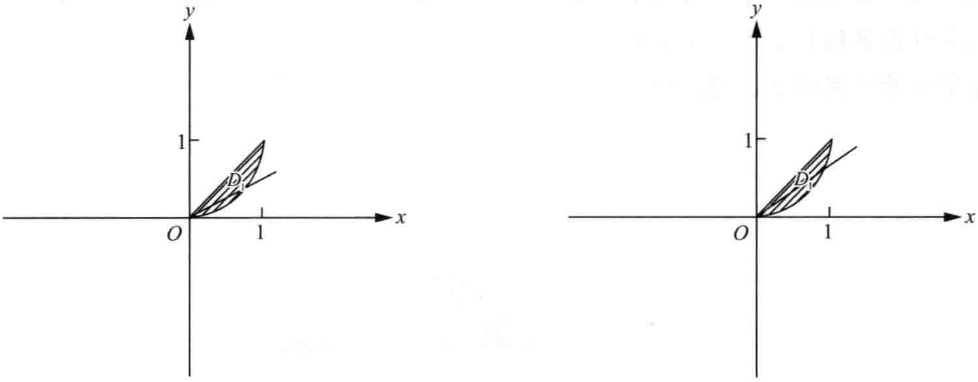
在阴影区域D_1的边界(即$x^2+(y-1)^2=1$和$y=x$)上有无数个点，从中任选一个点记为点A，请问直线OA与x轴正半轴之间的角度是多少？有的同学说这个问题无法回答，因为点A是任选的。的确，但是从图中可以看出，无论点A选在阴影区域D的边界上的何处，直线OA与x轴正半轴之间的角度最小可以无限接近$0°$(当点A取在$x^2+(y-1)^2=1$上时，越靠下，直线OA与x轴正半轴之间的角度越接近$0°$)，最大是$45°$(点A取在$y=x$上)。所以$a=0$，$b=\dfrac{\pi}{4}$。

再来确定r的积分上下限c、d。

大家来看下图所示阴影区域。

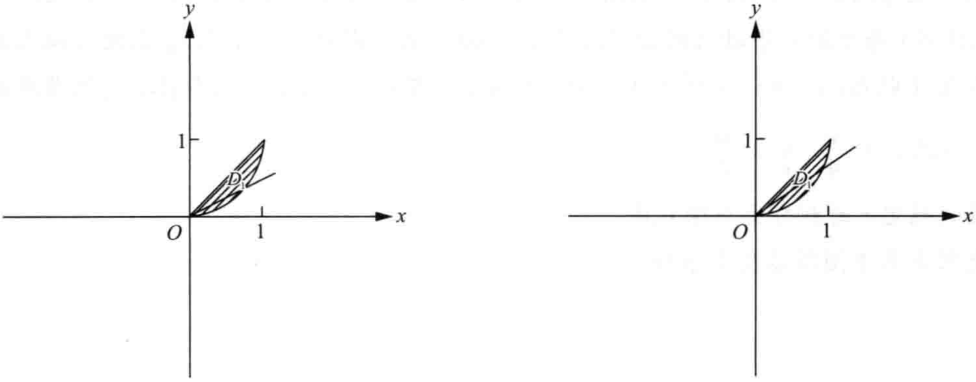


先来确定 r 的积分下限 c。从原点 O 引一条经过阴影区域的直线，当然，这有无数种引法，如下图所示的两种。



以上只给出了两种引法，实际上有无数种引法。无论是哪种引法，该直线肯定与阴影区域的边界有两个交点。在这两个交点中，离原点近的点肯定是原点本身。而原点到原点的距离肯定是 0，所以 $c = 0$。

我们再来确定 r 的积分上限 d。从原点 O 引一条经过阴影区域的直线，当然，这有无数种引法，如下图所示的两种。



这里只给出了两种引法，实际上有无数种引法。无论是哪种引法，该直线肯定与阴影区域的边界有两个交点。在这两个交点中，离原点远的点肯定是在边界 $x^2+(y-1)^2=1$ 上。把 $x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$ 代入到 $x^2+(y-1)^2=1$ 中，解得

$r=2\sin\theta$。所以 $d=2\sin\theta$。

现在，a、b、c、d 已经都求出来了，$a=0$，$b=\frac{\pi}{4}$，$c=0$，$d=2\sin\theta$。所以 $\iint\limits_{D_1} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$。

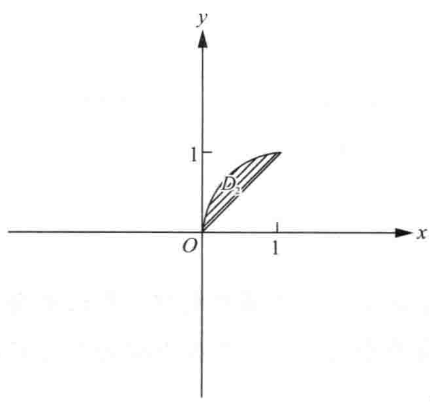
下面再用"极坐标系法"计算 $\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$。

先将 $\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 写为 $\iint\limits_{D_2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}\theta\int_c^d f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$。

现在来确定外层积分 θ 的积分上下限 a、b，以及内层积分 r 的积分上下限 c、d。

先来确定 θ 的积分上下限 a、b。

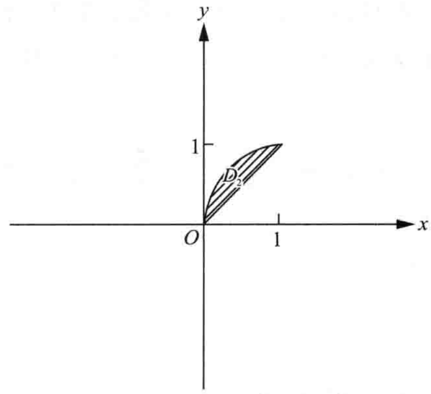
大家来看下图所示阴影区域。



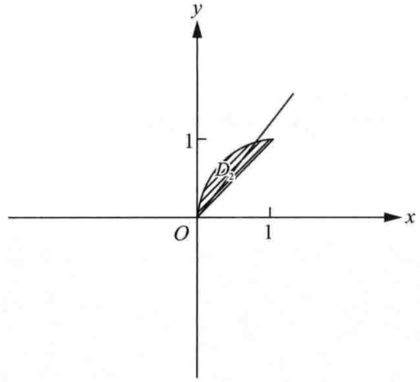
在阴影区域 D_2 的边界（即 $(x-1)^2+y^2=1$ 和 $y=x$）上有无数个点，从中任选一个点记为点 A，请问直线 OA 与 x 轴正半轴之间的角度是多少？有的同学说这个问题无法回答，因为点 A 是任选的。的确，但是从图中可以看出，无论点 A 选在阴影区域 D 的边界上的何处，直线 OA 与 x 轴正半轴之间的角度最小是 $45°$（点 A 取在 $y=x$ 上），最大可以无限接近 $90°$（当点 A 取在 $(x-1)^2+y^2=1$ 上时，越靠下，直线 OA 与 x 轴正半轴之间的角度越接近 $90°$）。所以 $a=\frac{\pi}{4}$，$b=\frac{\pi}{2}$。

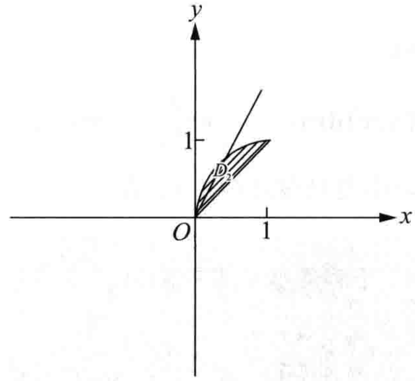
再来确定 r 的积分上下限 c、d。

大家来看下图所示阴影区域。



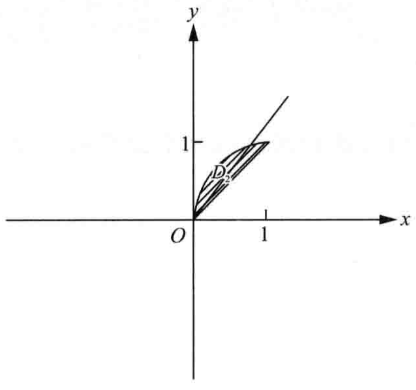
先来确定 r 的积分下限 c。从原点 O 引一条经过阴影区域的直线，当然，这有无数种引法，如下图所示的两种。

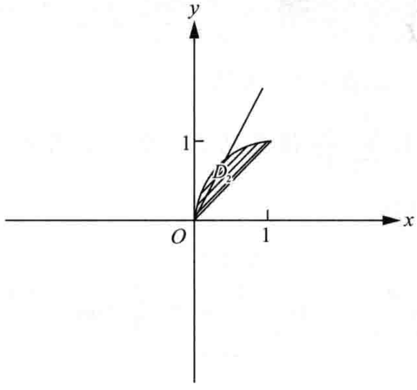




以上只给出了两种引法，实际上有无数种引法。但是，无论是哪种引法，该直线肯定与阴影区域的边界有两个交点。在这两个交点中，离原点近的点肯定是原点本身。而原点到原点的距离肯定是0，所以 $c = 0$。

再来确定 r 的积分上限 d。从原点 O 引一条经过阴影区域的直线，当然，这有无数种引法，如下图所示的两种。





这里只给出了两种引法，实际上有无数种引法。但是，无论是哪种引法，该直线肯定与

阴影区域的边界有两个交点。在这两个交点中，离原点远的点肯定是在边界$(x-1)^2+y^2=1$上。把$x=r\cos\theta$、$y=r\sin\theta$代入到$(x-1)^2+y^2=1$中，解得

$r=2\sin\theta$。所以$d=2\cos\theta$。

现在，a、b、c、d已经都求出来了，$a=\dfrac{\pi}{4}$，$b=\dfrac{\pi}{2}$，$c=0$，$d=2\cos\theta$。所以$\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$。

由于

$$\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

$$\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

所以

$$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\sin\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta}f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r$$

所以本题应该选择（B）选项。

（4）下列级数中发散的是(　　)。

(A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$

(B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n}}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$

(C) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n+1}{\ln n}$

(D) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{n^n}$

解：先看（A）选项。

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{3^n}$很明显是一个正项级数，我们用正项级数的敛散性判别法中的“比值判别法”来判断。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n+1}{3^{n+1}}}{\frac{n}{3^n}}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=\frac{1}{3}$$

$\frac{1}{3}<1$，由比值判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$ 收敛。所以本题不能选择（A）选项。

再看（B）选项。

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$ 很明显是一个正项级数，我们用正项级数的敛散性判别法中的“比较判别法”来判断。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}}=1$$

由比较判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 的敛散性相同。而当 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 中的 p 大于1时，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 收敛，所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\ln(1+\frac{1}{n})$ 收敛。本题不能选择（B）选项。

最后看（D）选项。

级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 很明显是一个正项级数，我们用正项级数的敛散性判别法中的“比值判别法”来判断。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{\frac{n!}{n^n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n+1)^n}=\frac{1}{\mathrm{e}}$$

$\frac{1}{\mathrm{e}}<1$，由比值判别法可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛。所以本题不能选择（D）选项。

由排除法可知本题应该选择（C）选项。

（5）设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&a\\1&4&a^2\end{pmatrix}$，$\vec{\boldsymbol{b}}=\begin{pmatrix}1\\d\\d^2\end{pmatrix}$，若集合 $\boldsymbol{\Omega}=\{1,2\}$，则线性方程组 $\boldsymbol{A}\vec{\boldsymbol{x}}=\vec{\boldsymbol{b}}$ 有无穷多解的充分必要条件为（　　）。

(A) $a\notin\boldsymbol{\Omega},d\notin\boldsymbol{\Omega}$

(B) $a\notin\boldsymbol{\Omega},d\in\boldsymbol{\Omega}$

(C) $a\in\boldsymbol{\Omega},d\notin\boldsymbol{\Omega}$

(D) $a\in\boldsymbol{\Omega},d\in\boldsymbol{\Omega}$