国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

信息与计算科学丛书 70

分数阶微分方程的有限差分方法

孙志忠 高广花 著

科学出版社

国家出版基金项目
NATIONAL PUBLICATION FOUNDATION

“十二五”国家重点图书出版规划项目

信息与计算科学丛书 70

分数阶微分方程的有限差分方法

孙志忠 高广花 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书力求对分数阶微分方程的差分方法作个简明介绍. 全书分为 6 章. 第 1 章介绍 4 种分数阶导数的定义, 给出两类最简单的分数阶常微分方程初值问题解析解的表达式; 介绍分数阶导数的几种数值逼近方法, 研究它们的逼近精度, 并应用于分数阶常微分方程的数值求解. 这些是后面章节中分数阶偏微分方程数值解的基础. 第 2~6 章依次论述求解时间分数阶慢扩散方程的有限差分方法、求解时间分数阶波方程的有限差分方法、求解空间分数阶偏微分方程的有限差分方法、求解一类时空分数阶微分方程的有限差分方法以及求解一类时间分布阶慢扩散方程的有限差分方法. 对每一差分格式, 分析其唯一可解性、稳定性和收敛性.

本书可以作为高等院校计算数学专业、应用数学专业研究生的教材, 也可作为科学与工程计算领域科研人员的参考书.

图书在版编目(CIP)数据

分数阶微分方程的有限差分方法/孙志忠, 高广花著. —北京: 科学出版社, 2015.8

(信息与计算科学丛书)

ISBN 978-7-03-045472-0

Ⅰ. ①分… Ⅱ. ①孙… ②高… Ⅲ. ①微分方程-有限差分方法 Ⅳ. ①O175

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015) 第 199134 号

责任编辑: 李　欣 / 责任校对: 邹慧卿
责任印制: 肖　兴 / 封面设计: 陈　敬

科学出版社 出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码: 100717
http://www.sciencep.com

北京通州皇家印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销

*

2015 年 8 月第　一　版　开本: 720 × 1000　1/16
2015 年 8 月第一次印刷　印张: 16
字数: 322 000

定价: 98.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换)

《信息与计算科学丛书》编委会

《信息与计算科学丛书》序

20 世纪 70 年代末, 由已故著名数学家冯康先生任主编、科学出版社出版了一套《计算方法丛书》, 至今已逾 30 册. 这套丛书以介绍计算数学的前沿方向和科研成果为主旨, 学术水平高、社会影响大, 对计算数学的发展、学术交流及人才培养起到了重要的作用.

1998 年教育部进行学科调整, 将计算数学及其应用软件、信息科学、运筹控制等专业合并, 定名为“信息与计算科学专业”. 为适应新形势下学科发展的需要, 科学出版社将《计算方法丛书》更名为《信息与计算科学丛书》, 组建了新的编委会, 并于 2004 年 9 月在北京召开了第一次会议, 讨论并确定了丛书的宗旨、定位及方向等问题.

新的《信息与计算科学丛书》的宗旨是面向高等学校信息与计算科学专业的高年级学生、研究生以及从事这一行业的科技工作者, 针对当前的学科前沿、介绍国内外优秀的科研成果. 强调科学性、系统性及学科交叉性, 体现新的研究方向. 内容力求深入浅出, 简明扼要.

原《计算方法丛书》的编委和编辑人员以及多位数学家曾为丛书的出版做了大量工作, 在学术界赢得了很好的声誉, 在此表示衷心的感谢. 我们诚挚地希望大家一如既往地关心和支持新丛书的出版, 以期为信息与计算科学在新世纪的发展起到积极的推动作用.

石钟慈

2005 年 7 月

前　言

分数阶微积分理论是数学的一个重要分支, 它是传统的整数阶微积分理论的推广. 最早提出这一思想的是德国数学家 G.W. Leibniz, 他在 1695 年给 L'Hôspital 的信件中讨论了 1/2 阶导数. 在之后三百多年的发展中, 许多数学家为分数阶微积分理论作出了杰出的贡献, 如 Abel, Grünwald, Leitnikov, Liouville, Laplace, Fourier, Riemann, Caputo 等. 早期由于分数阶微积分没有得到物理、力学上背景的支持, 加之分数阶微积分在物理上与经典的 Newton 整数阶体系相左, 故发展极其缓慢. 直到 20 世纪 70 年代, 美国耶鲁大学 B. Mandelbrot 提出分形学说, 将 Riemann-Liouville 分数阶微积分用以分析和研究分形介质中的布朗运动, 分数阶微积分才在现代工程计算中得以广泛关注和迅速发展. 研究者发现, 分数阶微分算子与整数阶微分算子不同, 具有非局部性, 非常适用于描述现实世界中具有记忆以及遗传性质的材料. 它已成为描述各类复杂力学与物理行为的重要工具之一. 分数阶微分方程被广泛地应用于反常扩散、粘弹性力学、流体力学、管道的边界层效应、电磁波、信号处理与系统识别、量子经济、分形理论等领域. 然而, 分数阶微分方程的解析解很难显式给出, 即使是线性分数阶微分方程的解析解也大多含有特殊函数, 如 Mittag-Leffler 函数、Wright 函数、H- 函数、超几何函数等. 由于这些函数对应的级数收敛很慢, 在实际应用中这些特殊函数的计算也是相当困难的, 故对分数阶微分方程进行高效的数值模拟已成为当前相关领域研究的前沿问题. 求解分数阶微分方程的数值算法主要包括: ① 有限差分法; ② 有限元法; ③ 谱方法; ④ 级数逼近法: 变分迭代法、Adomian 分解法、同伦摄动法、微分转换法等; ⑤ 移动网格方法; ⑥ 矩阵转化法等. 国内外的许多学者如 Meerschaert, Yuste, Henry, Roop, 刘发旺, 许传炬, 李常品, 邓伟华, 崔明荣, 马敬堂, 肖爱国, 陈文等在这一领域取得了很多卓有成效的研究成果.

对于时间分数阶微分方程的数值计算, 目前已有不少研究结果. Yuste 等[71, 72] 对时间分数阶 (α 阶, $\alpha \in (0,1)$) 慢扩散问题用 Grünwald-Letnikov (G-L) 逼近建立了向前 Euler 差分格式和加权差分格式, 并分析了两种差分格式的稳定性. 刘发旺等[8, 82] 对慢扩散方程初边值问题建立了几个隐式差分格式, 分析了差分格式的稳定性和收敛性. Langlands 等[30] 对该问题进行数值离散, 分析了差分格式的逼近误差, 并用 Fourier 方法分析了所得差分格式的无条件稳定性. 崔明荣[11] 对时间分数阶导数采用 G-L 逼近, 对空间导数用高阶逼近, 建立了时间方向一阶、空间方向四

阶收敛的紧格式. Bechelova[2] 较早用 $L1$ 插值逼近公式求解分数阶微分方程的数值解. 孙志忠和巫孝楠[55] 研究了时间分数阶 (α 阶, $\alpha \in (0,2)$) 微分方程初边值问题的数值解. 当 $\alpha \in (0,1)$ 时, 用分段线性插值方法, 给出了时间分数阶导数的数值微分公式（即 $L1$ 插值逼近公式）, 证明了一致逼近阶为 $2-\alpha$; 当 $\alpha \in (1,2)$ 时, 通过引进新变量（即降阶法）, 给出了时间分数阶导数的数值微分公式, 证明了一致逼近阶为 $3-\alpha$. 应用所得到的数值微分公式对分数阶微分方程初边值问题建立了全离散的差分格式, 证明了差分格式的唯一可解性、无条件稳定性和一致收敛性; 当 $\alpha \in (0,1)$ 时收敛阶为时间 $2-\alpha$ 阶, 空间二阶; 当 $\alpha \in (1,2)$ 时收敛阶为时间 $3-\alpha$ 阶, 空间二阶. 随后, 高广花和孙志忠[17] 对时间分数阶 (α 阶, $\alpha \in (0,1)$) 慢扩散方程中时间分数阶导数利用 $L1$ 离散, 对空间导数采用紧逼近建立了差分求解格式, 证明了差分格式的唯一可解性和无条件稳定性, 得到了离散无穷模下时间 $2-\alpha$ 阶、空间四阶收敛的高精度结果. 赵璇和孙志忠[78] 对带 Neumann 边界条件的分数阶慢扩散方程建立了 Box 格式, 并证明了该格式的无条件稳定性和收敛性. 此外, 张亚楠和孙志忠等[77] 对一维时间 Riemann-Liouville 型的分数阶慢扩散问题建立了 Crank-Nicolson 格式, 分析了格式的稳定性并给出了误差估计; 对于二维的时间分数阶慢扩散方程, 他们[74] 建立了两种 ADI 格式, 并证明了差分格式的唯一可解性、无条件稳定性和一致收敛性. 此外, 高广花和孙志忠[18, 24] 对一维慢扩散方程的无界域问题也得到了较好的数值和理论结果. 对于空间分数阶微分方程的数值方法, Meerschaert 等[38,39,57] 提出了带位移的 G-L (Shifted-GL) 逼近, 然后用带位移的 G-L 逼近建立了向前 Euler 差分格式、向后 Euler 差分格式和 Crank-Nicolson 差分格式. 在文献 [40, 56] 中, 作者将带位移的 G-L 逼近用于求解双向分数阶微分方程、二维分数阶微分方程等初边值问题, 建立了差分格式, 并作理论分析, 得到了稳定性结果.

本书力求对分数阶微分方程的差分方法作个简明介绍. 全书分为 6 章.

第 1 章介绍 4 种分数阶导数的定义. 给出了两类最简单的分数阶常微分方程初值问题的解析解. 从这两类分数阶常微分方程的解析解表达式, 可以对分数阶常微分方程解的性态有个大致的了解. 给出了分数阶导数的几种数值逼近方法, 研究了它们的逼近精度, 并应用于分数阶常微分方程的数值求解. 这些是后面章节中分数阶偏微分方程数值解的基础.

第 2 章讨论求解时间分数阶慢扩散方程的有限差分方法. 时间 Caputo 分数阶导数应用 G-L 逼近和 $L1$ 逼近两种方法; 空间整数阶导数采用二阶中心差商逼近或紧逼近, 得到离散差分格式. 对二维问题建立 ADI 求解格式. 分析所建立差分格式的唯一可解性、稳定性和收敛性.

第 3 章研究求解时间分数阶波方程的有限差分方法. 对一维问题分别建立空间二阶和空间四阶差分格式. 对二维问题建立 ADI 格式和紧 ADI 格式. 分析所建

立差分格式的唯一可解性、稳定性和收敛性.

第 4 章考虑求解空间分数阶偏微分方程的有限差分方法. 应用位移的 G-L 逼近和加权位移的 G-L 逼近离散空间分数阶导数, 分别构造空间一阶、二阶和四阶的差分格式. 对二维问题构造空间四阶 ADI 差分格式. 分析所建立差分格式的唯一可解性、稳定性和收敛性.

第 5 章研究求解一类时空分数阶微分方程的有限差分方法. 应用 Alikhanov 超收敛插值逼近离散时间 Caputo 导数, 采用二阶中心差商公式或加权二阶中心差商公式离散 Riesz 空间分数阶导数, 分别建立空间二阶和空间四阶的差分格式. 分析所建立差分格式的唯一可解性、稳定性和收敛性.

第 6 章介绍求解一类时间分布阶慢扩散方程的有限差分方法. 用复化梯形公式以及复化 Simpson 公式离散分布阶积分, 用加权 G-L 二阶逼近离散 Caputo 分数阶导数, 分别建立空间、分布阶均为二阶和空间、分布阶均为四阶的差分格式. 对二维问题建立二阶 ADI 差分格式和四阶 ADI 差分格式. 分析每一差分格式的唯一可解性、稳定性和收敛性.

本书的主要部分取材于作者及其团队的研究成果. 本书作者及其团队在分数阶微分方程数值解的有限差分方法方面的研究先后得到了三个国家自然科学资金项目的资助 (项目号 10871044，11271068, 11401319). 关于分数阶微分方程数值解的内容极为丰富. 本书所列的参考文献只是其中的极少部分. 这些文献或是本书内容的取材来源或是在写作过程中参考过的.

由于作者的水平有限, 恳请诸位学者、同仁不吝指正书中缺点和疏漏 (电子邮箱 zzsun@seu.edu.cn).

孙志忠
东南大学数学系
高广花
南京邮电大学理学院
2015 年 8 月 2 日

目　　录

第 1 章　分数阶导数及其数值逼近

本章介绍几种常用的分数阶导数的定义及简单性质. 给出两类简单的分数阶常微分方程的解析解并对其性态作简单分析. 介绍分数阶导数的几种数值逼近方法, 研究它们的逼近精度, 并应用于分数阶常微分方程的数值求解. 这些内容是后面章节中分数阶偏微分方程数值解的基础. 本章共分 6 节.

1.1　分数阶导数的定义和性质

1.1.1　分数阶积分

定义 1.1.1　设 α 是一个正实数, 函数 $f(t)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上. 称

$$ {}_aD_t^{-\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1}f(\tau)\mathrm{d}\tau $$

为函数 $f(t)$ 的 α 阶分数阶积分, 其中 $t\in[a,b]$, $\Gamma(z)$ 表示Gamma 函数, 即

$$ \Gamma(z)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-t}t^{z-1}\mathrm{d}t,\quad \mathrm{Re}(z)>0. $$

计算可知

$$ {}_aD_t^{-\alpha}(t-a)^p=\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p+\alpha)}(t-a)^{p+\alpha},\quad p>-1. $$

1.1.2　Grünwald-Letnikov (G-L) 分数阶导数

定义 1.1.2　设 α 是一个正实数, 令 $n-1\leqslant\alpha<n$, n 为一个正整数. 函数 $f(t)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上. 称

$$ {}_aD_t^{\alpha}f(t)=\lim_{h\to 0}h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{[(t-a)/h]}(-1)^j\binom{\alpha}{j}f(t-jh) $$

为函数 $f(t)$ 的 α 阶 Grünwald-Letnikov (G-L) 分数阶导数, 其中 $t\in[a,b]$, $[z]$ 为不超过 z 的最大整数, $\binom{\alpha}{j}$ 表示二项式系数

$$ \binom{\alpha}{j}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!}. $$

设 $f^{(k)}(t), k=0,1,2,\ldots,n$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, n 为满足条件 $\alpha<n$ 的最小整数. 可以证明

$$ {}_aD_t^{\alpha}f(t)=\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\frac{f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}. $$

1.1.3 Riemann-Liouville (R-L) 分数阶导数

定义 1.1.3 设 α 是一个正实数, 令 $n-1\leqslant\alpha<n$, n 为一个正整数. 函数 $f(t)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上. 称

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha}f(t)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\frac{f(\tau)\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}}\right) $$

为函数 $f(t)$ 的 α 阶 Riemann-Liouville (R-L) 分数阶导数, 其中 $t\in[a,b]$.

易知

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha}f(t)=\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}\left[{}_aD_t^{-(n-\alpha)}f(t)\right]. $$

计算可得

$$ {}_a\mathbf{D}_t^{\alpha}(t-a)^p=\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha},\quad p>-1. $$

可以证明

$$ \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left({}_a\mathbf{D}_t^{\alpha}f(t)\right)={}_a\mathbf{D}_t^{m+\alpha}f(t),\quad \alpha>0,\ m\text{为正整数}. $$

R-L 分数阶导数和 G-L 分数阶导数之间有这样一个等价关系: 对于正实数 α, 令 $n-1\leqslant\alpha<n$. 如果定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(t)$ 有直到 $n-1$ 阶的连续导数, 并且 $f^{(n)}(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 那么函数 $f(t)$ 的 α 阶 R-L 分数阶导数和 α 阶 G-L 分数阶导数是等价的.

1.1.4 Caputo 分数阶导数

定义 1.1.4 设 α 是一个正实数, 令 $n-1<\alpha\leqslant n$, n 为一个正整数. 函数 $f(t)$ 定义在区间 $[a,b]$ 上. 称

$$ {}_a^CD_t^{\alpha}f(t)=\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_a^t\frac{f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau}{(t-\tau)^{\alpha-n+1}} $$

为函数 $f(t)$ 的 α 阶 Caputo 分数阶导数, 其中 $t\in[a,b]$.

易知

$$ {}_a^CD_t^{\alpha}f(t)={}_aD_t^{-(n-\alpha)}\left[f^{(n)}(t)\right]. $$

计算可得

$$ {}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}(t-a)^{p}=\frac{\Gamma(1+p)}{\Gamma(1+p-\alpha)}(t-a)^{p-\alpha},\quad p>n-1\geqslant 0. $$

设函数 $f(t)$ 在 $[a,b]$ 上有 $n+1$ 阶连续导数, 则

$$ \begin{aligned} &\lim_{\alpha\to n-0}{}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t)\\ &=\lim_{\alpha\to n-0}\left[\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-\alpha}}{\Gamma(n-\alpha+1)}+\frac{1}{\Gamma(n-\alpha+1)}\int_{a}^{t}(t-\tau)^{n-\alpha}f^{(n+1)}(\tau)\mathrm{d}\tau\right]\\ &=f^{(n)}(a)+\int_{a}^{t}f^{(n+1)}(\tau)\mathrm{d}\tau=f^{(n)}(t). \end{aligned} $$

Caputo 分数阶导数和 R-L 分数阶导数之间也有一个等价关系: 对于正实数 α, 令 $0\leqslant n-1<\alpha<n$. 如果定义在区间 $[a,b]$ 上的函数 $f(t)$ 有直到 $n-1$ 阶的连续导数, 并且 $f^{(n)}(t)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 那么

$$ {}_{a}\mathbf{D}_{t}^{\alpha}f(t)={}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t)+\sum_{j=0}^{n-1}\frac{f^{(j)}(a)(t-a)^{j-\alpha}}{\Gamma(1+j-\alpha)},\quad a\leqslant t\leqslant b. $$

特别当 $\alpha\in(0,1)$ 时,

$$ {}_{a}\mathbf{D}_{t}^{\alpha}f(t)={}_{a}^{C}D_{t}^{\alpha}f(t)+\frac{f(a)(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}. $$

可以看出, 当函数 $f(t)$ 满足条件

$$ f^{(j)}(a)=0,\quad j=0,1,\ldots,n-1 $$

时, 函数 $f(t)$ 的 α 阶 Caputo 分数阶导数和 α 阶 R-L 分数阶导数是等价的.

从前面的这些分数阶导数定义可知, 某点 t 处的分数阶导数值都和这一点左边的函数值有关. 有时也称它们为左 G-L 分数阶导数、左 R-L 分数阶导数和左 Caputo 分数阶导数.

类似地, 可以定义右 G-L 分数阶导数、右 R-L 分数阶导数和右 Caputo 分数阶导数:

$$ {}_{t}D_{b}^{\alpha}f(t)=\lim_{h\to 0}h^{-\alpha}\sum_{j=0}^{[(b-t)/h]}(-1)^{j}\binom{\alpha}{j}f(t+jh), $$

$$ {}_{t}\mathbf{D}_{b}^{\alpha}f(t)=(-1)^{n}\frac{\mathrm{d}^{n}}{\mathrm{d}t^{n}}\left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t}^{b}\frac{f(\tau)\mathrm{d}\tau}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}\right), $$

$$ {}_{t}^{C}D_{b}^{\alpha}f(t)=(-1)^{n}\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\int_{t}^{b}\frac{f^{(n)}(\tau)\mathrm{d}\tau}{(\tau-t)^{\alpha-n+1}}. $$