DJ 普通高等院校规划教材

数学教育学导论

SHU XUE JIAO YU XUE DAO LUN

罗新兵 罗增儒 主编

陕西师范大学出版总社有限公司

DJ 普通高等院校规划教材

数学教育学导论

主编　罗新兵(陕西师范大学)　罗增儒(陕西师范大学)

编者　(以姓名拼音音序为序)

安海龙(宝鸡文理学院)　安振平(咸阳师范学院)

陈宝安(咸阳师范学院)　侯万胜(延安大学)

黄云鹏(陕西教育学院)　罗新兵(陕西师范大学)

刘新平(陕西师范大学)　马俊青(咸阳师范学院)

乔希民(商洛学院)　尚晓青(西安文理学院)

田　枫(陕西师范大学)　王光生(陕西师范大学)

薛社教(渭南师范学院)　杨明顺(渭南师范学院)

杨倩丽(渭南师范学院)　杨渭清(西安文理学院)

张　琳(陕西理工学院)　赵临龙(安康学院)

张　雄(陕西教育学院)

陕西师范大学出版总社有限公司

图书代号:JC14N0596

图书在版编目(CIP)数据

数学教育学导论 / 罗新兵,罗增儒主编. —2版. —西安:陕西师范大学出版总社有限公司,2014.8
ISBN 978-7-5613-7831-1

Ⅰ.①数…　Ⅱ.①罗…②罗…　Ⅲ.①数学教学—教育学—师范大学—教材　Ⅳ.①O1-4

中国版本图书馆CIP数据核字(2014)第186156号

数学教育学导论

罗新兵　罗增儒　主编

责任编辑/ 田均利
责任校对/ 杨雪玲
封面设计/ 鼎新设计
出版发行/ 陕西师范大学出版总社有限公司
(西安市长安南路199号　邮编710062)
网　　址/ http://www.snupg.com
经　　销/ 新华书店
印　　刷/ 兴平市博闻印务有限公司
开　　本/ 787mm×960mm　1/16
印　　张/ 18
字　　数/ 288千
版　　次/ 2014年8月第2版
印　　次/ 2014年8月第1次印刷
书　　号/ ISBN 978-7-5613-7831-1
定　　价/ 35.00元

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与本社高教出版分社联系、调换。
电　话:(029)85303622(传真)　85307826

前　言

几年前就萌生了编写《数学教育学导论》的念头,在数学课程改革背景下,这种念头愈发强烈.适逢学校正在改革教师教育模块课程的体系与内容,于是我便主持申报了陕西师范大学教师教育教材建设项目(项目名称为《〈数学教育学导论〉教材建设》,2007 年),项目顺利获得通过,教材编写工作便正式启动了.

首先由我编拟了教材的编写纲要.编写纲要写好之后,在罗增儒教授的主持下,先后三次对编写纲要进行了研讨.参加研讨的有王光生博士、尚晓青博士、田枫老师.2007 年 12 月召开了教材编写研讨会.参加研讨会的除了上述几位老师外,还有邓方安、赵临龙、刘新平、陈宝安、乔希民、马俊青、杨倩丽等老师.在会议上,大家就教材定位、内容选取、编写体例、写作分工等问题进行了深入讨论,提出了很多富有成效的建议.后来,在教材编写过程中又吸收了几位教师参加,主要是想集中大家的智慧编写一本高质量的教材.教材初稿交上来后,由我完成了教材的统稿.总之,本教材是大家共同的作品,是集体智慧的结晶.

本教材反映了数学教育研究的新成果,体现了数学课程改革的新理念,继承了同类教材的优势传统,借鉴了同类教材的好的做法,注重基础性、实用性、时代性和新颖性.

本教材共分成四篇:第一篇为直觉感知篇,通过案例感知和认识数学教育的基本内容、基本范畴、常规工作及学科特点;第二篇为基本理论篇,介绍了数学学习基本理论、数学课程基本理论、数学教学

基本理论及数学教育评价基本理论；第三篇为实践操作篇，介绍了数学教学的常规工作、数学教学的基本技能、数学微格教学及数学教育实习；第四篇为延伸拓展篇，介绍了数学教育发展简史、数学课程改革简介、数学教育技术简介、数学教育论文写作及数学教师的专业成长。

本次修订，注重落实《义务教育数学课程标准(2011 年版)》的理念和要求，以便使本教材更加完善。

本教材在编写过程中引用了许多著作，吸收了很多观点，在参考文献中均已列出，由于时间仓促，疏漏在所难免，真诚希望读者在使用过程中提出意见和建议。

罗新兵

2014 年 6 月

目录

CONTENTS

直觉感知篇

基本理论篇

实践操作篇

延伸拓展篇

第一章　数学教育的整体印象

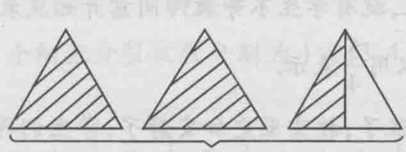
第一节　数学教育的基本内容

作为未来的数学教师，你们在进入大学后，已经系统地学习了很多数学课程，诸如数学分析、高等代数、几何学等；你们自小学起，甚至更早，就开始接受数学教育了．你们也基本具备了数学学科知识，对数学教育也有一些感性认识了，你们也许知道：虽然某人拥有深厚的数学专业知识，但是未必能够很好地将数学知识教给他人，未必就能成为一名好的数学教师．经验告诉我们，若要成为一名好的数学教师，除了具备数学学科知识以外，还须掌握数学教学的有关知识．为此我们必须深入地去认识和研究数学教育这个领域，作为学科的数学教育到底包括哪些基本内容？我们不妨通过几个具体案例加以直觉感知．

案例 1　能用$\frac{5}{6}$表示吗？

在“真分数、假分数和带分数”（浙教版小学数学第 10 册）这节公开课教学中，曾经有过这样一个教学案例：

在引导学生初步建立了真分数、假分数和带分数的概念后，教师 Z 组织学生进行应用练习：用分数表示图中的涂色部分（书中“练一练”第 1 题）．



（　　）

图 1－1

师（投影呈现图 1－1）：涂色部分可以用哪个分数表示？

生 1:$2\frac{1}{2}$.

学生都没有异议,但还有不少学生举着手.

生 2:$\frac{5}{2}$.

学生同样没有异议,教师也肯定了生 2 的答案,在教师刚想转入下一个图的讨论时,发现还有几个学生高举着手.

生 3:我认为还可以用$\frac{5}{6}$表示.

教室里顿时安静了下来,不少学生的脸上露出了疑惑不解的神情.(听课教师的脸上同样露出了疑惑的神情.)

师(惊讶地):还可以用$\frac{5}{6}$,能说说你的想法吗?

生 3:我是把 3 个三角形看作一个整体,平均分成 6 份,阴影部分表示其中的 5 份.

在学生表述过程中,教师把 3 个三角形圈了起来(如图 1-2),并表示赞同生 3 的意见.(这时,听课教师开始躁动起来."能用$\frac{5}{6}$表示吗?"老师们在小声议论着.)

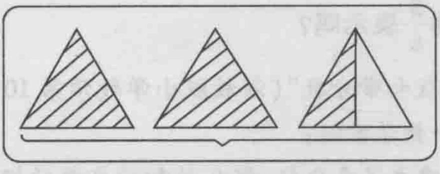


图 1-2

生 3 的发言刚结束,就有学生不等教师同意开始发表自己的意见.

生 4:我认为还可以用$\frac{5}{4}$表示.

这下,教师 Z 也愣住了,教室里更加安静了,学生们再一次睁大了眼睛.(老师们也再次安静了下来.)

生 4:我是把其中的 2 个三角形看作单位"1",平均分成 4 份,阴影部分表示这样的 5 份.

这时,教师 Z 脑海中闪现的是"2 的$\frac{5}{4}$就是$\frac{5}{2}$",于是马上肯定了这位学生

的意见.(老师们再次躁动起来,议论的声音更大了……)

课后,许多外校的老师主动留下来参与了讨论.不少教师对上述教学提出了异议,认为图中的涂色部分“不能用$\frac{5}{6}$表示”,“用$\frac{5}{4}$表示毫无道理”,这样教会把学生“越教越糊涂”.

感知1　在案例1中,教师把一个三角形抽象为单位1,学生3把所给的三个三角形整体地抽象为单位1,学生4把两个涂色的三角形整体地抽象为单位1.面对同样的图形信息,学生的理解是不同的,这从学生的回答可以看出来;教师的理解也是不同的,这从老师的反应可以看出来.也就是说,人们(包括教师和学生)在面对同一信息时,理解是截然不同的,换而言之,每个个体对所面临的信息都赋予了自己独特的理解.这其实已涉及数学学习的心理问题,它是数学教育的基本内容之一.请你结合自己多年来的数学学习经历思考:数学学习还应包括哪些基本内容.

案例2　正整数指数函数

首先提出两个问题(具有实际背景):

问题1　某种细胞分裂时,由1个分裂成2个,2个分裂成4个……一直分裂下去(如图1-3).

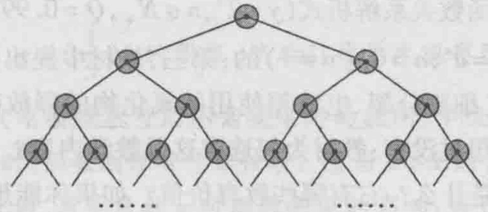


图1-3

(1)用列表表示1个细胞分裂次数分别为1,2,3,4,5,6,7,8时,得到的细胞个数;

分裂次数(n)	1	2	3	4	5	6	7	8
细胞个数(y)	2	4	8	16	32	64	128	256

(2)用图像表示1个细胞分裂的次数$n(n\in N_+)$与得到的细胞个数y之间的关系,如图1-4;

(3)写出得到的细胞个数 y 与分裂次数 n 之间的关系式.($y=2^n, n\in N_+$)

问题2 电冰箱使用的氟化物的释放破坏了大气上层的臭氧层. 臭氧含量 Q 近似满足关系式 $Q=Q_0\times0.9975^t$,其中 Q_0 是臭氧的初始量,t 是时间(单位:年). 这里设 $Q_0=1$.

有了以上两个函数关系解析式:$y=2^n, n\in N_+$;$Q=0.9975^t, t\in N_+$(注意:这已经对实际问题情境作了一次数学抽象),将其进一步抽象为正整数指数函数也就有了认知基础.

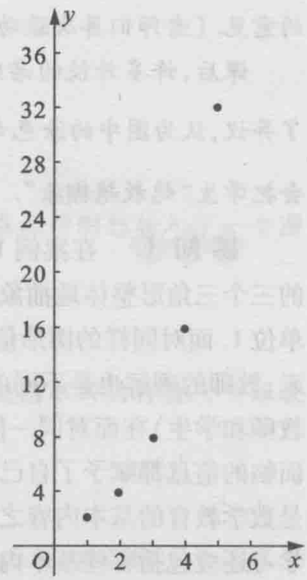


图 1-4

感 知 2 众所周知,在从小学到大学的学习过程中,我们都离不开数学教材,教师教学是依托教材开展的,学生学习是围绕教材进行的,各种考试也是囿于教材展开的. 案例 2 是从北师大版高中数学教材《数学 1》中浓缩加工形成的一段学习素材,我们可以看出以下几点:第一,数学知识的表示形式是多样的,既有文字形式的,也有符号形式的;既有表格形式的,也有图像形式的;第二,数学知识是从具体(直观示意图)到抽象的(抽象表达式);是从具体函数关系解析式($y=2^n, n\in N_+$, $Q=0.9975^t, t\in N_+$)到抽象函数关系解析式($y=a^n$, $a>0$且 $a\neq1$)的;第三,教材中提出的两个问题都是具有实际问题背景的(细胞分裂、电冰箱使用的氟化物的释放破坏了大气上层的臭氧层). 可是你们想过没有:教材为何选取这段教学内容? 为何采用上述编写方式? 具体依据又是什么? 它有哪些教育价值? 如果你能想到这些问题,其实已涉及了数学教育的又一基本内容——数学课程. 请你继续思考:数学课程还应包括哪些内容?

案 例 3 指数函数的教学设计

北师大版高中数学教材《数学 1》原先是这样安排的:(1)先在两个坐标系上分别画出 $y=2^x$ 和 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图像,然后考察两个函数图像的相同点和不同点,从而得到两个函数的性质;(2)画出并观察、分析几个底数不同的指数函数的图像,归纳出一般的指数函数的图像和性质;(3)在同一坐标系中画出指数函

数 $y=2^x$ 和 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图像,从而抽象概括得到一般性的结论:当函数 $y=a^x$ 与函数 $y=(\frac{1}{a})^x$ 的自变量的取值互为相反数时,其函数值是相等的,这两个函数的图像是关于 y 轴对称的;(4)通过几个具体函数图像(当 $a>1$ 时,选取 $y=2^x$ 和 $y=3^x$;当 $0<a<1$ 时,选取 $y=0.5^x$,$y=0.3^x$ 和 $y=0.2^x$),考察底数 a 对函数图像的影响.

可是有教师在分析和研究的基础上认为:

第一,上述安排过于繁琐,甚至出现简单重复:首先在两个坐标系上分别画出 $y=2^x$ 和 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图像;其次在同一坐标系中画出 $y=2^x$ 和 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图像;最后还要画出 $y=2^x$ 和 $y=(\frac{1}{2})^x$ 的图像,考察底数 a 对函数图像的影响.

第二,更为重要的是,这样设计将会低估学生的数学发现能力,本来指数函数的基本性质可以一一发现出来,但是现在硬生生地将其扯开,安排在了不同阶段,每一阶段发现一个性质,限制了学生的思维.

第三,只要教学设计合理,指数函数的基本性质都将一一被学生探究出来,在教学中可以这样设计:在同一坐标系中画出指数函数 $y=2^x$,$y=(\frac{1}{2})^x$,$y=3^x$,$y=(\frac{1}{3})^x$,$y=5^x$,$y=(\frac{1}{5})^x$ 的图像,然后引导学生观察图像,在观察图像基础上回答以下问题(有些性质可能不需要老师的提问,学生自己就会发现):①当底数 a 互为倒数时,函数图像有什么性质?②当 $a>1$ 时,从函数图像考察函数的性质;当 a 变化时,考察底数 a 对函数图像的影响;当 $0<a<1$ 时,从函数图像考察函数的性质;当 a 变化时,考察底数 a 对函数图像的影响.这样设计难度其实不大,也有利于学生提出自己的想法和念头.

感知 3 在案例3中,我们可以看出,虽然教材已经给出教学内容的先后顺序,但是教师并没有完全按照教材展开教学,而是重新进行了教学设计.如果你能看出教师的新设计,其实也就感知到了数学教育的基本内容之一——数学教学.不要停止你的思考:数学教师为何进行重新设计?这样设计具体依据又是什么?新的设计是否能够收到预期效果?如果你能想到以上问题,表明你对数学教学思考得相当深入了.当然,我们也可以在脑海中回顾自己的数学学习

经历:老师是如何进行数学概念教学的?是如何进行数学命题教学的?是如何进行数学解题教学的?在不同的学习阶段,数学教学在设计上是否存在差异?为何会有这些差异?

案例 4 如何看待名次?

学生期中考试成绩的名次刚刚排出,某老师迫不及待地在研究名次表.片刻,传来他的惊呼:“哎呀,S 同学怎么啦,这次成绩排名在全班下跌到第 23 名!”

下午第三节课,老师将 S 同学叫到办公室.下面是他们俩的一段对话:

老师:S 同学,你觉得这次期中考试的成绩如何?

学生(面颊微红,忐忑不安):老师,我这次考得很不好.

老师(以为 S 同学不知道自己的名次):你可知道这次期中考试你在班级排第几名?

学生(轻声):第 23 名.

老师(有点意外,提高声调):那你在高一年级和高二年级的上学期在全班排第几名?

学生(声音更低):两次第一,三次第二,还有一次好像应是第三.

老师(站了起来):你这次在全班可是第 23 名啊!我真的搞不懂,为什么短短的半个学期,你的成绩会出现这样大的退步!你要给我好好地反思反思,把原因给我讲清楚!

老师摇了摇头,叹了口气,坐下.

S 同学的头垂得更低了.

……

感知 4 我们相信,可能大部分同学都有类似的经历,从小学到大学很多老师经常按照考试成绩排出名次,并且张榜公布,如果哪位同学在考试中名次靠前,或者取得很大进步,就会得到老师的表扬,同学的羡慕,家长的褒奖;相反,如果哪位同学在考试中名次靠后,或者退步太大,就会受到老师的批评,同学的轻视,家长的呵斥.其实,这些都是社会、学校、家庭、教师、学生对学习的一种评价,它也是数学教育学的重要组成部分.大家不妨继续思考:用分数来评价数学学习是否准确客观?是否存在不足?除了用分数来评价数学学习外,是否还有其他评价方式?还有哪些评价方式?这些评价方式又有哪些优势?这些

问题将在后面给出回答.

第二节　数学教育的基本范畴

数学教育包括一对基本范畴:作为数学教育学科背景的——数学学科知识与作为数学教育学科性质的——数学教学知识.这对基本范畴如何影响数学教学效果?我们不妨就从两个方面加以具体分析.

一、数学知识与数学教学

在知识与教学上,我国有句俗语:教师要给学生一杯水,自己就得有一桶水;人们有过直觉认识:初中毕业生就能够教小学,高中毕业生就能够教初中,并在教学中(特定历史时期,尤其是在一些农村学校)确实也采取了这种朴素做法.俗语所传达的意蕴和做法所体现的认识却存在着危险倾向.

数学知识会影响到数学教学,这个提法大家应该没有异议;数学知识如何影响数学教学,这个问题大家未必就很清楚.

案例 1　加减消元法

教师是这样教授加减消元法的:

首先呈现教材上的一道具体问题:“我们的小世界杯”足球赛规定:胜一场得 3 分,平一场得 1 分,负一场得 0 分.勇士队共赛了 9 场,共得 17 分.已知这个队只输了 2 场,那么胜了几场?又平了几场呢?

解　设勇士队胜了 x 场,平了 y 场.

根据得分的总场次所提供的等量关系有方程

$$x+y=7 \quad ①$$

根据得分的总数所提供的等量关系有方程

$$3x+y=17 \quad ②$$

由②-①得　$2x=10$,

解得　$x=5$.

代入①得　$y=2$.

答:勇士队胜了 5 场,平了 2 场.

正当老师觉得这个解法步骤完整、计算准确、书写规范,准备进入后续内容

学习时，有位学生站了起来问了以下问题：为什么①式的比赛场次与②式的比赛得分能够相减？

如果让你以教师的身份给出解释，你能否解释清楚呢？你的解释是否能够消除学生的困惑呢？其实，学生的提问主要表现为数学的挑战，这里涉及生活原型与数学模式的关系．一方面式①、②来源于比赛场次与得分总数（确有单位问题）．另一方面，列成方程以后又完全舍弃了原型的物理属性，成为抽象的模式（已经没有单位了，有人认为单位问题根本就不是数学问题），$x+y=7$ 可以去刻画任何和为 7 的生活现象而不专属于任一生活现象．方程的加减是根据方程的理论与方法进行的，这是数学内部事情（与单位无关）．最后，得出 $x=5$，$y=2$ 后，又要回到生活中去，给出解释（有单位了）．也就是说，足球比赛的现实原型经过代数运演之后（设未知数，进行四则运算等），已经凝聚成为对象（方程），经过“建模”之后的运演已经是数学对象的形式运算了．

通过上例可以看出，教师组织良好的数学知识结构对于数学教学具有必要性和重要性．其实，已有学者早就在不同场合强调这一观点：“我们常常谈教学基本功，也往往提到处理教材的能力、语言表达的能力、课堂调控的能力，以及板书、情感、教态等．其实，最关键的是教师对教材的理解准确不准确、深刻不深刻、本质不本质．不准确会产生误导，不深刻、不本质必然流于浅薄”、“之所以要选取这样一个角度，是因为我们觉得数学教学的前提是数学．没有数学内容的本质明确，即使有高技巧的华丽教学，也不会有高水平的数学教学．最基本的理由是：学生新认知结构的构建需要提供知识结构的优质素材，在教学中‘教什么’比‘怎样教’更为重要”．

虽然以上关于教师数学知识对于数学教学的重要性的论断与分析尚处于经验层次，还处于思辨水平，但是这些认识能够在西方学者的研究结论中找到理论支撑，在我国教师的教学生活中找到实践素材．正如西方一位学者所言：“有限的数学内容知识限制了教师促进学生理解性学习的能力，教师即使持有‘为理解而教’的强烈信念，也不能弥补他在数学内容知识上的缺陷．教师的数学内容知识也许不能自动地产生富有前景的教学方法或全新的教学理念，但是，如果没有数学内容知识的强有力的支持，富有前景的教学方法或全新的教学理念不可能成功地得以实现”．

至此，我想大家不难理解：为什么进入大学后，还要学习那么多的数学课程，虽然其中很多课程内容中学阶段并不教授，其实那是为了以后成为数学教