新世纪英才
英才教程

ZHONGXUE QIJI KETANG

中学奇迹课堂

教材解析完全学习攻略

数学

配浙教教材
八年级
下册

- 优秀教师的教案
- 状元学子的笔记
- 家长辅导的蓝本

教育科学出版社
ESPH
Educational Science Publishing House

·新世纪英才系列·

ZHONGXUE QIJI KETANG

中学奇迹课堂

教材解析完全学习攻略

配浙教教材

总主编 詹 丞

数学

八年级 下册

班级：八年级

姓名：奇迹课堂

性别：男

家庭住址：北京

强项：数学

教育科学出版社
·北京·

出 版 人:所 广 一
策划制作:世纪英才
责任编辑:王 玉 栋
责任印制:曲 凤 玲

图书在版编目(CIP)数据

中学奇迹课堂. 数学. 八年级. 下册/詹丞总主编.
—北京:教育科学出版社,2012.12
配浙教教材
ISBN 978-7-5041-7131-3

Ⅰ.①中… Ⅱ.①詹… Ⅲ.①中学数学课—初中—教学参考资料 Ⅳ.①G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 283945 号

新世纪英才系列
中学奇迹课堂
ZHONGXUE QIJI KETANG

出版发行	教育科学出版社		
社 址	北京·朝阳区安慧北里安园甲 9 号	市场部电话	010-64989009/027-86779229
邮 编	100101	编辑部电话	010-64981329/027-86793945
传 真	010-64891796	网 址	http://www.esph.com.cn
经 销	各地新华书店		
印 刷	荆州市今印印务有限公司		
开 本	170 毫米×240 毫米 16 开	版 次	2012 年 12 月第 1 版
印 张	23.5	印 次	2012 年 12 月第 1 次印刷
字 数	602 千	定 价	26.80 元

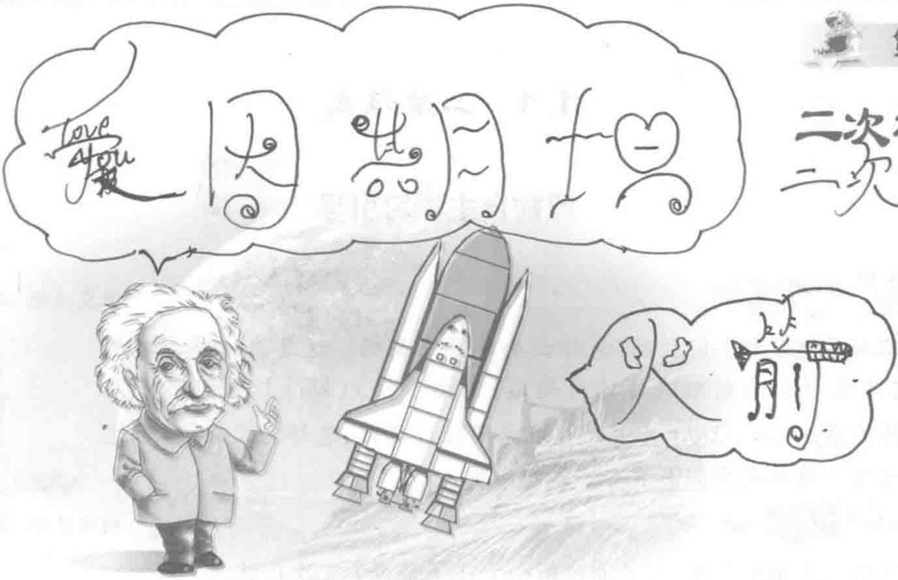
目录

第5章 平行四边形

第6章 特殊平行四边形与梯形

二次根式

二次根式



本章综述

学思结合 · 事半功倍

根据爱因斯坦的相对论，当地球上经过 1 s 的时间时，宇宙飞船在太空只经过$\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$ s. 公式中的 c 指光速（约 3×10^8 m/s），v 指宇宙飞船的速度.

根据爱因斯坦的相对论，当地球上经过1s的时间时……

假设有一对兄弟，哥哥 28 岁，弟弟 25 岁，哥哥乘坐以速度为光速的$\frac{2}{5}\sqrt{6}$倍的飞船做了 5 年的宇宙旅行（这个 5 年是指地面上的 5 年），此时弟弟的年龄是 30 岁，可是这段时间里哥哥只长了一岁. 就这样，宇宙旅行后，弟弟反而比哥哥大一岁. 你能用上面的公式验证这个结论吗？

同学们，学完本章的二次根式及二次根式的性质及运算等相关内容，你就能解决上面的问题了.

课程标准要求

1. 了解二次根式的概念，理解二次根式有意义的条件，会求二次根式的值.
2. 了解二次根式的性质，并会运用二次根式的性质来化简二次根式.
3. 理解二次根式的乘除法法则，会进行简单的二次根式的乘除法运算.
4. 理解同类二次根式的概念和二次根式的加减法法则，会进行简单的二次根式的加减法运算.
5. 会进行简单二次根式的四则运算，会运用二次根式的运算解决简单的实际问题.

学习方法指导

1. 注意观察、分析、归纳、探究等能力的培养.
2. 注重数学知识与现实生活的联系. 无论是学习二次根式的概念，还是学习二次根式的性质和运算，都尽可能把所学的知识与现实生活联系起来，重视运用所学知识解决实际问题能力的培养.
3. 充分利用图形，使代数和几何有机结合. 对于数与代数的内容，应重视有关内容的几何背景，运用几何图形帮助理解、解决有关代数问题.
4. 运用类比思想. 学习时注意回顾与类比，充分运用类比思想理解算理和算法，提高运算能力.

1.1 二次根式

课前自主学习引导

情景导入 激发兴趣 温故知新

大家知道电视塔(如右图)为什么要建得很高吗？这是因为电视塔越高,从塔顶发射出的电磁波传播得越远,传播半径 r(km)与电视塔塔高 h(km)的关系是 $r=\sqrt{2Rh}$(其中 R 是地球半径). 那么,怎样定义像 $\sqrt{2Rh}$这类的式子呢？这就是我们本节要学习的内容.

呈现目标 明确目标 有的放矢

1. 了解二次根式的概念,并能辨析一个式子是否为二次根式.
2. 理解并掌握二次根式有意义的条件,会求二次根式中字母的取值范围.
3. 能根据条件求简单的二次根式的值.

课堂精讲精练强化

典例剖析 立足教材 讲透练精

【名师点拨·夯实双基】

知识点一:二次根式的概念

例 1 下列各式中,哪些是二次根式？哪些不是二次根式？为什么？

(1) $\sqrt{a^2+1}$;　　(2) $\sqrt[3]{8}$;

(3) $\sqrt{-5x}$;　　(4) $\sqrt{\dfrac{1}{(x+3)^2}}$;

(5) $\sqrt{-(a-4)^2}$;　　(6) $\sqrt{m^2+2m+1}$.

分析:判断一个式子是不是二次根式,一定要紧扣二次根式的定义.

解:(1)$\because$ 不论 a 为何值,都有 $a^2+1>0$,

$\therefore$ $\sqrt{a^2+1}$是二次根式.

(2)$\because$ $\sqrt[3]{8}$的根指数是 3,$\therefore$ $\sqrt[3]{8}$不是二次根式.

(3)当 $x>0$ 时,$-5x<0$,$\sqrt{-5x}$不是二次根式；

当 $x\leqslant 0$ 时,$-5x\geqslant 0$,$\sqrt{-5x}$是二次根式.

【深度解析·举一反三】

知识解读

像 $\sqrt{a^2+4}$,$\sqrt{b-3}$,$\sqrt{2S}$这样表示的算术平方根,且根号内含有字母的代数式叫做二次根式. 为了方便起见,我们把一个数的算术平方根$\left(\text{如}\sqrt{3},\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)$也叫做二次根式.

(1)“$\sqrt{\ }$”的根指数为 2,即“$\sqrt[2]{\ }$”,一般省略根指数 2,写作“$\sqrt{\ }$”,不要忽略这一点. 如$\sqrt[3]{2}$的根指数是 3,它不是二次根式；

(2)二次根式$\sqrt{a}$中的 a 叫做被开方数(式),它可以是一个数,也可以是一个含有字母的式子,但被开方数(式)必须为非负数(式)；

$\therefore \sqrt{-5x}$不一定是二次根式.

(4)当分母 $x+3=0$,即 $x=-3$ 时,$\sqrt{\dfrac{1}{(x+3)^2}}$没有意义;

当 $x\neq-3$ 时,$(x+3)^2>0$,则 $\dfrac{1}{(x+3)^2}>0$,$\sqrt{\dfrac{1}{(x+3)^2}}$是二次根式.

$\therefore \sqrt{\dfrac{1}{(x+3)^2}}$不一定是二次根式.

(5)当 $a-4=0$,即 $a=4$ 时,$\sqrt{-(a-4)^2}$是二次根式;

当 $a\neq4$ 时,$-(a-4)^2<0$,$\sqrt{-(a-4)^2}$不是二次根式.

$\therefore \sqrt{-(a-4)^2}$不一定是二次根式.

(6)$\because m^2+2m+1=(m+1)^2\geqslant0$,

$\therefore \sqrt{m^2+2m+1}$是二次根式.

点拨:判断一个式子是不是二次根式,要看该式子是否同时具备两个要素:①根指数为2(通常省略不写);②被开方数(式)为非负数.

知识点二:求二次根式被开方数中字母的取值范围

例2 求下列二次根式中字母 x 的取值范围:

(1) $\sqrt{x-3}$;　　(2) $\sqrt{\dfrac{1}{3+x}}$;

(3) $\sqrt{x^2+1}$;　　(4) $\sqrt{x^2+2x+1}$.

分析:要使上述二次根式有意义,只须使被开方数为非负数即可.

解:(1)由 $x-3\geqslant0$,得 $x\geqslant3$,

$\therefore$ 字母 x 的取值范围是大于或等于3的实数.

(2)由$\dfrac{1}{3+x}>0$,得 $3+x>0$,即 $x>-3$,

$\therefore$ 字母 x 的取值范围是大于 -3 的实数.

(3)$\because$ 无论 x 取何值,都有 $x^2\geqslant0$,

$\therefore x^2+1>0$ 恒成立,

$\therefore x$ 的取值范围是全体实数.

(4)$\because$ 无论 x 取何值,$x^2+2x+1=(x+1)^2\geqslant0$ 恒成立,

(3)像$\sqrt{a}+1(a\geqslant0)$这样的式子只能称为含有二次根式的代数式,不能称为二次根式;

(4)形如 $b\sqrt{a}(a\geqslant0)$的式子表示 b 与$\sqrt{a}$的乘积,也是二次根式;但当 b 为带分数时,要把 b 改写成假分数. 如 $2\dfrac{2}{3}\sqrt{5}$ 应写成$\dfrac{8}{3}\sqrt{5}$.

变式训练

1. 下列各式中,哪些是二次根式?哪些不是?为什么?

(1) $\sqrt{6}$;　　(2) $\sqrt{1-18}$;

(3) $\sqrt{x^2+1}$;　　(4) $\sqrt[3]{-27}$;

(5) $\sqrt{x^2+2x+2}$;　　(6) $\sqrt{|x|}$;

(7) $\sqrt{-2(2x-1)^2}$;

(8) $\sqrt{11+2x}\left(x<-\dfrac{11}{2}\right)$.

知识解读

根据算术平方根的意义,二次根式根号内字母的取值范围必须满足 被开方数大于或等于零.

变式训练

2. (四川绵阳)要使 $\sqrt{3-x}+\dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$ 有意义,则 x 应满足(A).

$3-x\geqslant0$

$-x\geqslant-3$

$x\leqslant3$

A. $\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant3$

B. $x\leqslant3$ 且 $x\neq\dfrac{1}{2}$

C. $\dfrac{1}{2}<x<3$

D. $\dfrac{1}{2}<x\leqslant3$

$2x-1>0$

$2x>-1$

$x>-\frac{1}{2}$

∴ x 的取值范围是全体实数.

点拨:求使代数式有意义的字母的取值范围时,对于含有多个二次根式的,必须满足多个被开方数同时为非负数;对于含有分式的,则还须考虑分母不能为零.

例3　在函数 $y=\sqrt{x-1}$ 中,自变量 x 的取值范围是(　　).

A. $x\geqslant -1$　　B. $x\neq 1$

C. $x\geqslant 1$　　D. $x\leqslant 1$

分析:要使 $\sqrt{x-1}$ 有意义,则 $x-1\geqslant 0$,解得 $x\geqslant 1$.

解:C

点拨:要求函数中自变量的取值范围,实质是求 $\sqrt{x-1}$ 有意义的条件,根据被开方数为非负数解出不等式的解集即是自变量 x 的取值范围.

知识点三:求二次根式的值

例4　当 $x=6$ 时,求二次根式 $\sqrt{3x-2}$ 的值.

分析:将 $x=6$ 代入二次根式 $\sqrt{3x-2}$ 中,然后计算算术平方根即可.

解:将 $x=6$ 代入二次根式,得

$\sqrt{3x-2}=\sqrt{3\times 6-2}=\sqrt{16}=4$.

点拨:求二次根式的值可分为三步:①代入;②按被开方数指明的运算顺序计算;③求算术平方根.

3. 求下列各式有意义时字母 x 的取值范围:

(1) $\sqrt{-2x-3}$;　(2) $\sqrt{\dfrac{-3}{2x-1}}$;

(3) $\dfrac{\sqrt{x+3}}{x+1}$.

知识解读

把数值代入二次根式被开方数的字母中,进行计算及化简,这一过程就叫做求二次根式的值.

变式训练

4. 求二次根式 $\sqrt{x-2y-6}$ 的值,其中 $x=4$,$y=-3$.

培优创新

综合探究 规律总结

【循序渐进·思维拓展】

题型一:二次根式与直角坐标系的综合应用

例1　如果代数式 $\sqrt{m}+\dfrac{1}{\sqrt{mn}}$ 有意义,那么在直角坐标系中点 $A(m,n)$ 在(　　).

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

分析:由题意知 $m\geqslant 0$,且 $mn>0$,∴ $m>0$,$n>0$.

∴ 点 $A(m,n)$ 在第一象限.

解:A

【学以致用·触类旁通】

变式训练

ab>0
a+b<0

5. 若式子 $\sqrt{-a-b}+\dfrac{1}{\sqrt{ab}}$ 有意义,则点 $P(a,b)$ 在(D).
ab≤0
-a-b≥0
ab>0

A. 第一象限　　B. 第二象限

C. 第三象限　　D. 第四象限

题型二:二次根式有意义的条件的应用

例2 若x满足$\sqrt[3]{x-2}=(1-\sqrt{3-x})^2$,则$x$的整数解的个数有(　　)个.

A. 0　　B. 1　　C. 2　　D. 3

分析:本题直接求解难度较大,最好的办法是利用定义. $\because \sqrt[3]{x-2}=(1-\sqrt{3-x})^2$,而$(1-\sqrt{3-x})^2\geqslant 0$,$\therefore \sqrt[3]{x-2}\geqslant 0$,即$x-2\geqslant 0$. 由二次根式概念得:$3-x\geqslant 0$. 综合可得$\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\x-2\geqslant 0,\end{cases}$解得$2\leqslant x\leqslant 3$. 因为要求的是整数解,所以$x$只能取2、3. 当$x=2$时,左边$=\sqrt[3]{2-2}=0$,右边$=(1-\sqrt{3-2})^2=0$,左边=右边,即$x=2$是原方程的解;同理$x=3$也是原方程的解.

解:C

题型三:利用二次根式的非负性求值

例3 已知$y=2\sqrt{2x-1}+3\sqrt{1-2x}+\frac{1}{3}$,求$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}$的值.

分析:要求代数式的值必须先求x、y的值. 由于已知条件只有一个等式且没有给出任何字母的数值,因此解本题的关键是运用二次根式的概念,并结合运用"由$a\geqslant b$、$a\leqslant b$得到$a=b$"的结论,根据字母的取值范围来确定它的数值.

解:根据题意得$\begin{cases}2x-1\geqslant 0,\\1-2x\geqslant 0,\end{cases}$即$\begin{cases}x\geqslant \frac{1}{2},\\x\leqslant \frac{1}{2}.\end{cases}$

$\therefore x=\frac{1}{2}$.

则$y=2\sqrt{2\times\frac{1}{2}-1}+3\sqrt{1-2\times\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$.

$\therefore \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=2+3=5$.

例4 已知$\sqrt{2a+1}+|3a-2b|+(a+b+c)^2=0$,求$2a+b-c$的值.

分析:分别由二次根式、绝对值及平方数的意义可得:$\sqrt{2a+1}\geqslant 0$,$|3a-2b|\geqslant 0$,$(a+b+c)^2\geqslant 0$. 又知它们的和为0,则可得:$2a+1=0$,$3a-2b=0$,$a+b+c=0$.

变式训练

6. 使式子$\sqrt{-(x-5)^2}$有意义的未知数x有(l).

A. 0个　　B. 1个

C. 2个　　D. 无数个

7. 等式$\sqrt{a^2-4}=\sqrt{a+2}\cdot\sqrt{a-2}$成立的条件是(　　).

A. $a\geqslant 2$或$a\leqslant -2$

B. $a\geqslant 2$

C. $a\geqslant -2$

D. $-2\leqslant a<2$

变式训练

8. (湖南怀化)若$|a-2|+\sqrt{b-3}+(c-4)^2=0$,则$a-b+c=$______.

9. (竞赛题)已知实数a满足$|2\,006-a|+(\sqrt{a-2\,007})^2=a$,那么$a-2\,006$的值是(　　).

A. 2 005　　B. 2 006

C. 2 007　　D. 2 008

由此可分别求出 a、b、c 的值，进而求出 $2a+b-c$ 的值.

解：∵ $\sqrt{2a+1}\geqslant 0$，$|3a-2b|\geqslant 0$，$(a+b+c)^2\geqslant 0$，

且 $\sqrt{2a+1}+|3a-2b|+(a+b+c)^2=0$，

$$\therefore \begin{cases}2a+1=0,\\3a-2b=0,\\a+b+c=0,\end{cases}\text{解得}\begin{cases}a=-\dfrac{1}{2},\\b=-\dfrac{3}{4},\\c=\dfrac{5}{4}.\end{cases}$$

$$\therefore 2a+b-c=2\times\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{5}{4}$$
$$=-1-2=-3.$$

点拨：对于非负数的考查，需掌握三类非负数：(1) $a^2\geqslant 0$；(2) $\sqrt{a}\geqslant 0\,(a\geqslant 0)$；(3) $|a|\geqslant 0$. 当几个非负数之和为 0 时，这几个非负数均同时为 0.

题型四：二次根式的实际应用

例 5 由于全球气候变暖，导致一些冰川融化消失. 在冰川消失 12 年后，一种低等植物苔藓就开始在岩石上丛生. 每一丛苔藓都会近似长成圆形，每丛苔藓的直径 d（单位：cm）与冰川消失之后经过的时间 t（单位：年）近似地满足关系式 $d=7\sqrt{t-12}\,(t\geqslant 12)$.

(1) 计算冰川消失 16 年后，一丛苔藓的直径；

(2) 如果测得一丛苔藓的直径是 35 cm，那么冰川大约是在多少年前消失的？

分析：在理解题意的基础上，将已知数据分别代入关系式，即可求出 d 或 t.

解：(1) 当 $t=16$ 时，

$d=7\sqrt{t-12}=7\times\sqrt{16-12}=7\times 2=14$ (cm).

∴ 冰川消失 16 年后，一丛苔藓的直径是 14 cm.

(2) 当 $d=35$ 时，有 $35=7\sqrt{t-12}$，即 $\sqrt{t-12}=5$.

∵ 25 的算术平方根是 5，∴ $t-12=25$，∴ $t=37$.

∴ 如果一丛苔藓的直径是 35 cm，那么冰川大约是在 37 年前消失的.

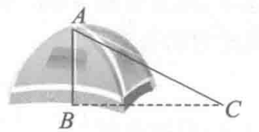
点拨：二次根式在日常生活、天文、地理、物理等领域都有着广泛地应用. 本题实际上是二次根式的求值问题.

10. 若 m 满足等式

$\sqrt{3x+5y-2-m}+\sqrt{2x+3y-m}=\sqrt{x-199+y}\cdot\sqrt{199-x-y}$，试确定 m 的值.

变式训练

11. 如图所示，从帐篷支撑竿 AB 的顶部 A 向外面拉一根绳子 AC 固定帐篷. 若绳子的长度为 5.5 m，地面固定点 C 到帐篷支撑竿底部 B 的距离是 4.5 m，则帐篷支撑竿的高是多少？



课后巩固拓展探究

小节回顾

科学归纳 一目了然

[要点概览]

二次根式
- 定义：形如$\sqrt{a}\,(a\geqslant 0)$的代数式叫做二次根式
- 意义：表示非负数的算术平方根
- 有意义的条件：被开放数大雨或等于零
- 求二次根式的值

[易错警示]

易错点一：不能正确辨析一个式子是否为二次根式

例 1 $\sqrt{4}$是二次根式吗？为什么？

错解：$\sqrt{4}$不是二次根式，因为$\sqrt{4}=2$.

剖析：判定一个式子是否为二次根式，关键看两点：一是根号是否为二次根号；二是被开方数是否为非负数. 此题中的$\sqrt{4}$很显然符合这两个特征.

正解：$\sqrt{4}$是二次根式，因为根指数为 2 且被开方数 4 是正数，符合二次根式的定义.

易错点二：求字母的取值范围时考虑不全面

例 2 当 x 为何值时，代数式$\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{4-2x}}$有意义?

错解：由题意得$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\4-2x\geqslant 0,\end{cases}$

解得$1\leqslant x\leqslant 2$.

剖析：错解只注意了二次根式有意义的条件，而忽略了分式有意义的条件：分母不为 0，从而导致了错误.

正解：由题意得$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\4-2x>0,\end{cases}$解得$1\leqslant x<2$,

即当$1\leqslant x<2$时，代数式$\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{4-2x}}$有意义.

教材习题详解

释疑解惑 规范解答

教材第 5 页“课内练习”

1. 解：(1) 由 $x-1\geqslant 0$，得 $x\geqslant 1$.

(2) x 的取值范围是任意实数.

(3) 由$\dfrac{1}{x}\geqslant 0$ 且 $x\neq 0$，得 $x>0$.

(4) 由 $-3x\geqslant 0$，得 $x\leqslant 0$.

2. 解：(1) 船离出发地的距离为

$\sqrt{(25\times 2)^2+(25t)^2}=\sqrt{625t^2+2\,500}$(km).

(2) 当 $t=3$ 时，$\sqrt{625t^2+2\,500}=25\sqrt{13}\approx 90.14$(km). 即此时船离出发地约 90.14 km.

教材第 5 ~ 6 页“作业题”

1. 解：(1) $a\geqslant 0$.

(2) 由$\dfrac{1}{2a}\geqslant 0$ 且 $a\neq 0$，得 $a>0$.

(3) 由 $1-3a\geqslant 0$，得 $a\leqslant\dfrac{1}{3}$.

2. 解：将 $x=-2$ 代入二次根式，得

$\sqrt{2+\dfrac{1}{2}x}=\sqrt{2+\dfrac{1}{2}\times(-2)}=1$.

3. 解：在 Rt$\triangle ADC$ 中，

$AD=2.43$ m，$CD=\dfrac{1}{2}CB=0.5a$ m，

$\therefore AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{2.43^2+(0.5a)^2}$

$=\sqrt{5.904\,9+0.25a^2}$.

当 $a=2$ 时，$AC=\sqrt{5.904\,9+0.25\times 2^2}\approx 2.63$(m). 即当 $a=2$ 时，拉索 AC 长约 2.63 m.

4. 解:(1)将 $x=0$ 代入二次根式,得

$\sqrt{4-2x}=\sqrt{4-2\times0}=\sqrt{4}=2.$

(2)将 $x=1$ 代入二次根式,得

$\sqrt{4-2x}=\sqrt{4-2\times1}=\sqrt{2}.$

(3)将 $x=-1$ 代入二次根式,得

$\sqrt{4-2x}=\sqrt{4-2\times(-1)}=\sqrt{6}.$

5. 解:由题意,知 $\sqrt{x^2}=3$, $\therefore x^2=9$, $\therefore x=\pm3$.

6. 解:(1) $\because h=5t^2$, $\therefore t^2=\frac{h}{5}$, $\therefore t=\pm\sqrt{\frac{h}{5}}$.

$\because t\geqslant0$, $\therefore t=\sqrt{\frac{h}{5}}$.

(2)当 $h=54.5$ 时, $t=\sqrt{\frac{54.5}{5}}\approx3.3$(s).

即落到地面大约需 3.3 s.

作业设计

难易有度　注重培优

夯实基础题 ★

1. 有下列式子: $\sqrt{\frac{3}{4}}$, $\sqrt{-6}$, $\sqrt{x^2+2}$, $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt{1-x}(x>1)$, $\sqrt{4y^2+4y+2}$. 其中是二次根式的有(　　).

A. 2 个　　B. 3 个　　C. 4 个　　D. 5 个

2. 若 $0<m<1$,则下列各式中是二次根式的是(　　).

A. $\sqrt{m-1}$　　B. $\sqrt{m-2}$

C. $\sqrt{-m-1}$　　D. $\sqrt{\frac{1-m}{m^2}}$

3. 若 $\sqrt{2a-3}$ 是二次根式,则字母 a 的取值范围是(　　).

A. $a\neq\frac{3}{2}$　　B. $a\leqslant\frac{3}{2}$

C. $a>\frac{3}{2}$　　D. $a\geqslant\frac{3}{2}$

4. 若二次根式 $\sqrt{2x+1}$ 的值是 5,则 x 的值为(　　).

A. 5　　B. 25

C. 12　　D. 10

5. (浙江杭州)已知点 $P(x,y)$ 在函数 $y=\frac{1}{x^2}+\sqrt{-x}$ 的图象上,那么点 P 应在平面直角坐标系中的第______象限.

6. (四川竞赛)如果 $y=\sqrt{2x-3}+\sqrt{3-2x}+2$,则 $2x+y=$______.

提升能力题 ★★

7. 已知 $\sqrt{a^2}=1$, $|b|=2$,则 $\sqrt{(a+b)^2}$ 的值是______.

8. 代数式 $6-\sqrt{x+4}$ 的值(　　).

A. 当 $x=0$ 时最大

B. 当 $x=0$ 时最小

C. 当 $x=-4$ 时最大

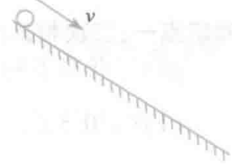
D. 当 $x=-4$ 时最小

9. 已知函数 $y=\sqrt{2-3x}-\frac{1}{x+1}$,那么自变量 x 的取值范围是______.

10. 若式子 $\sqrt{x-y+2}+(2x-3y+9)^2=0$,求 x^2-y^2 的值.

11. 已知$\triangle ABC$的边长分别为a、b、c(a、b、c为整数),且满足$\sqrt{a-1}+b^2-4b+4=0$,求$\triangle ABC$的周长.

12. 如图,一个小球从平直的斜面上从上到下沿直线自由滚动(假设斜面足够长),小球的速度v(cm/s)与滚动时间t(s)满足关系式$v=\frac{1}{2}t^2$. 问t为多少秒时,小球的速度v为8 cm/s?



综合发展题 ★★★

13. 观察下列各式:$\sqrt{1+\frac{1}{3}}=2\sqrt{\frac{1}{3}}$,$\sqrt{2+\frac{1}{4}}=3\sqrt{\frac{1}{4}}$,$\sqrt{3+\frac{1}{5}}=4\sqrt{\frac{1}{5}}$,…,请你将发现的规律用含正整数$n$的等式表示出来:________________.

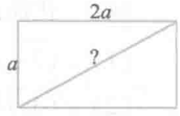
1.2 二次根式的性质

课前自主学习引导

情景导入

激发兴趣 温故知新

有一个长方形的场地,它的长是$2a$ m,宽是a m,由勾股定理可计算得出这个场地的对角线长为$\sqrt{(2a)^2+a^2}=\sqrt{5a^2}$(m). 那么,二次根式$\sqrt{5a^2}$还能化简吗?如果能,它又该怎样化简呢?这就是本节需要探究的问题.



呈现目标

明确目标 有的放矢

1. 掌握二次根式的性质,并能用其化简二次根式.
2. 理解最简二次根式的概念,并能辨析一个式子是否为最简二次根式.
3. 会逆向应用二次根式的性质,培养逆向思维能力.

课堂精讲精练强化

典例剖析　　立足教材 讲透练精

【名师点拨·夯实双基】

知识点一:二次根式的性质1:$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$

例1 化简下列各式:

(1)$(\sqrt{0.5})^2$;　(2)$\left(\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)^2$;

(3)$(\sqrt{13})^2$;　(4)$-(\sqrt{2})^2$;

(5)$\left(\frac{\sqrt{2}}{7}\right)^2$;　(6)$\left(-\sqrt{2\frac{1}{5}}\right)^2$.

分析:第(1)、(2)、(3)题可直接利用二次根式的性质$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$进行化简;第(4)、(6)题在利用公式之前要注意符号;第(5)题要先利用分式的乘方的性质:$\left(\frac{a}{b}\right)^2=\frac{a^2}{b^2}$,再利用上述公式计算.

解:(1)$(\sqrt{0.5})^2=0.5$.　(2)$\left(\sqrt{1\frac{1}{4}}\right)^2=1\frac{1}{4}$.

(3)$(\sqrt{13})^2=13$.　(4)$-(\sqrt{2})^2=-2$.

(5)$\left(\frac{\sqrt{2}}{7}\right)^2=\frac{(\sqrt{2})^2}{7^2}=\frac{2}{49}$.

(6)$\left(-\sqrt{2\frac{1}{5}}\right)^2=(-1)^2\cdot\left(\sqrt{2\frac{1}{5}}\right)^2=2\frac{1}{5}$.

点拨:直接运用二次根式的性质$(\sqrt{a})^2=a$计算时,一定要注意性质成立的条件$a\geqslant0$.

知识点二:二次根式的性质2:$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant0)\\-a(a<0)\end{cases}$

例2 化简:

(1)$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}$;

(2)$\sqrt{(3.14-\pi)^2}$;

(3)$\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}(1\leqslant x\leqslant3)$.

分析:先根据$\sqrt{a^2}=|a|$去掉根号,再判断a的取值范围,去掉绝对值符号得到最终结果.

解:(1)$\sqrt{(2-\sqrt{5})^2}=|2-\sqrt{5}|=\sqrt{5}-2$.

【深度解析·举一反三】

知识解读

一般地,二次根式有下面的性质:

$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$,

即一个非负数的算术平方根的平方等于这个非负数.

变式训练

1. 填空:

(1)$\left(\sqrt{\frac{7}{10}}\right)^2=$ 7/10;

(2)$(2\sqrt{6})^2=$ 24;

(3)$(-2\sqrt{3})^2=$ 6;

(4)$-(-2\sqrt{2})^2=$ -8.

知识解读

1. 一般地,二次根式有下面的性质:

$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant0);\\-a(a<0).\end{cases}$

即一个数的平方的算术平方根等于这个数的绝对值.

2. $\sqrt{a^2}$与$(\sqrt{a})^2$的区别与联系:

区别:(1)取值范围不同:$\sqrt{a^2}$中a为全体实数,$(\sqrt{a})^2$中$a\geqslant0$;

(2)运算顺序不同:$\sqrt{a^2}$是先平方

(2) $\sqrt{(3.14-\pi)^2}=|3.14-\pi|=\pi-3.14.$

(3) $\sqrt{x^2-2x+1}+\sqrt{x^2-6x+9}$

$=\sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}.$

$\because 1\leqslant x\leqslant 3,$

$\therefore x-1\geqslant 0, x-3\leqslant 0.$

$\therefore \sqrt{(x-1)^2}+\sqrt{(x-3)^2}$

$=|x-1|+|x-3|=x-1+3-x=2.$

点拨: 二次根式$\sqrt{a^2}$的化简一般有两个步骤:①去掉根号及被开方数的指数,写成绝对值的形式,即$\sqrt{a^2}=|a|$;②去掉绝对值符号,如果已知a的符号,则根据绝对值的意义化简,如果不知道a的符号,就应分$a\geqslant 0$、$a<0$两种情况分别化简,或将a留在绝对值符号内.

拓展 (1)双重非负性($\sqrt{a}\geqslant 0, a\geqslant 0$)应用较多,如:若$\sqrt{a}+\sqrt{b}=0$,则$a=0,b=0$;若$\sqrt{a}+|b|=0$,则$a=0,b=0$;若$\sqrt{a}+b^2=0$,则$a=0,b=0$.

(2) $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$既可以正向应用,也可以逆向应用,如:$(\sqrt{3})^2=3$,反过来$3=(\sqrt{3})^2$,这在实数范围内分解因式或有关化简求值中应用较多.

知识点三:二次根式的性质3: $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0, b\geqslant 0)$

例3 化简:

(1) $\sqrt{75}$;　　(2) $\sqrt{(-14)\times(-112)}$;

(3) $\sqrt{a^3b^5}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$;　(4) $\sqrt{27a^2b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$.

分析: 可根据$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$和性质$\sqrt{a^2}=|a|$,将二次根式的被开方数(式)中能开得尽方的因数或因式移至根号外.

解: (1) $\sqrt{75}=\sqrt{25\times 3}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}.$

(2) $\sqrt{(-14)\times(-112)}=\sqrt{14\times 112}$

$=\sqrt{2\times 7^2\times 4^2}=\sqrt{2}\times\sqrt{7^2}\times\sqrt{4^2}$

$=7\times 4\times\sqrt{2}=28\sqrt{2}.$

(3) $\sqrt{a^3b^5}=\sqrt{a^2b^4\cdot ab}$

$=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b^4}\cdot\sqrt{ab}=ab^2\sqrt{ab}.$

后开方,$(\sqrt{a})^2$是先开方后平方;

(3)运算结果不同:

$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a(a\geqslant 0),\\-a(a<0).\end{cases}$

$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0).$

联系:$\sqrt{a^2}$与$(\sqrt{a})^2$均为非负数,且当$a\geqslant 0$时,$\sqrt{a^2}=(\sqrt{a})^2$.

变式训练

2. 计算或化简:

(1) $(-3\sqrt{2})^2$;

(2) $\sqrt{(-7)^2}$;

(3) $(-\sqrt{5})^2-\sqrt{(-5)^2}$;

(4) $(\sqrt{1-x})^2+\sqrt{(x-2)^2}$.

知识解读

一般地,二次根式还有下面的性质:

$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}(a\geqslant 0,b\geqslant 0)$,

即两个非负数积的算术平方根等于这两个非负数算术平方根的积.

(1)公式成立的前提条件是$a\geqslant 0$,$b\geqslant 0$;

(2)公式中的a、b既可以是数,也可以是字母或代数式,但都必须表示非负数;

(3)此性质可以推广为$\sqrt{abcd}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d}(a\geqslant 0,b\geqslant 0,c\geqslant 0,d\geqslant 0)$;

(4)该公式的主要作用是应用于二次根式的化简,即将被开方数中能开得尽方的因数或因式移至根号外.

(4) $\sqrt{27a^2b}=\sqrt{9a^2\cdot 3b}$

$=\sqrt{9a^2}\cdot\sqrt{3b}$

$=3a\sqrt{3b}.$

点拨:二次根式化简的方法是分解质因式,把能写成平方的式子写成平方的形式,开方后移至根号外.要特别注意式中字母的取值范围.

例4 化简:

(1) $\sqrt{8y^2+4y^4}(y>0)$;

(2) $\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}(ab>0)$;

(3) $\sqrt{a^3+6a^2b+9ab^2}(a>0,b>0)$;

(4) $\sqrt{4y^5-4xy^4+x^2y^3}(y>0,y>\frac{1}{2}x)$.

分析:对于被开方数是多项式的二次根式,应先把多项式分解因式,然后按照被开方数是单项式的方法进行化简.

解:(1) $\sqrt{8y^2+4y^4}=\sqrt{4y^2(2+y^2)}$

$=\sqrt{4y^2}\cdot\sqrt{2+y^2}$

$=2y\sqrt{2+y^2}.$

(2) $\sqrt{(a^2+b^2)^2-(a^2-b^2)^2}$

$=\sqrt{(a^2+b^2+a^2-b^2)(a^2+b^2-a^2+b^2)}$

$=\sqrt{2a^2\cdot 2b^2}=2ab.$

(3) $\sqrt{a^3+6a^2b+9ab^2}=\sqrt{a(a^2+6ab+9b^2)}$

$=\sqrt{a(a+3b)^2}$

$=(a+3b)\sqrt{a}.$

(4) $\sqrt{4y^5-4xy^4+x^2y^3}=\sqrt{y^3(4y^2-4xy+x^2)}$

$=\sqrt{y^2\cdot y(2y-x)^2}$

$=y(2y-x)\sqrt{y}.$

知识点四:二次根式的性质4:$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$

例5 式子$\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-2}}$成立的条件是(　　).

A. $x\geqslant -1$　　B. $x>2$

C. $x<2$　　D. $x\geqslant -1$且$x\neq 2$

分析:由题意可知,二次根号下面的数都应是非负

变式训练

3. $\sqrt{(x-2)(x+3)}=\sqrt{x-2}\cdot\sqrt{x+3}$成立的条件是(　　).

A. $x\leqslant -3$　　B. $x\geqslant 2$

C. $-3\leqslant x\leqslant 2$　　D. $x\geqslant 2$或$x\leqslant -3$

4. 计算或化简:

(1) $-\sqrt{21\times 63}$;

(2) $\sqrt{(-50)\times(-8)}$;

(3) $\sqrt{96a^3b^6}(a>0,b>0)$;

(4) $-3\sqrt{4m^4+4m^2n^2}(m>0)$.

知识解读

一般地,二次根式还有下面的性质:

$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}(a\geqslant 0,b>0)$,

即商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根.

(1) a必须是非负数,b必须是正数