

161 Differential Equations of |6| 道德因工科大学生

必做的 *Engineering Students Will do
the Exercises in Germany*

微分方程习题

© 冯宝琦 编译



尝得春秋，披览不倦。凡大家之手迹，古典之珍品，
莫不采摭其华实，探涉其源流，钩纂枢要而编节之，改岁钥而成书。

香港凤凰卫视评论员梁文道先生说：我们常把经典和畅销书对立起来，
觉得后者虽能红极一时，终究是过眼云烟；而前者面世初时光华内敛，却能长明不息。
写书出书，当以铸经典为职志。

在罗马的贵族家庭会聘请启蒙师傅来带孩子们背诵、阅读和理解经典。
教师们的任务不是兜售自己的知识，而是忠实地教会孩子们读通经典。



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

161 Differential Equations

161 道德国工科大学生

必做的 *Engineering Students Will do
the Exercises in Germany*

微分方程习题

© 冯宝琦 编译



尝得春秋，披览不倦。凡大家之手迹，古典之珍品，
莫不采摭其华实，探涉其源流，钩纂枢要而编节之，改岁钥而成书。

香港凤凰卫视评论员梁文道先生说：我们常把经典和畅销书对立起来，
觉得后者虽能红极一时，终究是过眼云烟；而前者面世初时光华内敛，却能长明不息。
写书出书，当以铸经典为职志。

在罗马的贵族家庭会聘请启蒙师傅来带孩子们背诵、阅读和理解经典。
教师们的任务不是兜售自己的知识，而是忠实地教会孩子们读通经典。



哈尔滨工业大学出版社
HARBIN INSTITUTE OF TECHNOLOGY PRESS

内 容 简 介

本书收集了德国工科大学生必做的 161 道微分方程习题,同时介绍了一些拓展的题目。这些优秀的题目几乎涵盖了微分方程所有重要的知识。本书系统清晰,叙述严谨,可激发读者对微分方程的学习兴趣,提高数学水平。

本书适合大学学生、教师及高等数学爱好者参考使用。

图书在版编目(CIP)数据

161 道德国工科大学生必做的微分方程习题/冯宝琦
编译. —哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社,2015.5

ISBN 978 - 7 - 5603 - 5337 - 1

I. 1… II. ①冯… III. ①微分方程 - 高等学校 -
习题集 IV. ①O175 - 44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 087200 号

策划编辑 刘培杰 张永芹

责任编辑 张永芹 刘春雷

封面设计 孙茵艾

出版发行 哈尔滨工业大学出版社

社 址 哈尔滨市南岗区复华四道街 10 号 邮编 150006

传 真 0451 - 86414749

网 址 <http://hitpress.hit.edu.cn>

印 刷 哈尔滨市工大节能印刷厂

开 本 787mm × 960mm 1/16 印张 7.75 字数 135 千字

版 次 2015 年 5 月第 1 版 2015 年 5 月第 1 次印刷

书 号 ISBN 978 - 7 - 5603 - 5337 - 1

定 价 28.00 元

(如因印装质量问题影响阅读,我社负责调换)

目 录

1	微分方程	(1)
	能导出简单微分方程的一些物理及工程上的重要问题	(1)
	一阶微分方程及初等积分方法	(7)
	解微分方程的常用方法	(20)
	复杂微分方程的解法	(32)
	其他的积分方法和一些偏微分方程	(46)
2	若干进一步的问题	(57)
	对一个奇异微分方程的研究	(57)
	研究微分方程 $y'' + y = 1/x$ 及其对一个定积分的计算	(60)
	线性微分方程的解的一个应用	(64)
	一个线性微分方程组的阶的约化	(66)
	一个具有给定边界条件的二阶线性微分方程	(69)
	拓展的一些问题	(71)
	编辑手记	(100)

微分方程

能导出简单微分方程的一些物理及工程上的重要问题

① 建立通过两个定点 $P_1 = (q, 0)$ 及 $P_2 = (0, q)$ 的所有 ∞^1 个圆的微分方程.

解 因为这些圆的中心在直线 $y = x$ 上, 所以圆族的方程是

$$(x-a)^2 + (y-a)^2 = (q-a)^2 + a^2 \quad (1)$$

其中 (a, a) 是圆心的坐标. 从式(1)把参数 a 解出, 得到

$$a = \frac{x^2 + y^2 - q^2}{2(x+y-q)} \quad (2)$$

把式(2)对 x 微分, 就得到所求的微分方程

$$y'((y-q)^2 + x(2y-x)) + (x-q)^2 + y(2x-y) = 0$$

② 建立中心在直线 $y = x$ 上的所有 ∞^2 个圆的微分方程.

解 如果 (a, a) 是圆心, 而 r 是半径, 那么把函数 $(x-a)^2 + (y-a)^2 - r^2 = 0$ 对 x 微分两次, 就得到

$$x-a + (y-a)y' = 0 \quad (1)$$

$$1 + (y-a)y'' + y'^2 = 0 \quad (2)$$

由式(1)与(2)消去 a , 就得到所求的微分方程

$$y''(x-y) - 1 - y' - y'^2 - y'^3 = 0$$

③ 建立切于两条直线 $y = \pm \tan \alpha (x-c)$ 且中心在 x 轴上的所有 ∞^1 个圆的微分方程.

解 由图 1, 得到

$$r = (c-a) \sin \alpha \quad (c > a) \quad (1)$$

$$(x-a)^2 + y^2 = (c-a)^2 \sin^2 \alpha \quad (2)$$

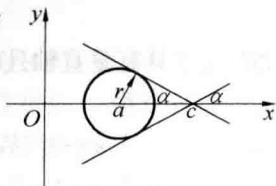


图 1

对式(2)微分,得

$$yy' + x - a = 0 \quad (3)$$

利用式(3),由式(2)消去 a ,就得到

$$y'^2 y^2 \cos^2 \alpha + 2yy'(c-x) \sin^2 \alpha + y^2 - \sin^2 \alpha (c-x)^2 = 0$$

① 建立具有相同半径 r 且中心在给定曲线 $f(x, y) = 0$ 上的所有 ∞^1 个圆的微分方程.

解 由圆族的方程(1) $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 微分有 $(x-a) + (y-b)y' = 0$, 再利用式(1)有

$$(y-b)^2(1+y'^2) = r^2, b = y \pm \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}, a = x \mp \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}y'$$

因为 $f(a, b) = 0$, 故所求微分方程为

$$f\left(x \pm \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}y', y \mp \frac{r}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 0$$

⑤ 建立所有切于 x 轴的 ∞^2 个圆的微分方程.

解 圆族的方程是: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = b^2$. 微分两次得到(1) $(x-a) + (y-b)y' = 0$, (2) $1 + y'^2 + (y-b)y'' = 0$. 由此 $y-b = -\frac{(1+y'^2)}{y''}$, $x-a = \frac{(1-y'^2)y'}{y''}$. 利用原方程,就有

$$y^2 y''^2 + 2yy''(1+y'^2) - (1+y'^2)^2 y'^2 = 0$$

⑥ 建立其顶点皆位于直线 $y=x$ 上且具有垂直轴的所有 ∞^2 个抛物线的微分方程.

解 抛物线族的方程是: $y-a = b(x-a)^2$. 微分后得到 $y' = 2b(x-a)$, $y'' = 2b$. 由这三个方程消去 a 与 b ,就得到

$$2y''(y-x) - y'^2 + 2y' = 0$$

⑦ 建立具有垂直轴且(1)过点 $(0,0)$ 及 $(p,0)$, 或(2)过点 $(p,0)$ 的二抛物线族的微分方程.

解 (1) (∞^1) 抛物线族的方程是: $y = ax(x-p)$; $y' = a(2x-p)$. 结果是: $y'x(x-p) - y(2x-p) = 0$;

(2) (∞^2) 抛物线族的方程是

$$y = (x-p)(ax+b); y' = 2ax + b - ap, y'' = 2a$$

结果是
$$y''(x-p)^2 - 2y'(x-p) + 2y = 0$$

⑧ 建立渐近线皆平行于坐标轴的所有 ∞^3 个双曲线的微分方程.

解 双曲线族的方程是: $y = \frac{\alpha + \beta x}{\gamma + \delta x} (\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0)$. 把函数 $(\gamma + \delta x)y - (\alpha + \beta x) = 0$ 微分三次, 就得到 (1) $(\gamma + \delta x)y' + \delta y - \beta = 0$, (2) $(\gamma + \delta x)y'' + 2\delta y' = 0$ 及 (3) $(\gamma + \delta x)y''' + 3\delta y'' = 0$. 把式 (2) 与 (3) 看做是未知数 $\gamma + \delta x$ 与 δ 的齐次线性方程组, 那么系数行列式必须等于零

$$\begin{vmatrix} y'' & 2y' \\ y''' & 3y'' \end{vmatrix} = 0$$

结果是: $2y'y''' - 3y''^2 = 0$.

⑨ 建立所有 ∞^2 个双曲线 $y = \frac{x - x_0}{x - x_1}$ 的微分方程.

解 对 $x(y-1) = x_1y - x_0$ 微分, 解出 x_1 , 再微分一次, 结果是

$$y''(y-1) - 2y'^2 = 0$$

⑩ 建立其中心位于原点而顶点皆在坐标轴上的所有 ∞^2 个椭圆的微分方程.

解 这族曲线的方程是: $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$. 微分两次, 我们得到 $b^2x + a^2yy' = 0$, $b^2 + a^2(y'^2 + yy'') = 0$. 结果是: $xyy'' + xy'^2 - yy' = 0$.

⑪ 建立 ∞^1 个共焦点椭圆与双曲线 $\frac{x^2}{a^2+c} + \frac{y^2}{b^2+c} = 1$ 的微分方程, 其中 c 是参数.

解
$$y'^2xy + y'(b^2 - a^2 + x^2 - y^2) - xy = 0$$

⑫ 所有抛物线满足于怎样的微分方程?

解 把所有抛物线的方程 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 (AC = B^2)$ 微分四次, 并暂时令 $y' = a, y'' = b, y''' = c, y^{(4)} = d$. 那么就得到

$$Ax + B(y + ax) + Cay + D + aE = 0 \quad (1)$$

$$B(2a + bx) + C(a^2 + by) + bE = -A \quad (2)$$

$$B(3b+cx) + C(3ab+cy) + cE = 0 \quad (3)$$

$$B(4c+dx) + C(3b^2+4ac+dy) + dE = 0 \quad (4)$$

先从方程(2), (3)与(4)计算 B 与 C , 因为系数行列式为

$$D_0 = \begin{vmatrix} 2a+bx & a^2+by & b \\ 3b+cx & 3ab+cy & c \\ 4c+dx & 3b^2+4ac+dy & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2a & a^2 & b \\ 3b & 3ab & c \\ 4c & 3b^2+4ac & d \end{vmatrix} \\ = a^2(3bd-4c^2) + 3b^2(3b^2-2ac)$$

如果再令

$$D_1 = \begin{vmatrix} -A & a^2+by & b \\ 0 & 3ab+cy & c \\ 0 & 3b^2+4ac+dy & d \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} 2a & -A & b \\ 3b & 0 & c \\ 4c & 0 & d \end{vmatrix}$$

就得到

$$B = \frac{D_1}{D_0}, C = \frac{D_2}{D_0}$$

关系式 $AC = B^2$ 现在可以写成形式 $(5) AD_0 D_2 = D_1^2$, 再把 D_0, D_1 与 D_2 代入等式(5), 即得

$$A[a^2(3bd-4c^2) + 3b^2(3b^2-2ac)]A(3bd-4c^2) = A^2[3b^2c - a(3bd-4c^2)]^2$$

或

$$3bd = 5c^2$$

结果是

$$3y''y^{(4)} = 5(y''')^2 \text{ 或 } (y''^{-\frac{2}{3}})''' = 0$$

B 试建立所有 ∞^5 个圆锥曲线的微分方程.

解 把方程 $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0$ 微分五次. 于是利用上题中简写符号, 并令 $y^{(5)} = e$, 得到下列关系式

$$(3b+cx)B + (3ab+cy)C + cE = 0$$

$$(4c+dx)B + (3b^2+4ac+dy)C + dE = 0$$

$$(5d+ex)B + (10bc+5ad+ey)C + eE = 0$$

因为三个方程的系数行列式必须等于零, 就得到

$$\begin{vmatrix} 3b+cx & 3ab+cy & c \\ 4c+dx & 3b^2+4ac+dy & d \\ 5d+ex & 10bc+5ad+ey & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3b & 3ab & c \\ 4c & 3b^2+4ac & d \\ 5d & 10bc+5ad & e \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3b & 0 & c \\ 4c & 3b^2 & d \\ 5d & 10bc & e \end{vmatrix} \\ = b(9b^2e + 40c^3 - 45bcd) = 0$$

结果是

$$9y''^2y^{(5)} + 40y'''^3 = 45y''y'''y^{(4)} \text{ 或 } (y''^{-\frac{2}{3}})''' = 0$$

11 以 A 与 β 为参数的 ∞^2 个阻尼振动 $y = Ae^{-\lambda t} \sin(\alpha t + \beta)$ 满足什么微分方程?

解 微分两次,得

$$y' = Ae^{-\lambda t} (-\lambda \sin(\alpha t + \beta) + \alpha \cos(\alpha t + \beta))$$

$$y'' = Ae^{-\lambda t} (\lambda^2 \sin(\alpha t + \beta) - 2\alpha\lambda \cos(\alpha t + \beta) - \alpha^2 \sin(\alpha t + \beta))$$

消去 A 与 β , 就得到

$$y'' + 2\lambda y' + (\lambda^2 + \alpha^2)y = 0$$

15 试建立下列两个 (∞^2) 函数族的微分方程.

(1) $y = \ln \sin(C_1 x + C_2)$; (b) $y = \ln \sinh(C_1 x + C_2)$.

解 (1) 把 $C_1 x + C_2 = \arcsin e^y$ 微分两次, 再消去 C_1 与 C_2 , 结果是

$$y''(e^{2y} - 1) = y'^2$$

(2) 把 $C_1 x + C_2 = \operatorname{arsinh}(e^y)$ 微分两次. 消去 C_1 与 C_2 之后就得到

$$y''(e^{2y} + 1) = -y'^2$$

16 一个点以等角速度 ω 沿对数螺线 $r = e^{a\varphi}$ 运动. 试建立这个点在通过极点的任何一直线上的投影的运动的微分方程.

解 由图 2 得到

$$s = r \cos(\alpha - \varphi) = e^{a\varphi} \cos(\alpha - \varphi)$$

作 $\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{d\varphi} \cdot \frac{d\varphi}{dt} = \omega [as + e^{a\varphi} \sin(\alpha - \varphi)]$

及 $\frac{d^2s}{dt^2} = a\omega \frac{ds}{dt} + a\omega^2 e^{a\varphi} \sin(\alpha - \varphi) - e^{a\varphi} \omega^2 \cos(\alpha - \varphi)$

于是有

$$\frac{d^2s}{dt^2} - 2a\omega \frac{ds}{dt} + \omega^2 s(1 + a^2) = 0$$

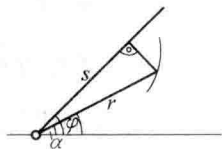


图 2

17 设 $\alpha(x), \beta(x), \gamma(x), \delta(x)$ 是给定的可微函数, 且设 $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. 试求微分

方程, 使它的一般解 $y = \frac{\alpha(x) + C\beta(x)}{\gamma(x) + C\delta(x)}$ 是任意常数 C 的分式线性函数?

解 先解出 C 并对 x 微分, 就得到

$$C = \frac{\alpha(x) - \gamma\gamma(x)}{\gamma\delta(x) - \beta(x)}$$

及 $\frac{1}{(\gamma\delta - \beta)^2} [(\gamma\delta - \beta)(\alpha' - \gamma'\gamma - \gamma\gamma') - (\alpha - \gamma\gamma)(\gamma'\delta + \gamma\delta' - \beta')] = 0$

结果是

$(\alpha\delta - \beta\gamma)y' = (\gamma\delta' - \delta\gamma')y^2 + [\beta\gamma' - \gamma\beta' - (\alpha\delta' - \delta\alpha')]y + \alpha\beta' - \beta\alpha'$
 一般来说,右端是关于 y 的二次式;当且仅当 $\gamma\delta' = \delta\gamma'$, 即 $\gamma':\gamma = \delta':\delta$ 时,
 它是一个线性微分方程. 由上面的条件,得到 $\ln \gamma = \ln \delta + \ln k, \gamma = \delta \cdot k$, 就
 是说,在这种情形下 $\gamma(x)$ 与 $\delta(x)$ 只相差一个常数因子,这时 y 有形式

$$y = \frac{\alpha + C\beta}{k\delta + C\delta} = a(x) + Cb(x)$$

其中

$$a(x) = \frac{\alpha(x)}{(k+C)\delta(x)}, b(x) = \frac{\beta(x)}{(k+C)\delta(x)}$$

18 一有重质点 m (图 3) 悬挂在弹簧的一端, 并在一个铅直平面内运动. 设弹簧把这个质点拉向固定悬挂点 O 的弹力与距离 Om 成正比. 试建立该运动的微分方程并求它的解.

解 作用在 m 上的是重力 mg 与弹力 $-\lambda r$ ($Om = r$) 的合力,

所以有: $m \frac{d^2 r}{dt^2} = mg - \lambda r$. 把这分解为分量形式并注意到

$g = -gj$, 就得到: (1) $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -\lambda x$, (2) $m \frac{d^2 y}{dt^2} = -mg -$

λy . 为了作方程(1)的积分, 令 $x = Ae^{kt} + Be^{-kt}$. 作 $\dot{x}, \ddot{x}$

并把它们代入方程(1), 得到 $k^2 = -\frac{\lambda}{m}$, 于是 $x = Ae^{i\sqrt{\lambda/m}t} +$

$Be^{-i\sqrt{\lambda/m}t}$. 因此, x 可以写成形式: (3) $x = C_1 \cos at + C_2 \sin at$, 其中 $a = \sqrt{\frac{\lambda}{m}}$.

方程(2)有特解 $y = -\frac{mg}{\lambda}$ (其物理意义是, 沿水平直线的运动是可能的, 希

望读者自行验证这一点), 所以我们设 $y + \frac{mg}{\lambda} = \eta$. 方程(2)于是变成形式

$m \frac{d^2 \eta}{dt^2} = -\lambda \eta$. 它的解相应的为: (4) $\eta = y + \frac{mg}{\lambda} = C_3 \cos at + C_4 \sin at$ 为求得

轨迹的方程, 我们从方程(3)与(4)消去 t , 于是得到 $(C_4 x - C_2 \eta)^2 + (C_3 x - C_1 \eta)^2 = (C_1 C_4 - C_2 C_3)^2$. 这是具有公共中心 $x=0, y = -\frac{mg}{\lambda}$ 的一族椭圆.

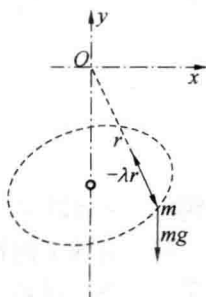


图 3

19 试用下面的条件确定上题中的诸常数: 在开始($t=0$)时 m 位于 (x_0, y_0) , 且

在那里有速度 $v_0 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^0 = v_1 i + v_2 j$.

解 由上题的方程(3)与(4)立刻得到 $C_1 = x_0, C_3 = y_0 + \frac{mg}{\lambda}$. 把上述两个方程对时间 t 微分, 容易得到方程

$$\dot{x} = v_1 = -aC_1 \sin at + aC_2 \cos at, \dot{y} = v_2 = -aC_3 \sin at + aC_4 \cos at$$

由此得到 $C_2 = \frac{v_1}{a}, C_4 = \frac{v_2}{a}$

一阶微分方程及初等积分方法

分离变量法

① 解 $y^2 dx + x^2 dy = 0$.

解 $\frac{dx}{x^2} + \frac{dy}{y^2} = 0$

$(x+y)c = xy$. 这是以 $y=c$ 与 $x=c$ 为渐近线的一族双曲线.

② 解 $y' = my + n$.

答 (1) $m \neq 0$: $y = -\frac{n}{m} + Ce^{mx}$; (2) $m = 0$: $y = nx + C$.

③ 解 $y = xy' - ay' + b$.

解 该微分方程可以写成: $\frac{dy}{y-b} = \frac{dx}{x-a}$, 积分得 $y-b = C(x-a)$. 这是通过点 (a, b) 的直线族.

④ 解 $a(xdy + 2ydx) = xydy$.

答 $x = \frac{C}{\sqrt{y}} e^{y/2a}$

⑤ 解 $(a^2 - x^2) dy + xydx = 0$.

答 $\ln y = \ln \sqrt{a^2 - x^2} + C$ 或 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 其中 $C = \ln \frac{b}{a}$, 而 b 是任意的 (有一固定主轴的椭圆族).

⑥ 解 $xy' - y \ln y = 0$.

答 $\ln \ln y = \ln x + \ln C$; $y = e^{Cx}$ (指数曲线族).

⑦ 解 $(x-4)^3(y-1)^2 dx = (x-3)^n(y-2)^{1/2} dy$.

解 分离变量后, 作变换 $y-2=u^2, x-3=t$, 就得到

$$\frac{(t-1)^3 dt}{t^n} = \frac{2u^2 du}{(1+u^2)^2}$$

在右端再令 $u = \tan \varphi$, 然后积分.

$$\begin{aligned} \text{结果是 } & \arctan \sqrt{y-2} - \frac{\sqrt{y-2}}{y-1} \\ &= \frac{(x-3)^{4-n}}{4-n} - \frac{3(x-3)^{3-n}}{3-n} + \frac{3(x-3)^{2-n}}{2-n} - \frac{(x-3)^{1-n}}{1-n} + C \end{aligned}$$

⑧ 解 $y'^2 + y^2 = y^4$.

解

$$\frac{dy}{y \sqrt{y^2 - 1}} = \pm dx$$

设 $y = \frac{1}{\cos t}$, 于是容易得到

$$y = \frac{1}{\cos(x-x_0)}$$

⑨ 解 $y' = 9y^2 - 4$; 设当 $x=0$ 时 $y=1$.

解 $\left(\frac{1}{3y-2} - \frac{1}{3y+2}\right) dy = 4dx$; $\ln \frac{3y-2}{3y+2} = 12x + C$; $C = \ln \frac{1}{5}$

$$\text{结果是 } \frac{3y-2}{3y+2} = \frac{1}{5} e^{12x}$$

⑩ 试决定次切距与次法距之和为一常数 ($=a$) 的所有曲线.

解 由关系式 $yy' + \frac{y}{y'} = a$ 得到

$$\int dx = \int \frac{2y dy}{a \pm \sqrt{a^2 - 4y^2}}$$

令 $a^2 - 4y^2 = z^2$ 及 $a \pm z = u$, 就得到

$$2x + C = -a \mp \sqrt{a^2 - 4y^2} + a \ln(a \pm \sqrt{a^2 - 4y^2})$$

11 求下列曲线族的方程: 曲线的每一弧段正比于该弧段及其端点二矢径所围成的扇形面积.

解 由关系式 $\frac{1}{2}m \int_{\varphi_0}^{\varphi} \sqrt{dr^2 + r^2 d\varphi^2} = \int_{\varphi_0}^{\varphi} \frac{1}{2}r^2 d\varphi$ 得到微分方程 $r^2 + r'^2 = \frac{1}{m^2}r^4$. 结果是: $r \cos(\varphi - \varphi_0) = m$ (直线族).

12 设曲线从点 $x=0$ 量起的弧段长与其终点横坐标平方根成正比, 试求该曲线的方程.

解 由关系式 $\int_0^x \sqrt{1 + y'^2} dx = c\sqrt{x}$ 得到微分方程 $y'^2 = \frac{c^2}{4x} - 1$. 令 $\frac{2\sqrt{x}}{c} = \sin \frac{1}{2}u$, 于是有: (1) $x = \frac{1}{8}c^2(1 - \cos u)$. 结果是: (2) $y = \frac{1}{8}c^2(u + \sin u) + y_0$. 方程 (1) 与 (2) 表示摆线, 它的生成圆在 y 轴上滚动.

13 试求与极径交角两倍于极角 φ 的所有曲线.

解 关系式为 $\frac{dr}{d\varphi} = r \cot 2\varphi$; $\frac{dr}{r} = \frac{d\varphi}{\tan 2\varphi}$; $r^2 = C \sin 2\varphi$, 为双纽线.

14 解 $y' = \frac{y}{x} \ln y \left(x=0, y' = -\frac{1}{2} \right)$.

解 $y = e^{Cx}$; 由 $y' = Ce^{Cx}$, 得 $C = -\frac{1}{2}$; $y^2 e^x = 1$.

15 试确定具有下述性质的所有曲线: 由切线在坐标轴上的截距 ξ 与 η 所构成的矩形, 其面积四倍于由横坐标 x 与纵坐标 y 所构成的矩形的面积.

解 $\xi\eta = 4xy$. 由切线方程 $Y = y'(X - x) + y$ 得 $\eta = -y'x + y$ 及 $\xi = x - \frac{y}{y'}$, 所以有微分方程

$$\left(x - \frac{y}{y'}\right)(-y'x + y) = 4xy$$

或

$$-y'x^2 - 2xy - \frac{y^2}{y'} = 0$$

或

$$(xy' + y)^2 = 0; \frac{dy}{y} + \frac{dx}{x} = 0$$

$$xy = \text{常数}$$

16 试确定具有下述性质的所有曲线:切线在坐标轴上的截距 ξ 与 η 之和二倍于坐标 x 与 y 之和.

解 $\eta + \xi = 2x + 2y, xy' + \frac{y}{y'} + x + y = 0, y'^2 + y' \frac{x+y}{x} + \frac{y}{x} = 0$, 自方程解出 y' , 得到

$$a) y' = -\frac{y}{x}, b) y' = -1$$

结果是: a) $xy = \text{常数}$, b) $x + y = \text{常数}$.

17 试确定具有下述性质的所有曲线:对于每一横坐标 $OQ = x > 0$, 矩形 $OQPR$ 与 $\triangle PTQ$ 有同样的面积. PT 是曲线的切线.

解 关系式

$$xy = \frac{1}{2} y S_t = \frac{1}{2} y \frac{y}{y'}$$

$$a) y' > 0: xy = \frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{y'}, y = C_1 \sqrt{x}, y > 0, \text{因此 } y' > 0 \text{ (图 3).}$$

$$b) y' < 0: xy = -\frac{1}{2} \cdot \frac{y^2}{y'}, y = \frac{C_2}{\sqrt{x}}, y > 0, \text{因此 } y' < 0 \text{ (图 4).}$$

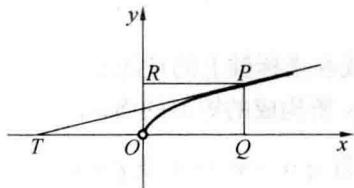


图 3

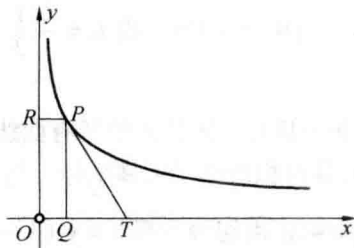


图 4

18 试引入 $z = x + iy$ 解微分方程组 $\frac{dx}{dt} = \omega y, \frac{dy}{dt} = -\omega x$.

解 $\frac{dz}{dt} = -i\omega z; z = e^{-i\omega(t-t_0)}; x = \cos(\omega(t-t_0)), y = -\sin(\omega(t-t_0))$

齐次变量型

该类方程可以通过置换 $y = xz$ 解出.

⑩ 解 $x^2 dy - (xy + y^2) dx = 0$.

解 $x dz - z^2 dx = 0; y = -\frac{x}{\ln(Cx)}$

⑪ 解 $(x - y) dx + (x + y) dy = 0$.

解 $\frac{dz}{x} + \frac{1+z}{1+z^2} dz = 0; \sqrt{x^2 + y^2} e^{\arctan y/x} = C$ 或 $re^\varphi = C$ (对数螺线)

⑫ 解 $y dy + (x + 2y) dx = 0$.

解 $xz dz + (z + 1)^2 dx = 0; (x + y) e^{x/(x+y)} = C$

⑬ 解 $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$.

解 $\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}} = \frac{dx}{x}$; 积分首先提出 $y + \sqrt{x^2 + y^2} = x^2 c$.

结果是 $x^2 = 2Cy + C^2$ (抛物线族)

⑭ 解 $(3y^2 x + 2x^3) dx + y^3 dy = 0$.

解 $(2 + 3z^2 + z^4) dx + xz^3 dz = 0$. 可用部分分式求出积分

$$\int \frac{z^3 dz}{z^4 + 3z^2 + 2} = \int \frac{2z dz}{z^2 + 2} - \int \frac{z dz}{z^2 + 1}$$

结果是 $2x^2 + y^2 = C \sqrt{x^2 + y^2}$

⑮ 求 $y' = \varphi\left(\frac{ax + by + c}{\alpha x + \beta y + \gamma}\right)$ 的积分, 其中 $a\beta - \alpha b \neq 0$.

解 设 $\alpha x + \beta y + \gamma = \xi, ax + by + c = \eta$, 于是得到

$$x = \frac{b(\xi - \gamma) - \beta(\eta - c)}{\alpha b - a\beta}, y = \frac{-a(\xi - \gamma) + \alpha(\eta - c)}{b\alpha - a\beta}$$

及 $\frac{a d\xi - \alpha d\eta}{-b d\xi + \beta d\eta} = \varphi\left(\frac{\eta}{\xi}\right)$

再设 $\eta = \xi \cdot t(\xi)$, 那么就有

$$d\xi(a - \alpha l + b\varphi - \beta l\varphi) = (\beta\xi\varphi + \alpha\xi) dt$$

从而得到

$$\xi = C \exp\left(\int \frac{(\beta\varphi + \alpha) dt}{b\varphi + a - (\beta\varphi + \alpha)t}\right)$$

25 解 $(y^2 - x) dx + 2xy dy = 0$ (设 $y^2 = xz$).

解

$$x(2z - 1) dx + x^2 dz = 0; y^2 = \frac{C}{x} + \frac{x}{2}$$

26 试求具有下述几何性质的所有曲线:在曲线的每一点处,切线垂直于通过原点的一条射线,而该射线与 x 轴的夹角等于该点的矢径与 x 轴的夹角的 2 倍.

解 从关系式 $y' = -\frac{1}{\tan 2\varphi}$ 得到 $y' = \frac{y^2 - x^2}{2xy}$; $y = xz, x dz + \frac{1+z^2}{2z} dx = 0$.

结果是: $\left(x - \frac{1}{2}C\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}C^2$ (通过原点的圆族).

27 如图 5, PR 是曲线的切线, QR 垂直于位置矢量 OP , 试求适合此条件的所有曲线.

解 关系式是

$$\tan \theta = -\frac{OR}{OT} = y', OT = -\frac{OR}{y'}; \tan \angle POQ = \frac{y}{x}$$

RQ 的方程为

$$\eta = -\frac{x}{y}(\xi - x), OR = \frac{x^2}{y}, OT = -\frac{x^2}{yy'}$$

PT 的方程为

$$\eta - y = y'(\xi - x), OT = x - \frac{y}{y'}$$

微分方程为

$$y'xy - y^2 + x^2 = 0$$

$$y = xz, zxdz + dx = 0, z^2 = C - \ln x^2$$

或

$$y = x \sqrt{C - 2\ln x}$$

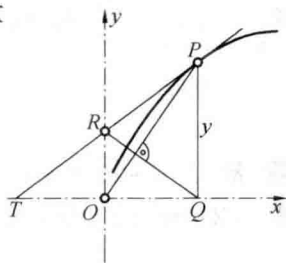


图 5

28 试求具有下述性质的所有平面曲线:曲线与 y 轴交点处的切线和在点 $(x,$

$y)$ 处的切线恒相交于横坐标 $\xi = \frac{x}{n}$ 的点处. $x=0$ 所对应的 y_0 与初始方向 y'_0 假设为已知的.

解 在 $(0, y_0)$ 及 (x, y) 处的切线为 $\eta = y_0 + y'_0 \xi$ 及 $\bar{\eta} = y + y'(\xi - x)$, 两切线的交点为 $\eta = \bar{\eta}, \xi = \frac{x}{n}$. 于是微分方程为

$$y' = \frac{1}{x} \left[\frac{n}{n-1} (y - y_0) - \frac{xy'_0}{n-1} \right]$$

设 $y = \eta + y_0$ 及 $\eta = x \cdot \lambda(x)$, 它就具有形式

$$\eta' = \lambda' x + \lambda = \lambda \frac{n}{n-1} - \frac{y'_0}{n-1}$$

结果是

$$y = y_0 + y'_0 x + Cx^{n/(n-1)}$$

29 一重质点沿铅直平面上的一条曲线这样运动, 使其速度沿铅直方向的分量保持常数 ($=a$).

解 按能量守恒定律, 有 $\frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = mg(y - y_0)$, 因为 $\dot{y} = a$, 于是 $\dot{x} = \frac{dx}{dy}$,

$\dot{y} = a \frac{dx}{dy}$, 我们得到

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{dx}{dy} \right)^2 a^2 + a^2 \right] = g(y - y_0) \text{ 或 } dx = \pm \sqrt{\frac{2g}{a^2}(y - y_0) - 1} dy$$

结果是 $x - C = \pm \frac{2}{3} \left(\frac{2g}{a^2} \right)^{1/2} \left(y - y_0 - \frac{a^2}{2g} \right)^{3/2}$

如果令 $x - C = X, y - y_0 - \frac{a^2}{2g} = Y$

代入上式并平方, 就得到

$$\frac{9a^2}{8g} X^2 = Y^3 \text{ (半立方抛物线)}$$

线性微分方程

30 解 $(1+x)dy + (y+x^2+x^3)dx = 0$.

解 把这个微分方程写成 $y' + \frac{y}{1+x} + x^2 = 0$ 的形式. 于是得到

$$y = \exp \left(- \int \frac{dx}{1+x} \right) \left(C - \int x^2 \exp \int \frac{dx}{1+x} dx \right) = \frac{1}{1+x} \left(C - \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{4} x^4 \right)$$