COMPLEX FUNCTIONS AND INTEGRAL TRANSFORMS

复变函数与积分变换

胡政发 编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

复变函数与积分变换

胡政发　编著

同济大学出版社
TONGJI UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书是按照教育部有关工程数学课程教学的基本要求编写的. 全书共分两个部分:第一部分为复变函数论,包含第1章至第6章;第二部分为积分变换,包含第7章和第8章. 第1章介绍复数及其几何属性. 第2章介绍复变函数及其解析性. 第3章讲述复变函数的积分. 第4章介绍级数理论. 在此基础上,第5章讨论函数的孤立奇点与留数定理. 第6章介绍共形映射,也就是从几何角度研究解析函数. 从第7章开始介绍积分变换. 第7章主要讲述傅里叶变换. 第8章介绍拉普拉斯变换. 各章节后均配有丰富的习题,书后附有部分习题的答案供读者参考.

"呈工科特色,富创新精神"是本书在编写过程中始终坚持的原则. 本书条理清晰,语言精练流畅,图文并茂,紧密联系工程实际. 本书可供高等学校非数学专业的理工类学生选用,也可供工程技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

复变函数与积分变换 / 胡政发编著. -- 上海:同济大学出版社,2015.8

ISBN 978-7-5608-5945-3

Ⅰ.①复… Ⅱ.①胡… Ⅲ.①复变函数—高等学校—教材 ②积分变换—高等学校—教材 Ⅳ.①O174.5 ②O177.6

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 193171 号

复变函数与积分变换

胡政发 编著

责任编辑 李小敏 **责任校对** 徐春莲 **封面设计** 潘向蓁

出版发行 同济大学出版社 www.tongjipress.com.cn
(地址:上海市四平路 1239 号 邮编:200092 电话:021-65985622)
经 销 全国各地新华书店
印 刷 大丰科星印刷有限责任公司
开 本 787mm×960mm 1/16
印 张 18.25
字 数 365000
版 次 2015年8月第1版 2015年8月第1次印刷
书 号 ISBN 978-7-5608-5945-3

定 价 35.00元

编　委　会

主　编　胡政发

副主编　李立安　张华培

编　委　胡政发　李立安　张华培

　　　　刘利敏　姜　皓　王旭吾

前　言

复变函数与积分变换是工科相关专业的一门重要的数学基础课程，它的理论和方法在科学研究和工程实际中有着广泛的应用.本书按照“工程数学回归工程”的宗旨，在参考国内外大量优秀教材和课程教学改革新成果的基础上编写而成，其内容符合工程数学课程教学的基本要求.

本书共分两个部分：第一部分为复变函数论，包含第1章至第6章；第二部分为积分变换，包含第7章和第8章.

第1章介绍复数及其几何属性，这是复变函数论的基础.这一章突显了复数的几何属性，更有利于读者对复数概念的直观理解，初步显示引入复数的重要意义.第2章介绍复变函数及其解析性.在给出复变函数的概念之后，紧接着就介绍了一些常见的初等函数.这样，对复变函数的认识就不仅仅只停留在概念的层面上，在介绍复变函数的极限、连续性以及可微性时，就可以结合这些初等函数进行分析.这一章的重点是引入复变函数论中“解析函数”这一核心概念，论述函数解析的充要条件，分析初等函数的解析性.第3章讲述复变函数的积分，并通过积分进一步研究解析函数.值得一提的是，本书并没有采用常用的“积分和的极限”来定义复积分，而是直接借助定积分来定义，这样既回避了可积性的讨论，又为复积分的计算指明了方法.第4章介绍级数理论，重点讲述了泰勒级数和洛朗级数.在此基础上，第5章讨论函数的孤立奇点，阐述留数定理，介绍留数定理的应用.第6章介绍共形映射，也就是从几何角度研究解析函数.共形映射是复变函数论中最具特色的内容，也是学生难以掌握的部分.本书从廓清各个基本概念入手，逐步导出共形映射的概念，这样显得更自然，使学生易于接受和掌握.

接下来，从第7章开始介绍积分变换.第7章主要讲述傅里叶变换，从傅里

叶级数入手，逐步引入傅里叶积分和傅里叶变换，同时将频谱的概念融入其中，接着介绍傅里叶变换的性质以及傅里叶变换几个具有代表性的应用，整个过程展示了傅里叶分析中的经典内容和傅里叶变换的重大工程意义. 第 8 章介绍拉普拉斯变换，重点讲述了拉普拉斯变换及其逆变换的概念与性质、计算方法等，特别介绍了利用拉普拉斯变换求解微分方程以及拉普拉斯变换在线性系统分析中的应用等内容.

本书由湖北汽车工业学院长期从事工程数学教学与研究工作的经验丰富的教师编写。"呈工科特色，富创新精神"是本书在编写过程中始终坚持的原则. 同时，充分考虑到工科学生的特点和实际，在编写中力求做到以下几点：

(1) 条理清晰，对每一个重要知识点尽量做到模块化. 重点突出，难点处理恰当.

(2) 语言精练、流畅，概念描述准确，定理、性质、命题阐述严谨但不失通俗易懂.

(3) 插图丰富、精美，图文并茂，与正文相辅相成.

(4) 在例题选择上广泛参考相关专业课程，紧密联系工程实际，既具有代表性又富有启发性.

本书在每节后配有少量针对性练习题，有助于学生对该节知识的理解和巩固. 在每章后配有一定量的综合练习题，目的在于培养学生综合应用该章知识的能力. 在本书的最后附有部分习题的参考答案.

由于编者水平所限，书中错误和不妥之处在所难免，诚恳欢迎读者批评指正，以期日后再作改进.

编者

2015 年 7 月

目　录

第二部分 积分变换

第一部分　复变函数

在这一部分,我们将致力于研究自变量为复数的函数,即复变函数.

提到复数,人们自然会想到"虚数"这个令人难以捉摸的概念.事实上,人类对复数的认识经历了一个漫长的过程,在复数被引入后的很长一段时间,它被认为是没有意义的、不存在的."虚数"这一名称本身就恰好反映了这一点.直到17与18世纪,韦塞尔(Wesel),阿尔冈(Argand)将复数用平面向量或点来表示,高斯(Gauss)等将复数用一对有序的实数来表示,人们才逐步消除了对复数真实性的长久疑虑,复变函数这一数学分支到此才顺利地得到建立和发展.

复变函数的有关理论产生于18世纪,欧拉(Euler)、达朗贝尔(D'Alembert)等都是创建这门学科的先驱.19世纪,复变函数理论得到了全面发展,柯西(Cauchy)、黎曼(Riemann)、维尔斯特拉斯(Weierstrass)等为这门学科的发展作了大量奠基工作.复变函数中的许多概念、理论与方法是实变函数在复数域的推广与发展,因此它们有很多相似之处.同时,复变函数理论以自身的完美体系和鲜明的特色,使其成为数学这一学科领域里的一颗璀璨明珠.

复变函数论不仅对数学领域的许多分支产生了重要影响,而且在自然科学和工程技术中有着广泛应用.数学上的一些原本在实数范围内讨论的问题,例如积分计算、级数求和、微分方程求解等问题,利用复变函数的理论能够得出令人惊喜的求解方法.在工程技术中,复变函数理论是解决诸如流体力学、电磁学、热学、系统分析、信息处理乃至金融分析的有力工具.

复变函数论的内容丰富,涉及面广.本书紧密结合工程实际的需要,主要介绍复数的运算及其几何属性、解析函数、复积分、函数的级数表示、留数理论以及共形映射等复变函数理论中最基本、最常用的内容.

第 1 章 复数及其几何属性

复数是 16 世纪人们在解代数方程时而引进的. 例如，对于一元二次方程

$$ax^2+bx+c=0\ (a\neq 0),$$

当根的判别式 $\Delta=b^2-4ac<0$ 时，我们知道该方程在实数范围内无解. 为此，人们引入一个新的数 i，称为**虚数单位**，并规定：

(1) $\mathrm{i}^2=-1$；

(2) i 与任意实数可以进行四则运算.

这样，根据二次方程的求根公式可以将上述方程的解表示为

$$x=\frac{-b\pm \mathrm{i}\sqrt{4ac-b^2}}{2a}.$$

本章在上述虚数单位 i 的基础上，定义复数并给出一系列相关概念，研究复数的各种运算关系，讨论复数的几何意义以及平面曲线、区域的复数表示等，为进一步研究复变函数奠定基础.

1.1 复数及其基本运算

1.1.1 复数的概念

定义 1.1 设 x 与 y 是任意两个实数，形如 $x+y\mathrm{i}$ 或 $x+\mathrm{i}y$ 的数称为**复数**，通常记作

$$z=x+y\mathrm{i}\quad \text{或}\quad z=x+\mathrm{i}y,$$

其中 x 与 y 分别称为复数 z **实部与虚部**，记作 $x=\mathrm{Re}(z)$，$y=\mathrm{Im}(z)$.

例如，对复数 $z=3+\mathrm{i}\sqrt{2}$，有 $\mathrm{Re}(z)=3$，$\mathrm{Im}(z)=\sqrt{2}$.

当 $y\neq 0$ 时，称复数 z 为**虚数**；当 $x=0$，$y\neq 0$，即 $z=y\mathrm{i}$ 时，称复数 z 为**纯虚数**；当 $y=0$，即 $z=x$ 时，复数 z 就是实数. 因此复数是对实数的拓展.

如果两个复数的实部和虚部分别相等，那么称这两个**复数相等**，即

$$x_1+y_1\mathrm{i}=x_2+y_2\mathrm{i}$$

当且仅当

$$x_1 = x_2,\ y_1 = y_2.$$

需要指出的是，与实数不同，一般情况下两个复数不能比较大小.

1.1.2 复数的运算

设复数 $z_1 = x_1 + y_1 \mathrm{i}$, $z_2 = x_2 + y_2 \mathrm{i}$, 首先定义复数的加法与乘法.

复数加法: $z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 \mathrm{i}) + (x_2 + y_2 \mathrm{i}) = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}$;

复数乘法: $z_1 z_2 = (x_1 + y_1 \mathrm{i})(x_2 + y_2 \mathrm{i}) = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\mathrm{i}$.

复数乘法可以按一次多项式 $x_1 + y_1 x$ 和 $x_2 + y_2 x$ 相乘得到，这里只需要将 x 换成 i 即可：

$$\begin{aligned}(x_1 + y_1 \mathrm{i})(x_2 + y_2 \mathrm{i}) &= x_1 x_2 + x_1 y_2 \mathrm{i} + x_2 y_1 \mathrm{i} + y_1 y_2 \mathrm{i}^2 \\ &= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + x_2 y_1)\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例如，

$$(6 - 4\mathrm{i})(8 + 13\mathrm{i}) = 6 \times 8 + (-4) \times 13\mathrm{i}^2 + 6 \times 13\mathrm{i} + (-4) \times 8\mathrm{i} = 100 + 46\mathrm{i}.$$

不难证明，复数的加法和乘法满足以下运算律：

(1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$ (加法交换律)；

(2) $z_1 z_2 = z_2 z_1$ (乘法交换律)；

(3) $z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$ (加法结合律)；

(4) $z_1 (z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3$ (乘法结合律)；

(5) $z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_3 + z_2 z_3$ (分配律)；

(6) $z + 0 = 0 + z = z$;

(7) $z \cdot 1 = 1 \cdot z = z$.

在复数的加法和乘法这两种运算的基础上可以定义复数的减法与除法.

复数减法: $z_1 - z_2 = z_1 + (-1) z_2$.

根据这一定义易得

$$z_1 - z_2 = (x_1 + y_1 \mathrm{i}) - (x_2 + y_2 \mathrm{i}) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\mathrm{i}.$$

复数除法：当 $z_2 \neq 0$ 时，称满足等式 $z_2 w = z_1$ 的复数 w 为 z_1 除以 z_2 的商，记作

$$w = \frac{z_1}{z_2}.$$

从这个定义出发，根据复数乘法定义以及复数相等的概念不难推出

$$w=\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1+y_1\mathrm{i}}{x_2+y_2\mathrm{i}}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}\mathrm{i}. \tag{1.1}$$

1.1.3　共轭复数

把实部相同、虚部相反的两个复数称为**共轭复数**，与 z 共轭的复数记为 $\bar{z}$. 如果 $z=x+y\mathrm{i}$，那么 $\bar{z}=x-y\mathrm{i}$.

不难证明共轭复数具有以下性质：

(1) $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$，$\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$；

(2) $\bar{\bar{z}}=z$；

(3) $z\cdot\bar{z}=[\mathrm{Re}(z)]^2+[\mathrm{Im}(z)]^2$；

(4) $z+\bar{z}=2\mathrm{Re}(z)$，$z+\bar{z}=2\mathrm{i}\mathrm{Im}(z)$.

在计算 $\frac{z_1}{z_2}$ 时，可以利用共轭复数的性质(3)把分子分母同乘以 $\overline{z_2}$，即作运算

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{z_1\overline{z_2}}{[\mathrm{Re}(z_2)]^2+[\mathrm{Im}(z_2)]^2},$$

同样可以得到式(1.1)所给出的商.

例 1.1　化简 $\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}+\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$.

解　$$\begin{aligned}\frac{1-\mathrm{i}}{\mathrm{i}}+\frac{\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}&=\frac{(1-\mathrm{i})(-\mathrm{i})}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})}+\frac{\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}=(-1-\mathrm{i})+\frac{-1+\mathrm{i}}{2}\\&=-\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}.\end{aligned}$$

例 1.2　设 $z_1=1+3\mathrm{i}$，$z_2=2-\mathrm{i}$，求 $\frac{z_1}{z_2}+\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.

解　$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{1+3\mathrm{i}}{2-\mathrm{i}}=\frac{(1+3\mathrm{i})(2+\mathrm{i})}{5}=-\frac{1}{5}+\frac{7}{5}\mathrm{i}.$$

根据共轭复数的性质有

$$\frac{z_1}{z_2}+\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}=\frac{z_1}{z_2}+\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=2\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)=-\frac{2}{5}.$$