普通高等教育“十二五”规划教材

经济学的数理基本方法

文化课

主编 王冬琳 王佳新

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

普通高等教育“十二五”规划教材

经济学的数理基本方法

主　编　王冬琳　王佳新
编　者　王冬琳　王佳新　王　妍
　　　　郭　桐　陈秋华

文化课

北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

经济学的数理基本方法 / 王冬琳，王佳新主编. — 北京：北京师范大学出版社，2015.3

ISBN 978-7-303-18708-9

Ⅰ. ①经… Ⅱ. ①王… ②王… Ⅲ. ①数学物理方法 — 应用 — 经济学 — 高等职业教育 — 教材 Ⅳ. ①F0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 047070 号

营销中心电话　010-58802755　58800035
北师大出版社职业教育分社网　http://zjfs.bnup.com
电子信箱　zhijiao@bnupg.com

出版发行：北京师范大学出版社　www.bnup.com
　　　　　北京新街口外大街 19 号
　　　　　邮政编码：100875
印　　刷：保定市中画美凯印刷有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：184 mm×260
印　　张：13.5
字　　数：260 千字
版　　次：2015 年 3 月第 1 版
印　　次：2015 年 3 月第 1 次印刷
定　　价：25.00 元

策划编辑：周光明　　　　责任编辑：周光明
美术编辑：高　霞　　　　装帧设计：国美嘉誉
责任校对：李　菡　　　　责任印制：马　洁

序言

职业教育作为一个大类教育，占据了我国学校教育的半壁江山，涵盖了本科教育、专科教育和中等职业教育，它的发展直接影响到生产力水平的提高和经济社会的可持续发展，目前数百所本科院校也正在逐步转为高等职业院校。职业教育的逻辑起点是从职业出发，是为受教育者获得某种职业技能和职业知识、形成良好的职业道德和职业素质，从而满足从事一定社会生产劳动的需要而开展的一种教育活动。高等职业教育以培养高端技能型专门人才为教育目标，由于职业教育与普通教育的逻辑起点不同，其人才培养方式也是不同的。教育部《关于推进高等职业教育改革创新引领职业教育科学发展的若干意见》(教职成[2011]12号)等文件要求"高等职业学校要与行业(企业)共同制订专业人才培养方案，实现专业与行业(企业)岗位对接、专业课程内容与职业标准对接；引入企业新技术、新工艺，校企合作共同开发专业课程和教学资源；将学校的教学过程和企业的生产过程紧密结合，突出人才培养的针对性、灵活性和开放性；将国际化生产的工艺流程、产品标准、服务规范等引入教学内容，增强学生参与国际竞争的能力"，其目的就是要深化校企合作、工学结合人才培养模式改革，创新高等职业教育课程模式，在中国制造向中国创造转变的过程中，培养适应经济发展方式转变与产业结构升级需要的"一流技工"，不断创造具有国家价值的"一流产品"。我校致力于研究与实践这个高等职业教育创新发展的中心课题，变使命为己任，从区域经济结构特征出发，确立了"立足开发区，面向首都经济，融入京津冀，走出环渤海，与区域经济联动互动、融合发展，培养适应国际化大型企业和现代高端产业集群需要的高技能人才"的办学定位，形成了"人才培养高端化，校企合作品牌化，教育标准国际化"的人才培养特色。

为了创新改革高端技能型人才培养的课程模式，增强服务区域经济发展的能力，寻求人才培养与经济社会发展需求紧密衔接的有效教学载体，学校于2011年启动了"百名教师到企业挂职(岗)实践、开发百门工学结合项目课程、编写百部工学结合校本教材活动"(简称"三百活动")，资助100名优秀专职教师，作为项目课程开发负责人，脱产到世界500强企业挂职(岗)实践锻炼，去选择"好的企业标准"，转化为"好的教学项目"。教师通过深入生产一线，参与企业技术革新，掌握企业的技术标准、工作规范、生产设备、生产过程与工艺、生产环境、企业组织结构、规章制度、工作流程、

操作技能等，遵循教育教学规律，收集整理企业生产案例，并开发转化为教学项目，进行“教、学、训、做、评”一体化课程教学设计，将企业的“新观念、新技术、新工艺、新标准”等引入课程与教学过程中。通过“三百活动”，有效促进了教师的实践教学能力、职业教育的项目课程开发能力、“教、学、训、做、评”一体化课程教学设计能力与职业综合素质。

学校通过“教师自主申报”“学校论证立项”等形式，对项目的选题、实施条件等进行充分评估，严格审核项目立项。在项目实施过程中，做好项目跟踪检查、项目中期检查、项目结题验收等工作，确保项目的高质量完成。《经济学的数理基本方法》是我校“三百活动”系列教材之一。课程建设团队将企业系列真实项目转化为教学载体，经过两轮的“教、学、训、做、评”一体化教学实践，逐步形成校本教学资源，并最终完成本教材的建设工作。“三百活动”系列教材建设，得到了各级领导、行业企业专家和教育专家的大力支持和热心的指导与帮助，在此深表谢意。相信这套“三百活动”系列教材能为我国高等职业教育的课程模式改革与创新做出积极的贡献，也希望能为正在转向职业教育的本科院校教材教学改革做些有益的借鉴。

北京电子科技职业学院

副院长　安江英

2014 年 2 月

前言

本教材根据教育部相关文件精神，借鉴国内外同类学校的教改成果，结合各院校经济管理类的专业需求和学生的特点以及当前教学改革实际编写。这几年，国家发展和改革的深化对经济和金融行业从业者素质的要求逐年提高，数学基础在行业的地位显得越来越重要了，从某种程度上本书也是对这种趋势的响应，为经管专业的学生提供一个拓展其他学科知识的机会。同时，我们也希望经管专业的毕业生具备更好的数学基础。

本书是为致力于学习基本数学方法的经管专业的学生而写，数学已经成为解析经济管理学的一种语言，用它来定量分析经济变量和经济行为关系，并对这种关系进行阐述，从这个角度上来讲，这些数学方法已成为正确学习、理解、研究各种经管文献的必不可少的工具。

现行的经济数学教材无论基础层次还是高级层次都有很多，大多将重点放在介绍数学方法上，重在进行数学思维的拓展，缺少一种偏重应用性的中级层次的教材。所谓中级当然包括证明和应用，但是又不追求纯数学教科书中的抽象和严谨；而是更加注重对学生数学直觉的培养，试图让学生明白如何运用和为什么要运用数学方法。因此，我们在编写这本书的时候，比其他教材更加注重这方面内容。

本书的最大特点就是在于把经济分析循序渐进的发展过程(从静态分析、比较静态分析到最优化问题、动态分析等)与数学方法和数学工具由易到难、由简到繁的深化过程有机结合起来，通过大量的数学分析例证，使学习者能够深入浅出、系统完整地掌握理解经济学所需的数学知识和方法，在避免为深奥的数学推导所困扰的同时，真正欣赏和体验现代经济学的美妙。

为了使读者更好地理解和掌握教材中所介绍的基本原理和方法，教材广泛征求了专业课教师和企业导师的意见，各章加入专业相关案例或项目。使学生能够获得学习专业基础课以及相关专业课程必需的、适应未来工作及进一步发展必备的数学知识、基本的数学思想方法和必要的应用技能。为了使读者有较多的练习机会，教材中选配了大量的习题。授课老师可以根据实际教学情况，布置习题给学生练习。

本书内容涵盖了：均衡分析、比较静态分析、最优化问题、动态分析、数学规划、概率统计。为掌握上述内容，本书介绍了如下数学方法：矩阵代数、微积分、微分方

程、差分方程、线性规划、整数规划、概率统计。

除封面署名作者外，本书在编写过程得到了许多人的大力支持和帮助，凝结了许多人的劳动成果。本书最后由王冬琳统稿。

在教材整个编写过程中，学院教务处和基础部领导给予了很大关怀和支持，在此一并表示衷心感谢。

虽然我们尽了最大努力，力求不断完善，但由于水平所限，时间仓促，恐怕仍然存在疏漏，还请读者不吝赐教，我们将不胜感激。

编　者

2015年2月

目录

第五篇 数学规划

第六篇 概率统计模型

第一篇　均衡分析

任务 I　经济学中的均衡分析

均衡的概念可以用不同方式定义。其中一种常见的定义为“选定的一组具有内在联系的变量经过彼此调整，从而这些变量所构成的模型不存在内在变化倾向的一种状态”。

选定的：与特定变量集合有关，增加额外变量则不适用。

内在联系：所有变量同时静止，静止状态一致。

内在的：假定外部因素不变(参数和外生变量被视为常数)，静止状态仅以模型内部力量平衡为基础。

缺乏依据的结论：均衡是事物的一种理想的或合意的状态，因为只有理想状态才会缺乏变化动力(利润最大化、非充分就业的国民收入均衡水平)。

唯一合理的解释是：均衡是这样一种状态，其一旦达到且外力不发生变化时，就有维持不变的倾向。

任务简介

现今社会是市场经济社会，我们先考虑最简单的市场模型。市场是商品交换的场所，现在只考察一种商品，其中最核心的问题是商品的价格。商品的均衡价格由商品的供给量和商品的需求量决定，商品的需求量是价格的减函数，商品的供给量是价格的增函数，商品的供给量和商品的需求量都是价格的线性函数。

设商品的需求量为 Q_d，商品的供给量为 Q_s，商品的价格为 P，假定市场出清时市场实现均衡。试分析并给出它的经济均衡模型。

学习本任务的目的

1. 使学生了解均衡的概念。
2. 使学生理解求出均衡经济模型的整个过程和方法。

知识储备

内生变量：它是指其值源于模型的内部，可通过模型解出得变量。

外生变量：它是指其值源于模型的外部，在模型求解过程中，将其视为给定的数据，因此称为外生变量。

出清：它是指价格给定时，供给等于需求，市场出现均衡。

需求曲线：需求函数的图像。需求 Q_d 是 P 的递减线性函数，即：当 P 增加时，Q_d 减少。

供给曲线：供给函数的图像。供给 Q_s 是 P 的递增线性函数，即：当 P 增加时，Q_s 增加。

模型构建

在静态均衡模型中，标准的问题是求出满足模型均衡条件的一组内生变量的值。因为仅考察一种商品，所以模型中只需包括三个变量：商品的需求量 Q_d，商品的供给量为 Q_s，商品的价格为 P。商品的需求量可以用多少千克来度量，价格可以用人民币来度量。接下来就是要对市场运行来作出假设，首先，我们必须设定市场均衡模型必不可少的市场均衡条件：当且仅当超额需求为零($Q_d - Q_s = 0$)，即当且仅当市场出清时，市场实现均衡。

将其转化为数学模型可以写成：$\begin{cases} Q_d = Q_s \\ Q_d = a - bP,\ (a,\ b > 0) \\ Q_s = -c + dP,\ (c,\ d > 0) \end{cases}$

其中 Q_d，Q_s 和 P 为内生变量，两个线性函数中出现的四个参数 a、b、c、d 均设定为正。选定横轴表示价格，纵轴表示 Q_d 和 Q_s，分别作出需求曲线和供给曲线，如图 1-1。

交点为(P^*，Q^*)，分别表示均衡价格和均衡的供给量与需求量。

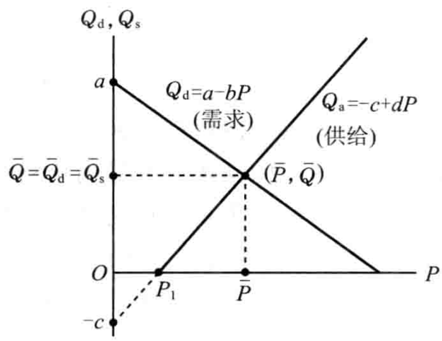

图 1-1

建模完成，下面对模型求解，由于 $Q_d = Q_s$，可设 $Q_d = Q_s = Q$

$$\begin{cases} Q = a - bP \\ Q = -c + dP \end{cases} \Rightarrow a - bP = -c + dP \Rightarrow (b+d)P = a + c$$

因为 $b + d \neq 0$

解出均衡价格和均衡数量分别为：$\begin{cases} P^* = \dfrac{a+c}{b+d} \\ Q^* = \dfrac{ad-bc}{b+d} \end{cases}$

约束条件：$ad > bc$ 使模型有经济意义。

市场模型的解 P^*，Q^* 的意义

由图 1-1 可以看出，市场模型的解 P^*，Q^* 在图形上由供给曲线的交点决定，若

$Q^*>0$，供给曲线的交点必须位于图1-1横轴的上方，这要求两条曲线的斜率和纵截距的相对大小受约束。根据 $Q^*=\frac{ad-bc}{b+d}$，给定 $b>0$，$d>0$，这个约束是 $ad>bc$。

下面分别以 D，S 表示需求曲线和供给曲线的点集

$$D=\{(P,Q)/Q=a-bP\},$$
$$S=\{(P,Q)/Q=-c+dP\}$$

则 $D\cap S=(P^*,Q^*)$。

因为 D，S 均为直线，所以只有一个交点，线性市场模型的均衡是唯一的。

模型拓展

在孤立的市场模型中，用二次需求函数代替线性需求函数，供给函数仍为线性函数是比较常见的。例如：已知需求函数是二次函数；供给函数为线性函数。下面是需求函数、供给函数与价格的一些数据。

P	1	2	5
Q_d	3	0	−21
Q_s	3	7	19

试确定它的市场均衡模型，并求出均衡点。

由已知可设：需求函数为 $Q_d=m_1P^2+n_1P+r_1$

供给函数为 $Q_s=m_2P+r_2$

其中，m_1，m_2，n_1，r_1，r_2，是待定的常数。

由数据

P	1	1.5	2
Q_d	3	1.75	0
Q_s	3	5	7

可列出方程组：$\begin{cases}3=m_1\cdot1+n_1\cdot1+r_1\\0=m_1\cdot2^2+n_1\cdot2+r_1\\1.75=m_1\cdot(1.5)^2+n_1\cdot(1.5)+r_1\end{cases}$

$$\begin{cases}3=m_2\cdot1+r_2\\7=m_2\cdot2+r_2\end{cases}$$

解得：$\begin{cases}m_1=-1\\n_1=0\\r_1=4\end{cases}$ $\begin{cases}m_2=4\\r_2=-1\end{cases}$；

所以　需求函数为 $Q_d=4-P^2$

供给函数为 $Q_s=4P-1$

因此，构建均衡模型为：
$$\begin{cases}Q_d=Q_s\\Q_d=4-P^2\\Q_s=4P-1\end{cases}\tag{1-1}$$

模型(1-1)包括一个均衡条件、两个行为方程，这两个行为方程分别决定了市场供给和市场需求。

由均衡条件用变量消去法得到

$$P^2+4P-5=0 \qquad \Rightarrow (P-1)(P+5)=0$$

从而解出均衡价格为 $P^*=1$，(因为价格不能为负值，舍去 $P^*=-5$)

再利用模型(1-1)的第二或第三方程就可以很容易地求出均衡需求量和供给量。

可将需求曲线和供给曲线用点集表示为：

$$D=\{(P,\ Q)/Q=4-P^2\},$$
$$S=\{(P,\ Q)/Q=4P-1\}$$

由均衡条件，均衡点为

$$D\cap S=\{(1,\ 3),\ (-5,\ -21)\}$$

二次函数

$$f(P)=P^2+4P-5 \tag{1-2}$$

列表描点画图

P	…	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	…
$f(P)$	…	7	0	-5	-8	-9	-8	-5	0	7	…

无数个有序数对，即(1-2)有无数个解，这些构成图 1-2 的抛物线。

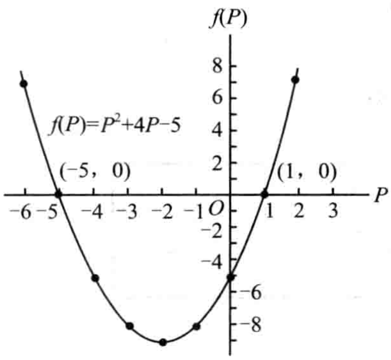

图 1-2

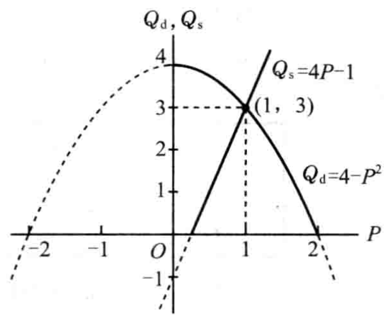

图 1-3

用横轴表示价格 P，用纵轴表示需求量 Q_d 和供给量 Q_s，分别作出需求曲线和供给曲线。

如图 1-3 所示，交点为(P^*，Q^*)，因为价格和需求量均为非负值，于是均衡点只有一个，即(1，3)。

任务Ⅱ 线性模型与矩阵代数

矩阵是线性代数的一个最基本的概念，也是数学的最基本的一个工具。它在 20 世纪得到飞速发展，成为在物理学、生物学、地理学、经济学等中有大量应用的数学分支，现在矩阵比行列式在数学中占有更重要的位置。矩阵这个词是英国数学家西勒维斯特在 1850 年首先使用的，但历史非常久远，可追溯到东汉初年(公元 1 世纪)成书的《九章算术》，其方程章第一题的方程实质上就是一个矩阵，所用的解法就是矩阵的初等变换。

矩阵的运算是线性代数的基本内容。1849 年英国数学家凯莱介绍了可逆方阵对乘法成群。凯莱——毕业于剑桥三一学院，他与西勒维斯特长期合作作了大量的开创性的工作创立了矩阵论；与维尔斯特拉斯一起创立了代数型理论，奠定了代数不变量的理论基础；他对几何学的统一也有重大贡献，一生发表近千篇论文。

矩阵是线性代数的核心，矩阵的概念、运算和理论贯穿线性代数的始终。矩阵是一个表格，它的运算与数的运算是既有联系又有区别；矩阵与行列式也有很大的关联，但二者不能等同混淆。

任务简介

(投入产出模型)国民经济各部门之间存在某种连锁关系。一个经济部门依赖于其他部门的产品或半成品，同时它也为其他部门的生产提供条件。如何在特定的经济形势下确定各经济部门的产出水平以满足整个社会的经济需要是一个十分重要的问题。投入产出模型就是利用数学方法综合地描述各经济部门间产品的生产和消耗关系的一种经济数学模型，这种数学模型由美国经济学家列昂惕夫(Leontief)首先提出，多年来被各国广泛采用，在编制经济计划、经济预测以及研究污染、人口等社会问题中发挥了很大的作用，列昂惕夫也因此获得了 1973 年诺贝尔经济学奖。

学习本任务的目的

1. 使学生理解市场均衡的知识。
2. 使学生掌握求出均衡经济模型的整个过程和方法。

知识储备

1.2.1 矩阵

1.2.1.1 矩阵的概念

(一)矩阵的定义

矩阵是从许多实际问题中抽象出来的一个数学概念，它在自然科学的各个领域和经济管理、经济分析中有着广泛的应用。来看这样一个简单的实例：

例 1 某种物资有 3 个产地，4 个销地，调配量如下表所示：

销地 / 产地	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	1	6	3	5
A_2	3	1	2	0
A_3	4	0	1	2

那么，表中的数据可以构成一个矩形数表：

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

在预先约定行列意义的情况下，这样的简单矩形数表就能表明整个产销调配的状况。不同的问题，矩形数表的行列规模有所不同，去掉表中数据的实际含义，我们得到如下矩阵的概念。

定义：由 $m\times n$ 个数或代数式 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$ 构成的一个 m 行 n 列的矩形列表

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{或} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为一个 m 行 n 列的矩阵。其中 a_{ij} 称为矩阵的第 i 行 j 列的元素$(i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n)$。

矩阵的元素属于数域 F，称其为数域 F 的矩阵。若无特别说明，本书里的矩阵均指实数域 R 上的矩阵。一般用大写的字母 A，B，C，…表示矩阵；有时为了突出矩阵的行列规模，也对大写字母右边添加下标，如 $m\times n$ 的矩阵 A 可以表为 $A_{m\times n}$；还有，要同时表明矩阵的规模和元素时也采用形式$(a_{ij})_{m\times n}$标记。

（二）矩阵的有关概念

1. 方阵

行数与列数相等的矩阵称为 n 阶方阵，常记为 A_n。

2. 行矩阵和列矩阵

行矩阵——只有一行的矩阵 $A=(a_1 a_2 \cdots a_n)$，又称行向量，也记为 $A=(a_1, a_2, \cdots, a_n)$。

列矩阵——只有一列的矩阵 $B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$，又称列向量，也记为 $B=(b_1 b_2 \cdots b_n)^{\mathrm{T}}$。

3. 同型矩阵

行数和列数均相等的两个矩阵称为同型矩阵。

4. 矩阵的相等

若 A、B 为同型矩阵，且对应元素相等，即 $a_{ij}=b_{ij}$（$i=1,2,\cdots,m$；$j=1,2,\cdots,n$），则称矩阵 A 与 B 相等，记作 $A=B$。

5. 零矩阵

元素均为零的矩阵称为零矩，记为 O。要注意不同型的零矩阵是不相等的。

6. 对角矩阵

主对角线上的元素分别为 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$，其余元素为 0 的 n 阶方阵称为对角矩阵，记为 $A=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n)$。

7. 单位矩阵

主对角线上的元素为 1，其余元素为 0 的 n 阶方阵，记为 E_n。

8. 上三角阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

下三角阵

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

例 1 设矩阵 $A=\begin{bmatrix} 1 & a \\ 2-b & 3 \end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix} c+1 & -4 \\ 0 & 3d \end{bmatrix}$，且 $A=B$，试求 a，b，c，d。

解： 因为 $A=B$，故有：

$$1=c+1,\ a=-4,\ 2-b=0,\ 3=3d$$

联解求得：$a=-4$，$b=2$，$c=0$，$d=1$。

（三）矩阵的运算

1. 矩阵的线性运算——加法与数乘矩阵

定义： 两个 $m\times n$ 矩阵 $A=(a_{ij})$，$B=(b_{ij})$ 对应位置上的元素相加得到的 $m\times n$ 矩阵，$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{pmatrix}$ 称为 A 与 B 的和，记 $A+B=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$。

注 1：同型阵之间才能进行加法运算。

注 2：称矩阵 $-A=(-a_{ij})$ 为矩阵 A 的负矩阵，利用负矩阵的概念可定义矩阵的减法运算：$A-B=A+(-B)$。

注 3：矩阵的加法运算满足以下运算律

①交换律——$A+B=B+A$；

②结合律——$(A+B)+C=A+(B+C)$；

③$A+(-A)=O$；$A+O=A$；$O+A=A$

定义： 以数 λ 乘以矩阵 A 的每个元素所得的矩阵，称为数 λ 与矩阵 A 的乘积，若 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，则 $\begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix}$ 为数 λ 与矩阵 A 的乘积，记为 λA 或 $A\lambda$

注：矩阵的数乘运算满足以下运算律

①结合律——$(\lambda\mu)A=(\lambda A)\mu=\lambda(\mu A)$；

②分配律——$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$；$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$

例 2 有 4 名学生的某 3 门课的平时考查成绩矩阵为：

$$A=\begin{pmatrix} 90 & 78 & 92 & 66 \\ 86 & 80 & 93 & 74 \\ 95 & 70 & 96 & 75 \end{pmatrix}$$

而课程结业考试的卷面成绩矩阵为：

$$B=\begin{pmatrix} 94 & 83 & 98 & 60 \\ 90 & 85 & 95 & 70 \\ 97 & 76 & 97 & 72 \end{pmatrix}$$

规定各门课程的考核成绩由平时考查和卷面考试的成绩分别占 30% 和 70% 构成，求 4 名学生的考核成绩矩阵。

解： 考核成绩矩阵为

$$0.3A+0.7B=0.3\begin{pmatrix} 90 & 78 & 92 & 66 \\ 86 & 80 & 93 & 74 \\ 95 & 70 & 96 & 75 \end{pmatrix}+0.7\begin{pmatrix} 94 & 83 & 98 & 60 \\ 90 & 85 & 95 & 70 \\ 97 & 76 & 97 & 72 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 27 & 23.4 & 27.6 & 19.8 \\ 25.8 & 24 & 27.9 & 22.2 \\ 28.5 & 21 & 28.8 & 22.5 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 65.8 & 58.1 & 68.6 & 42 \\ 63 & 59.5 & 66.5 & 49 \\ 67.9 & 53.2 & 67.9 & 50.4 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 92.8 & 81.5 & 96.2 & 61.8 \\ 88.8 & 83.5 & 94.4 & 71.2 \\ 96.4 & 74.3 & 96.7 & 72.9 \end{pmatrix}$$

例 3 已知 $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 & 7 \\ -1 & 5 & -5 \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} 9 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ 且 $A+3X=B$，求 X。

解： 由 $A+3X=B$ 得

$$X=\frac{1}{3}(B-A)=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 6 & 2 & -8 \\ 8 & -2 & 7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & \frac{2}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{7}{3} \end{pmatrix}$$

2. 矩阵的乘法

定义： 设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times s}$，$B=(b_{ij})_{s\times n}$，那么规定矩阵 A 与矩阵 B 有乘积且为一